PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur les feuilletages « conformément minimaux » des variétés riemanniennes de dimension trois* Note de **Piotr T. Chruściel**, présentée par Yvonne Choquet-Bruhat.

On présente des theoremes d'unicite et d'existence de solutions de l'equation $\nabla_i(|\nabla f|\nabla^i f)=0$ définies sur des domaines bornes d'une variete riemannienne, ainsi que sur toute la variete, singulieres en un point

MATHEMATICAL PHYSICS — On "conformally-minimal" foliations of three dimensional riemannian manifolds

Uniqueness and existence of solutions of the equation $\nabla_i(|\nabla f|\nabla^i f)=0$ theorems are presented, for solutions singular at some point, defined in a bounded domain of a riemannian manifold, or on the whole manifold

Il est bien connu, que la « contrainte scalaire » de la relativité générale :

$$\det g\,R=\pi^{ij}\pi_{ij},$$

peut être considérée comme une équation différentielle pour le facteur conforme ψ :

(1) $$g=\psi\gamma,$$

étant donné une métrique $\gamma=(\gamma_{ij})$ [on suppose, bien sûr, que les deux métriques riemanniennes $g=(g_{ij})$ et γ sont non dégénérées], et une densité tensorielle symétrique π^{ij} à trace nulle ($g_{ij}\pi^{ij}=0$). Une démarche possible dans la recherche des données de Cauchy non contraintes de la relativité générale est d'associer à toute métrique g un représentant unique γ de la classe d'équivalence $[g]=\{$métriques riemanniennes g' sur la variété M : $g'=\lambda g$, où λ est une fonction strictement positive sur M$\}$:

$$g\to[g]\to\gamma.$$

Une telle approche, adaptée par J. Kijowski, a permis :

(*a*) de présenter un ensemble de données de Cauchy, canoniquement conjuguées, non contraintes;

(*b*) de démontrer la nécessité d'inclure, comme variables canoniques supplémentaires, certaines « données au bord », et :

(*c*) de démontrer la positivité de l'hamiltonien du système, pour des espaces asymptotiquement euclidiens.

La méthode utilisée par J Kijowski [1] est la suivante .

(*a*) on se donne une métrique g sur une variété M de dimension trois;

(*b*) on détermine γ en exigeant que la solution f de l'équation de Laplace de la métrique $\gamma=\psi^{-1}g$:

(2) $$\Delta(\gamma)f=(\det\gamma)^{-1/2}\,\partial_i\{\gamma^{ij}f_{,j}(\det\gamma)^{1/2}\}=0,$$

satisfaisant la condition :

(3) les surfaces $f=$ Cte sont des sphères emboîtées

ait la propriété :

(4) $$\gamma^{ij}f_{,i}f_{,j}=|\nabla f|^2_\gamma=1$$

(les virgules désignent la différentiation par rapport à la variable x^i, les indices répétés impliquent une sommation, $i,j=1, 2, 3$, ∇_i désigne la dérivée covariante riemannienne de la métrique g).

0249-6291/85/03010609 \$ 2.00 © Académie des Sciences

PROPOSITION 1. — *La métrique $\gamma \in [g]$ satisfaisant* (2) *et* (4) *existe, si et seulement si, il existe une fonction $f: M \to \mathbb{R}$, satisfaisant* :

(5) $$D(g, f) \equiv \nabla_i (|\nabla f| \nabla^i f) = 0,$$

(6) $$\forall x \in M \, |\nabla f(x)| \neq 0,$$

où :

(7) $$\nabla^i f = g^{ij} f_{,j}, \qquad |\nabla f|^2 = f_{,i} \nabla^i f = g^{ij} f_{,i} f_{,j}$$

Démonstration. — L'équation (5) est invariante conforme [c'est-à-dire $D(g, f) = 0 \Leftrightarrow D(\lambda g, f) = 0$, pour toute fonction $\lambda : M \to \mathbb{R}$, strictement positive]. Si (5) et (6) sont satisfaits, on pose $\gamma^{ij} = g^{ij}/|\nabla f|^2$. On a alors $\gamma^{ij} f_{,i} f_{,j} = 1$, ce qui implique $D(\gamma, f) = \Delta(\gamma) f$. L'implication inverse [(2) et (4)] $\Rightarrow$ [(5) et (6)] découle d'un raisonnement similaire et de la non-dégénérescence supposée des métriques γ et g.

Notons que toute fonction satisfaisant (5) et (6) induit un feuilletage de M par des surfaces $f = $ Cte qui sont des surfaces minimales de la métrique γ (la trace de la courbure extérieure est nulle). Pour cette raison l'auteur propose d'appeler ce feuilletage « feuilletage conformément minimal »

Pour prouver que la méthode utilisée par J. Kijowski est mathématiquement rigoureuse, il faut démontrer l'existence de solutions de l'équation (5) satisfaisant les conditions (3) et (6). Il est facile de démontrer que (3), (5) et (6) impliquent que la fonction f doit être singulière en un certain point x_0. Dans cette Note des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions singulières seront présentés. Les théorèmes 1 et 2 généralisent et raffinent les théorèmes 2 et 3 de [2], le théorème 3 est un résultat apparemment nouveau. Les détails des démonstrations seront publiés ailleurs.

Dans ce qui suit, on supposera que M est une variété riemannienne de dimension trois, Hausdorff, paracompacte, de classe C_2, géodésiquement complète. M peut être topologiquement non triviale, et peut avoir plusieurs « régions s'étendant à l'infini » distinctes, sans restrictions sur l'asymptotique de la métrique. Ω désignera un domaine borné dans la distance géodésique (donc de volume riemannien fini), avec $\partial\bar{\Omega}$ — une sous-variété de M de classe C_1. On supposera la métrique de classe C_1.

La métrique g sera dite asymptotiquement euclidienne dans une région $N \subset M$ si N est difféomorphe à $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R)$, pour une certaine boule $B(0, R)$ de rayon R et, dans les coordonnées locales, la métrique g a la forme suivante :

$$g_{ij} = \delta_{ij} + k_{ij},$$

avec $|r^\alpha k_{ij}|$, $|r^{\alpha+1} g_{ij,k}|$ — bornés sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, R)$, pour un certain $\alpha > 0$, et $r^2(x) = \sum (x^i)^2$.

Dans tous les théorèmes qui suivent, « pour tout Ω » signifie « pour tout Ω comme décrit ci-dessus », etc. Les conditions de différentiabilité de $\partial\bar{\Omega}$ et des données de Dirichlet peuvent être fortement affaiblies, pour ne pas compliquer l'exposition on se bornera à des domaines comme décrits ci-dessus, et des données de Dirichlet de classe C_1, ce qui sera suffisant pour les application physiques qui nous intéressent [1].

$C_{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace de Banach des fonctions différentiables jusqu'au bord de Ω, avec dérivées premières continues dans le sens de Holder, d'exposant α (*cf.*, par exemple [3]). $W_{1,p}(\Omega, g)$ désigne la complétion de $C^\infty(\Omega)$ dans la norme :

$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \||\nabla f|\|_p,$$

où :

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu(g), \qquad d\mu(g) = (\det g)^{1/2} \, d^3 x.$$

THEORÈME 1 (le problème de Dirichlet extérieur). — *Pour tout* Ω, *pour toute métrique* g *de classe* C_1, *pour toute fonction* $\varphi \in C_1(\partial\bar{\Omega})$ *il existe une famille à un paramètre de fonctions* $f_A : M \setminus \Omega \to \mathbb{R}$, *solutions faibles de l'équation* (5), *satisfaisant* $f_{A \mid \partial\bar{\Omega}} = \varphi$. *Pour tout domaine* K *strictement intérieur à* $M \setminus \Omega$, $f \in C_{1,\alpha}(\bar{K})$, *pour un certain* $\alpha(K, \Omega, g) > 0$. *Si la variété possède plusieurs régions s'étendant à l'infini, sur une des régions asymptotiquement euclidiennes* N (*s'il en existe*) *les fonctions* f_A *se comportent de la façon suivante* .

(8) $$f_A = A \ln r + g_A, \qquad g_A \textit{ borné sur } N,$$

(9) $$\lim_{r \to \infty} g_A = \mathring{g}_A, \qquad \textit{pour un certain } \mathring{g}_A \in \mathbb{R},$$

(10) $$\lim_{r \to \infty} r \left| \nabla f_A \right| = A.$$

Démonstration. — L'existence de solutions peut être établie en utilisant le principe de Harnack (th. 6 de la réf. [4]) d'une façon similaire à la démonstration du théorème 13 de la référence [4]. Le comportement asymptotique (8) est obtenu *a priori* par comparaison des solutions singulières avec des sous- et sur-solutions de la forme $\ln r \pm r^{-\gamma}$ (*cf.* [2]) et un emploi du principe de Harnack. (8) permet d'établir une estimation *a priori* $|\nabla f_A| \leqq C_A / r$ (pour un certain $C_A \in \mathbb{R}$), ceci et (8) impliquent ensuite $g_A \in W_{1,3}(N, g)$, qui implique finalement (9) et (10)

THEOREME 2 (le problème de Dirichlet intérieur) — *Pour tout* $\Omega \subset M$, *pour toute métrique* g *de classe* C_1, *pour tout* $x_0 \in \Omega$, *pour tout* $\varphi \in C_1(\partial\bar{\Omega})$, *il existe une famille de fonctions* f_A . $\Omega \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, *solutions faibles de l'équation* (5), *satisfaisant* $f_{A \mid \partial\bar{\Omega}} = \varphi$. *Pour tout domaine* K *strictement intérieur à* $\Omega \setminus \{x_0\}$, $f_A \in C_{1,\alpha}(\bar{K})$, *pour un certain* α. *Les fonctions* f_A *sont de la forme* [$\sigma(x)$-*distance géodésique de* x_0 *à* x] .

(11) $$f_A = A \ln \sigma + g_A, \qquad \textit{avec } g_A \textit{ bornée sur } \Omega,$$

et satisfont

(12) $$\lim_{\sigma(x) \to 0} g_A(x) = \mathring{g}_A, \qquad \textit{pour un certain } \mathring{g}_A \in \mathbb{R},$$

(13) $$\lim_{\sigma(x) \to 0} (|\nabla f_A| \sigma)(x) = A.$$

La propriété (11) *et* $f_{A \mid \partial\bar{\Omega}}$ *déterminent la famille* f_A *d'une façon unique.*

Démonstration — L'existence et les propriétés asymptotiques découlent du théorème 1 et de l'invariance conforme de l'équation (5) Pour démontrer l'unicité, on utilise le comportement asymptotique (11) ainsi que la propriété de monotonie :

$$(\nabla_i f_1 - \nabla_i f_2)(\nabla^i f_1 |\nabla f_1| - \nabla^i f_2 |\nabla f_2|) \geqq \frac{1}{2} |\nabla(f_1 - f_2)|^3 \geqq 0.$$

Remarque. — L'auteur aimerait relever une erreur dans la démonstration du théorème 3 de [2], provenant d'un emploi infortuné du terme « coordonnées géodésiques ». Ce terme devrait être remplacé par « n'importe quel système de coordonnées (globales) sur Ω, telles que $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ » (ceci peut être obtenu, par exemple, par une transformation linéaire des axes de coordonnées).

THEOREME 3 (solutions globales). — *Pour toute variété* M *non compacte, pour tout* $x_0 \in M$, *pour toute métrique* g *de classe* C_1, *il existe une fonction* $f : M \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, *solution* *faible de l'équation* (5), *satisfaisant*

$$\lim_{\sigma(x)\to 0} (f-\ln\sigma)(x)=0,$$

et satisfaisant

$$\lim_{\sigma(x)\to 0} (|\nabla f|\sigma)(x)=1$$

Si M *ne possède qu'une région* N *s'étendant à l'infini, et si la métrique y est asymptotiquement euclidienne, alors f est unique, et possède les propriétés asymptotiques suivantes*

$$\lim_{r\to\infty} (f-\ln r)=a, \text{ pour un certain } a\in\mathbb{R}, \text{ et } \lim_{r\to\infty} r|\nabla f|=1.$$

Démonstration. — La démonstration du théorème 3 se fait en construisant une suite de fonctions f_n, solutions de (5) sur des Ω_n remplissant $M\setminus\{x_0\}$ lorsque n tend vers l'infini. Les fonctions f_n satisfont aux conditions $\min_{S(x_0,\sigma_1)} f_n=1$, $\min_{S(x_0,\sigma_2)} f_n=2$, pour certains σ_1 et σ_2. La possibilité de satisfaire ces conditions découle du principe de maximum fort. L'existence d'une sous-suite convergente sur tout compact est garantie par le principe de maximum, le principe de Harnack, et les estimations *a priori* de [5]. L'unicité découle des propriétés asymptotiques de f, et de la propriété de monotonie.

Certains des résultats présentés ici peuvent facilement être généralisés aux « p-laplaciens » $(\nabla_i(|\nabla f|^{p-2}\nabla^i f)=0)$ dans n'importe quelle dimension. Des résultats semblables ont été obtenus indépendamment par L. Véron, pour des ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et une métrique plate [6]. Dans tous les théorèmes présentés ici, le passage des estimations locales des références [4] et [5] aux estimations invariantes sur la variété riemannienne se fait par des méthodes semblables à celles utilisées dans les démonstrations de [3].

L'auteur tient à remercier L. Véron pour une discussion intéressante, spécialement pour l'indication comment approcher le problème de l'unicité. L'auteur remercie aussi Y. Choquet-Bruhat pour des remarques concernant une version précédente de cet article, et J. Madajczyk pour des discussions utiles.

Remise le 11 mars 1985, acceptée après révision le 1er juillet 1985.

Références bibliographiques

[1] J. Kijowski, Proceedings of Journées relativistes, Aussois, *Springer Lecture Notes in Phys.*, 212, 1984.
[2] P. T. Chruściel, *Comptes rendus*, 299, série I, 1984, p. 891-894.
[3] A. Chaljub-Simon et Y. Choquet-Bruhat, *Ann. Fac. Sciences Toulouse*, 1, 1979, p. 9.
[4] J. Serrin, *Acta Math.*, 111, 1964, p. 247.
[5] P. Tolksdorf, *J. Diff. Eqs.*, 51, 1984, p. 126.
[6] L. Véron, *Comptes rendus*, 301, série I, 1985 (à paraître).

Institute for Theoretical Physics,
Polish Academy of Sciences, al. Lotników 32/46, 02-668 *Warszawa, Pologne.*