PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Sur l'existence de solutions singulières d'une équation « condition de coordonnées » utilisée par J. Kijowski dans l'analyse symplectique de la relativité générale.

Note de **Piotr T. Chruściel,** présentée par Yvonne Choquet-Bruhat.

Remise le 24 septembre 1984.

Deux théorèmes d'existence de solutions singulières de l'équation $\nabla_i(\nabla^i f |\nabla f|)=0$ avec une asymptotique logarithmique à l'infini ou à l'origine sont présentés.

MATHEMATICAL PHYSICS. — On the Existence of Singular Solutions of a "Coordinate Conditions" Equation used by J. Kijowski in Symplectic Analysis of General Relativity.

Two theorems on the existence of singular solutions of the equation $\nabla_i(\nabla^i f |\nabla f|)=0$ *with a logarithmic behaviour at infinity or at some point are presented.*

Le but de cette Note est de présenter deux théorèmes concernant l'existence de solutions singulières de l'équation différentielle quasilinéaire :

$$(1)\qquad \begin{cases} \nabla_i\,(|\nabla f|\,\nabla^i f)=0, \\ |\nabla f|^2=g^{ij}\,f_{,i}f_{,j}, \qquad \nabla^i f=g^{ij}\,f_{,j}, \end{cases}$$

avec la condition de bord :

$$(2)\qquad f|_{\partial B}=\text{Cte},$$

$B\subset\mathbb{R}^3$, difféomorphe à une boule [les virgules désignent des dérivées partielles, ∇_i des dérivées covariantes par rapport à la métrique strictement riemannienne g_{ij}, les indices $i, j, \ldots$ (A, B, ...) prennent des valeurs de un à trois (deux à trois), les indices répétés impliquent une sommation]. Le problème physique que l'on se propose de résoudre est le suivant : étant donné une variété riemannienne M à trois dimensions, difféomorphe à $\mathbb{R}^3$, est-il possible de trouver un système de coordonnées (du type radial) dans lequel la métrique prend la forme suivante :

$$(3)\qquad \begin{cases} g_{ij}=\varphi\,\gamma_{ij}, \qquad \gamma_{11}=1, \qquad \gamma_{1A}=0, \\ \qquad \det\gamma_{AB}=\lambda^2, \qquad \lambda=\lambda\,(x^A), \end{cases}$$

avec λ fixé (par exemple $\lambda=\sin\theta$). L'existence d'un tel système de coordonnées permet une paramétrisation explicite de l'espace de phase de la relativité générale (variables « de bord » incluses), *cf.* [1]. Si la métrique peut être écrite sous la forme (3), la fonction $f=x^1$ satisfait à l'équation (1). D'un autre côté, étant donné une solution f de l'équation (1), singulière en un point x_0, satisfaisant la condition :

$$|\nabla f|\,(x)\neq 0, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^3$$

et la condition (2), on peut construire un système de coordonnées x^i tel que la métrique peut être écrite sous la forme (3) en posant $x^1=f$, et $x^A_{|\partial B}=\{$ n'importe quel système de coordonnées sur B telles que det $g_{AB\,|\,\partial B}=(\lambda/g^{11})^2_{|\partial B}\}$ (l'existence d'un tel système de coordonnées est garantie par le théorème de Riemann). On prolonge le système de coordonnées x^A à l'intérieur de B en demandant que les fonctions x^A soient constantes le long des courbes intégrales du gradient de f. Dans cette Note des théorèmes d'existence

0249-6321/84/02990891 $ 2.00

de solutions de l'équation (1) seront présentés, dans une boule et dans le complément d'une boule dans $\mathbb{R}^3$, les problèmes d'existence de solutions satisfaisant à la condition (4), ou d'existence de solutions dans $\mathbb{R}^3$ singulières en un point restant des problèmes ouverts.

THÉORÈME 1. — *Supposons que la métrique g^{ij} satisfasse les conditions suivantes :*

1° *la condition d'ellipticité uniforme :*

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \exists\, \mu \in \mathbb{R}, \quad X^i \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \mu^{-1} \sum (X^i)^2 \leqq g_{ij}(x)\, X^i X^j \leqq \mu \sum (X^i)^2 \end{cases}$$

2°

$$(1.2) \qquad g_{ij} \in C_1(\mathbb{R}^3)$$

(pour les espaces fonctionnels, les notations de [2] *sont utilisées). Alors, pour tout compact* K, *avec* ∂K *de classe* $C_{1,\alpha}$, *et pour toutes conditions de bord :*

$$f_{|\partial K} = \varphi \in C_{1,\beta}(\partial K),$$

il existe dans K *une solution unique* $C_{1,\gamma}(\bar{K})$ *(pour un certain* γ*) de l'équation* (1) *(dans un sens faible).*

Démonstration. — L'équation (1) est une équation variationnelle pour le principe variationnel :

$$(5) \qquad I(f) = \int_K (g^{ij} f_{,i} f_{,j})^{3/2} \sqrt{\det g_{ij}}\, d^3 x.$$

On vérifie aisément que la théorie de [2] s'applique à l'équation (1) si g_{ij} satisfait les conditions (1.1) et (1.2). Les théorèmes 2.1, 2.3, 3.3 et 4.1 du chapitre V de [2] montrent qu'il existe toujours une solution faible $f \in C_{0,\gamma}(\bar{K})$, pour un certain γ. Les estimations *a priori* de [3] montrent que les solutions sont en fait $C_{1,\alpha}(\bar{K})$. L'unicité découle de l'inégalité :

$$(6) \qquad (p_i - q_i)(p^i \,|\, p\,| - q^i \,|\, q\,|) > 0, \quad \text{si} \quad p_i \neq q_i$$

de laquelle découle le principe du maximum pour la comparaison de deux solutions.

THÉORÈME 2 (le problème extérieur). — *Pour toute sphère* $SF(0, R) \subset \mathbb{R}^3$, *et pour toute métrique satisfaisant* (1.1), (1.2), *asymptotiquement plate :*

$$(1.3) \qquad \begin{cases} g_{ij} = \delta_{ij} + k_{ij}/(1+r^2)^{1/2}, \\ g_{ij,k} = h_{ij}/(1+r^2), \qquad k_{ij},\ h_{ij} \text{ bornés dans } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

pour toute fonction $\varphi \in C_{1,\alpha}(SF(0, R))$, *il existe une famille à un paramètre* A *de solutions faibles* f_A, *localement* $C_{1,\gamma}$, *de l'équation* (1) *satisfaisant :*

$$(7) \qquad f_{A\,|\,S(0,R)} = \varphi,$$

avec le comportement asymptotique, pour tous les r plus grands qu'un certain $R_1 \geqq R$:

$$(8) \qquad A \ln r + C \leqq f \leqq A \ln r + C',$$

pour certains $C, C' \in \mathbb{R}$, *dépendant de la métrique, de* R *et de la fonction* φ.

Démonstration (dans la démonstration, nous poserons $A=-1$). — Il est facile de vérifier que pour tout $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$, b_1 et $b_2 \in \mathbb{R}$, pour tout γ plus grand qu'un certain γ_0 déterminé par la métrique, les fonctions :

$$f_1=-a_1 r^{\gamma}+b_1,$$
$$f_2=a_2 r^{-\gamma}+b_2,$$

sont des supersolutions (f_1) et des subsolutions (f_2) de l'équation (1). On vérifie aussi, que pour tout $0<\gamma<1$, $c_1>0$, $c_2>0$, $d_1 \in \mathbb{R}$, $d_2 \in \mathbb{R}$, et pour tout r plus grand qu'un certain R_1 déterminé par la métrique et les coefficients a_i, c_i et γ_1, les fonctions :

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} g_1=-\ln r-c_1 r^{-\gamma_1}+d_1, \\ g_2=-\ln r+c_2 r^{-\gamma_1}+d_2, \end{cases}$$

sont des supersolutions (g_1) et des subsolutions (g_2) de l'équation (1).

A l'aide des f_i et des g_i on peut construire une supersolution φ_1 et une subsolution φ_2, localement $C_{1,\alpha}$, telles que $\varphi_2<\varphi_1$, et

$$\text{(10)} \qquad \varphi_{2\,|\,S(0,R)}<\varphi<\varphi_{1\,|\,S(0,R)}.$$

On pose : $v_n=$solution de l'équation (1) sur $B(0,R+n)\setminus B(0,R)$ satisfaisant les conditions de bord :

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} v_{n\,|\,S(0,R)}=\varphi, \qquad v_{n\,|\,S(0,R+n)}=m, \\ \text{avec un } m \text{ quelconque satisfaisant :} \\ \varphi_2(r=R+n)<m<\varphi_1(r=R+n). \end{cases}$$

L'existence des v_n est garantie par le théorème 1, les inégalités (6), (10) et (11) garantissant $\varphi_1>v_n>\varphi_2$, sur les domaines de définition appropriés. Dans tout compact K les estimations *a priori* $C_{1,\gamma}$ de P. Tolksdorf [3] et le théorème d'Ascoli garantissent l'existence d'une sous-suite v_{n_i} convergeant uniformément vers une fonction $f_K \in C_1(K)$, satisfaisant l'équation (1) dans un sens faible. Une procédure de diagonalisation permet de construire une solution faible f sur $\mathbb{R}^3 \setminus S(0,R)$, satisfaisant :

$$\text{(12)} \qquad \varphi_2 \leqq f \leqq \varphi_1.$$

(9) et (12) donnent le comportement asymptotique de f, le caractère $C_{1,\alpha}$ local des solutions est garanti par (12), et les estimations *a priori* de [3].

Théorème 3 (le problème intérieur). — *Pour toute boule* $B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$, *et pour toute métrique* $C_1(B(0,R))$, *uniformément elliptique sur* $B(0,R)$, *pour toute fonction* $\varphi \in C_{1,\alpha}(S(0,R))$, *il existe une famille à un paramètre de solutions faibles* f_A *de l'équation* (1), *satisfaisant* (7), *localement* $C_{1,\alpha}$, *avec le comportement asymptotique* (*pour des points suffisamment proches de l'origine*) :

$$\text{(13)} \qquad A \ln \sigma+C \leqq f_A \leqq A \ln \sigma+C',$$

où $\sigma(x)$ *est la distance géodésique de* x *à* 0, *et les constantes* C′ *et* C *dépendent de la métrique, de* φ *et de* R.

Démonstration. — Le théorème 3 découle du théorème 2 et de l'invariance conforme de l'équation (1). En choisissant des coordonnées géodésiques autour de 0 et en effectuant une transformation conforme qui envoie l'origine à l'infini on obtient une métrique qui satisfait les hypothèses du théorème 2.

REMARQUES. — 1° Le théorème 3 raffine un résultat de J. Serrin ([4], [5]), qui prouve l'existence de solutions de l'équation (1) avec le comportement asymptotique :

$$|C \ln \sigma| \leqq |f| \leqq |C' \ln \sigma|, \qquad C \leqq C'. \tag{14}$$

2° L'existence de solutions du problème extérieur avec l'asymptotique (14) ne découle pas directement des théorèmes de J. Serrin ([4], [5]), car une transformation conforme d'une métrique asymptotiquement plate dans le sens de (1.3) ne conduit pas nécessairement à une métrique régulière à l'origine.

3° Dans les théorèmes 1 et 2 les boules et les sphères sont des boules et sphères de rayon coordonnées $R = \sum (x^i)^2$, où les x^i sont les coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^3$. Il est évident que les théorèmes 2 et 3 se généralisent à tout domaine compact (ou complément d'un compact) dans $\mathbb{R}^3$, à bord suffisamment régulier, le point où se trouve la singularité pouvant être choisi arbitrairement à l'intérieur du compact en considération (dans le cas du problème intérieur).

Discussions enrichissantes de Y. Choquet-Bruhat et J. Madejczyk, discussion intéressante et indication des références [3], [4] et [5] de L. Véron.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. KIJOWSKI, *Proceedings of Journées Relativistes* 1984, Aussoix, Mai 1984, Springer Verlag (à paraître).

[2] O. A. LADYZENSKAYA et N. N. URAL'CEVA, *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1968.

[3] P. TOLKSDORF, *J. Diff. Eqs.*, 51 (1), 1984, p. 126-150.

[4] J. SERRIN, *Acta Math.*, 111, 1964, p. 247-302.

[5] J. SERRIN, *Acta Math.*, 113, 1965, p. 219-239.

Département de Mécanique, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, pl. Jussieu, 75005 Paris;

Institute for Theoretical Physics, Polish Academy of Sciences, al. Lotnikow 32/46, 02-668 Warszawa, Pologne.