QUELQUES INEGALITES DANS LES ESPACES DE SOBOLEV A POIDS

Piotr T. CHRUSCIEL
Département de Mathématiques
U.F.R SCIENCES ET TECHNIQUES
Parc de Grandmont
37200 TOURS FRANCE

On démontre des inégalités du type Poincaré, Sobolev et autres dans des espaces de Sobolev à poids.

SOME INEQUALITIES IN WEIGHTED SOBOLEV SPACES

Some inequalities of Poincaré type, Sobolev type and others, are established in weighted Sobolev spaces.

PREPRINT, UNIVERSITÉ DE TOURS, 1987, UNPUBLISHED.

Grâce aux travaux de Cantor [1], Choquet-Bruhat et Christodoulou [2], Lockhart [3] et d'autres, les espaces de Sobolev à poids ont trouvé une place privilégiée en physique mathématique -en relativité générale,par exemple,leur utilisation a permis la démonstration de l'existence de l'infini spatial complet sous des conditions très faibles sur les données de Cauchy [4]. Lors de l'étude des propriétés des espaces de Sobolev aussi bien que lors de leur application dans des problèmes de la théorie des équations différentielles, un rôle fondamental est joué par les inégalités de Poincaré et de Sobolev. Quelques unes de ces inégalités dans des espaces à poids ont été établies par Lacaze [5], Parker [6] (appendice), Cantor [1] (théorème 5.4) et Choquet-Bruhat et Christodoulou [2] (lemme 2.4). Dans cet article nous présentons des inégalités complémentaires à celles démontrées dans les oeuvres précitées, ainsi que quelques autres inégalités. Nous nous bornerons à considérer $\mathbf{R}^n$ avec une métrique plate, les résultats présentés se généralisent sans difficulté à des variétés à topologie, structure différentiable et métrique suffisamment régulière, avec des régions asymptotiquement euclidiennes (cf. [7], [4], [6]).

Soit $\sigma(x) = \big(1+|x|^2\big)^{1/2}$, soit $W^p_{s,\delta}$ la complétion de $C^\infty_0(\mathbf{R}^n)$ dans la norme

$$||f||_{W^p_{s,\delta}} = \Big(\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbf{R}^n} \big(|D^\alpha f|\sigma(x)^{\delta+|\alpha|}\big)^p\ d^nx\Big)^{1/p}.$$

Nous utiliserons aussi la notation

$$||f||_{L^p_\delta} = ||f||_{W^p_{0,\delta}}\ ,\quad ||D^k f||_{L^p_\delta} = \Big(\sum_{|\alpha|=k} ||D^\alpha f||^p_{L^p_\delta}\Big)^{1/p}.$$

$S(r)$ et $B(r)$ dénotent, respectivement, une sphère et une boule de rayon r, ω_n dénote la "surface" de la sphère $S(1)$ de dimension $n-1$, (r, x^A) dénotent les coordonnées sphériques de $\mathbf{R}^n$. $B(x_0, r)$ dénote une boule de rayon r centrée en x_0.

L'espace $C^s_\delta(\mathbf{R}^n)$ est défini comme l'espace de fonctions s fois différentiables telles que la norme

$$||f||_{C^s_\delta} = \sup_{x\in\mathbf{R}^n}\ \sum_{|\alpha|\le s} |D^\alpha f|(x)\ \ \sigma^{\delta+|\alpha|}(x)$$

est finie. Finalement, pour $0<\beta\le 1$, on définit

$$||f||_{C^{s,\beta}_\delta} = ||f||_{C^s_\delta} + \sup_{|x-y|\le 1, x\ne y}\ \sum_{|\alpha|=s} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\beta}\ \ \sigma^{s+\beta+\delta}$$

Dans toutes les démonstrations et toutes les propositions nous supposerons $f\in C^\infty_0(\mathbf{R}^n)$, on trouve facilement le domaine de validité des inégalités présentées par un argument de densité. Nous poserons toujours $p^* = np/(n-p)$.

Nous commencerons notre étude par quelques inégalités dans des espaces L^p avec un poids radial arbitraire, a étant une fonction mesurable positive.

LEMME 1. - Supposons $\forall r : \int_0^r a(s)\ s^{n-1}ds < \infty$, soit $a(x) = a(|x|)$.

a) Soit $b(s) = s^{1-n}\int_0^s a(r)r^{n-1}dr/a(s),\quad b(x) = b(|x|)$.

Pour $p>1$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f|^p a \le\ p^p \int_{\mathbf{R}^n} (b|\nabla f|)^p a \tag{1}$$

b) Supposons $p>1, \int_{r_0}^\infty\ a(r)r^{n-1}\ dr < \infty$, soit $c(r) = r^{1-n}\int_r^\infty\ a(s)s^{n-1}\ ds/a(r)$,

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus B(r_0)} |f|^p a \le\ p\ a(r_0)c(r_0)\int_{S(r_0)} |f|^p + p^p\int_{\mathbf{R}^n\setminus B(r_0)} (c|\nabla f|)^p a \tag{2}$$

c) Soit $a > 0$, soit $\rho(r) = (n \int_0^r = a(s)s^{n-1}ds)^{1/n}$, soit $\psi(r) = \max(r/\rho(r), \rho^{n-1}(r)r^{1-n}/a(r))$. Pour $1 \leq p < n (p^* = np/(n-p))$

$$\left(\int |f|^{p^*} a\right)^{1/p^*} \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)\sqrt{n}} \left(\int (\psi|\nabla f|)^p a\right)^{1/p} \tag{3}$$

d) Soit $a > 0$, supposons $\forall r \int_0^r a(1/s)s^{-n-1}$ ds $< \infty$, soit $d(r) = (n \int_0^{1/r} a(1/s)s^{-n-1}ds)^{1/n}, \chi(r) = \max(r/d(r), d^{n-1}(r)r^{1-n}/a(r))$.

Pour $f = 0$ dans un voisinage de l'origine on a

$$\left(\int |f|^{p*} a\right)^{1/p^*} \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)\sqrt{n}} \left(\int \chi^p |\nabla f|^p a\right)^{1/p}, \tag{4}$$

pour $1 \leq p < n$.

<u>Démonstration</u>. (1) découle de l'inégalité, obtenue par l'inégalité de Yang

$$|f(r, x^A)|^p \leq p \int_r^\infty |f(s, x^A)|^{p-1} |\nabla f|(s, x^A) ds \leq \int_r^\infty (bp)^{p-1} |\nabla f|^p \, ds + \frac{(p-1)}{p} \int_r^\infty |f|^p/b ds \tag{5}$$

Intégrant (5) sur $\mathbf{R}^n$, interchangeant l'ordre d'intégration de s et de r on obtient (1). (2) est obtenu par des manipulations semblables en partant de l'inégalité

$$|f(r, x^A)|^p \leq |f(r_0, x^A)|^p + p \int_{r_0}^r |f(s, x^A)|^{p-1} |\nabla f|(s, x^A) ds. \tag{6}$$

(3) est obtenu en faisant un changement de variables $(r, x^A) \to (\rho, x^A)$ et en utilisant l'inégalité de Sobolev classique, finalement (4) est obtenu par changement de variables $(r, x^A) \to (1/r, x^A)$ et (3).

Par calculs directs, dont nous ne présentons les résultats que pour pouvoir dépister les différentes constantes, on obtient

LEMME 2. -
a) $a = \sigma^\beta, \beta > -n, b(r) \leq C_1(n, \beta) r \quad , C_1(n, \beta) = \max(1/n, 1/(n + \beta))$,
$\{nC_2(n, \beta)\sigma^\beta\}^{1/n} r \leq \rho \leq \{nC_1(n, \beta)\sigma^\beta\}^{1/n} r \quad , C_2(n, \beta) = \min(1/n, 1/(n + \beta))$,
$\psi \leq C_3(n, \beta)\sigma^{-\beta/n}, C_3 = \{\max((1 + \beta/n)^{1-n}, 1 + \beta/n)\}^{1/n}$.

b) $a = \sigma^{-n}, b \leq (1 + n \log \ \sigma) r \ \sigma^{-n}/n$,
$(2e/(2e + n))^{1/n}(1 + n \log \ \sigma)^{1/n} r \sigma^{-1} \leq \rho \leq (1 + n \log \ \sigma)^{1/n} r \ \sigma^{-1}$,
$e-$ la constante d'Euler, log - Le logarithme naturel,
$\psi \leq \{(2e + n)/2e\}^{1/n} \ \times (1 + n \log \ \sigma)^{1-1/n} \ \sigma$.

c) $a = \sigma^\beta, \beta < -n, c(s) \leq C_4(n, \beta) s^{1-n} \ \sigma^n(s)$,
$C_4(n, \beta) \leq 2^{-(\beta+n)/2} \max(\int_0^\infty r^{n-1}\sigma^{+\beta}(r) \ dr \ , \ -1/(n + \beta))$.

Les lemmes 1 et 2 impliquent (les C_i étant les constantes du lemme 2).

Proposition 1. -
a) Pour $p > 1, \alpha p > -n$

$$||f||_{L^p_\alpha} \leq p \ C_1(n, \alpha p) \ ||r|\nabla f| \ ||_{L^p_\alpha} \tag{7}$$

b) Pour $p > 1$

$$||f||_{L^p_{-n/p}} \leq (p/n)||r|\nabla f|(1+n\log\ \sigma)||_{L^p_{-n/p}} \tag{8}$$

c) Pour $p>1, \alpha p<-n, r_0>0$,

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus B(r_0)} (r^\alpha |f|)^p \leq p r_0^{\alpha p+1}/(-\alpha p-n)\ \int_{S(r_0)} |f|^p +$$

$$+(p/(-\alpha p-n))^p \int_{\mathbf{R}^n\setminus B(r_0)} (r^{\alpha+1}\ |\nabla f|)^p \tag{9}$$

d) Pour $1\leq p<n, \alpha p^*\ >-n$,

$$||f||_{L^{p^*}_\alpha} \leq \frac{(n-1)p}{(n-1)\sqrt{n}} C_3(n,\alpha p^*)||\nabla f||_{L^p_\alpha} \tag{10}$$

e) Pour $1<p<n$

$$||f||_{L^{p^*}_{-n/p^*}} \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)\sqrt{n}}\ (\frac{n(2e+n)}{2e})^{1/n}||\ |\nabla f|\ (1+n\log\ \sigma)^{1-1/n}||_{L^p_{-n/p^*}} \tag{11}$$

f) Pour $1\leq p<n$, $\alpha p^*\ <\ -n$ et pour $f=0$ dans un voisinage de l'origine

$$||fr^\alpha||_{L^{p^*}} \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)\sqrt{n}}\ C_5(n,\ \alpha=p^*)||r^\alpha\ |\nabla f|\ ||_{L^p}\ , \tag{12}$$

avec $C_5(n,\beta)=\max\ \left((\frac{-\beta-n}{n})^{1/n}\ ,\ (\frac{n}{-\beta-n})^{1-1/n}\right)$.

L'inégalité (7) a déjà été prouvée par Lacaze [5] et par Parker [6] dans un contexte plus général, nous la présentons ici car nos constantes sont meilleures que celles de Lacaze pour certaines valeurs de α et de p. Les inégalités b) et c) cessent d'être vraies sans les logarithmes, ce qu'on démontre aisément en considérant la famille de fonctions $\varphi_R(x)=\varphi(|x|/R)$, $\varphi(s)=1$ pour $s\leq 1$, $\varphi(s)=0$ pour $s\geq 2$, $|\varphi'|\leq C$, $0\leq\ \varphi\leq 1$. Des inégalités de type de Sobolev pour $p>n$ ont été démontrées par Cantor [1] (cf. aussi [2]). Les inégalités b) et c) montrent que la considération des espaces $W^p_{s,\delta}$ conduit naturellement à considérer l'espace $W^p_{s,\delta,q}$ défini comme la complétion de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dans la norme

$$||f||_{W^p_{s,\delta,q}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq\ s}\int_{\mathbf{R}^n}\ \{|D^\alpha f|\sigma^{\delta+|\alpha|}(1+n\log\ \sigma)^q\}^p\right)^{1/p}\ ,$$

si $\delta\neq\ -n-k$, pour un certain $k\in\mathbf{N}, 0\leq k<s$, et si $\delta=-n+k$

$$||f||^p_{\widetilde{W}_{s,\delta,q}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq\ k}\int_{\mathbf{R}^n}\ \{|D^\alpha f|\sigma^{\delta+|\alpha|}\ (1+n\log\ \sigma)^q\}^p\right.$$

$$\left.+\ \sum_{k<|\alpha|\leq\ s}\int_{\mathbf{R}^n}\{|D^\alpha f|\sigma^{\delta+|\alpha|}(1+n\log\ \sigma)^{q+1}\}^p\right)^{1/p}$$

(cf. Proposition 2 pour la motivation de telles définitions).

Dans ce qui suit nous dénoterons par τ la fonction $\tau=1+n\log\ \sigma$. Des calculs élémentaires conduisent à (les fonctions a,b, et c étant les fonctions définies dans le lemme 1) :

LEMME 3. -

a) $a=\tau^q\sigma^\beta$, $\beta+n>0$, $\beta+n+qn>0$,
$b\leq C_6(n,q,\beta)r$, $C_6(n,\beta,q)=\max(1/n,1/(n+\beta),1/(\beta+n+qn))$,

$(nC_7\tau^q\sigma^\beta)^{1/n}\ r\ \le\ \rho\ \le\ (nC_6\ \tau^q\sigma^\beta)^{1/n}\ r,$
$C_7(n,\beta,q) = \min(1/n, 1/(n+\beta)\ ,\ 1/(\beta+n+qn)),$
$\psi \le C_8\ \tau^{-q/n}\ \sigma^{-\beta/n}\ ,\ C_8 = \max((nC_7)^{-1/n}, (nC_6)^{1-1/n)}.$

b) $a = \tau^q\sigma^{-n}\ ,\ q+1>0, b \le C_9(n,q)\tau r/n, C_9(n,q) \le \max(1, 1/(q+1))\ ,$
$(C_{10}\ \tau^{q+1})^{1/n}\ r\sigma^{-1} \le \rho \le (C_9\ \tau^{q+1})^{1/n}\ r\sigma^{-1}\ ,$
$C_{10}(n,q) \ge \min(1, 2e^{1+2q/n}/(2(1+q)e^{1+2q/n}+n)),$
$\psi \le C_{11}(n,q)\tau^{1-(1+q)/n}\ \sigma, C_{11} \le\ \max(C_{10}^{-1/n}, C_9^{1-1/n}).$

Les lemmes 1 et 3 donnent, les C_i étant les constantes du lemme 3 :

Proposition 2. -
a) Pour $p>1, \alpha p+n>0, p(\alpha+nq)+n>0,$

$$||f\ \tau^q||_{L^p_\alpha} \le pC_6(n,pq,p\alpha)\ ||r\ |\nabla f|\tau^q||_{L^p_\alpha}, \tag{13}$$

b) Pour $p>1, pq+1>0,$

$$||f\ \tau^q||_{L^p_{-n/p}} \le \frac{pC_9(n,pq)}{n}\ ||r\ |\nabla f|\tau^{q+1}||_{L^p_{-n/p}}, \tag{14}$$

c) Pour $1 \le p < n, \alpha p^*+n>0, p^*(\alpha+nq)+n>0,$

$$||f\ \tau^q||_{L^{p^*}_\alpha} \le \frac{(n-1)p}{(n-p)\sqrt{n}}C_8(n,\alpha p^*, qp^*)||\ |\nabla f|\tau^q||_{L^p_\alpha} \tag{15}$$

d) Pour $1 \le p < n, q+1>0$

$$||f\ \tau^q||_{L^{p^*}_{-n/p^*}} \le \frac{(n-1)p}{(n-p)\sqrt{n}}C_{11}(n,\alpha p^*)||\ |\nabla f|\tau^{q+1-1/n}||_{L^p_{-n/p^*}} \tag{16}$$

Il est clair que les espaces $W^p_{s,\delta,q}$ et $\widetilde{W}^p_{s,\delta,q}$ sont inclus dans l'ensemble de fonctions pour lesquelles les inégalités de la proposition 2 sont vérifiées.

THEOREME 1. - Soit $\tau(x) = 1 + n\log\ \sigma(x)$.
a) Pour $p>1, k\ \in \mathbf{N}, \alpha p > -n$

$$||f||_{L^p_\alpha} \le C(n,p,k,\alpha)||\nabla^k f||_{L^p_{\alpha+k}} \tag{17}$$

b) Pour $p>1, k\ \in\ \mathbf{N},$

$$||f||_{L^p_{-n/p}} \le C(n,p,k)||\ |\nabla^k f|\ \tau||_{L^p_{-n/p+k}} \tag{18}$$

c) Pour $p>1, k\ \in\ \mathbf{N}, \alpha p < -n$, pour $r_0>0$ et s'il n'existe pas de $s\ \in\ \mathbf{N}, 1 \le s\ < k$, tel que $(\alpha+s)p = -n$, alors

$$||f||_{L^p} \le C(n,p,k,\alpha,r_0)(||f||_{L^p(B(r_0))} + ||\nabla^k f||_{L^p_{\alpha+k}}), \tag{19}$$

alors que si $\alpha = -s - n/p$, pour $s\ \in \mathbf{N}, 1 \le s < k,$

$$||f||_{L^p_\alpha} \le C(n,p,k,\alpha,r_0)(||f||_{L^p(B(r_0))} + ||\ |\nabla^k f|\ \tau||_{L^p_{\alpha+k}}) \tag{20}$$

d) Pour $1 \leq p < n/k, k \in \mathbf{N}, \alpha q > -n$, avec $q = np/(n-kp)$

$$||f||_{L^q_\alpha} \leq C(n,p,k,\alpha)||\nabla^k f||_{L^p_\alpha} \tag{21}$$

e) Pour $1 \leq p < n/k, k \in \mathbf{N}$, avec $q = np/(n-kp)$

$$||f||_{L^q_{-n/q}} \leq C(n,p,k)||\ |\nabla^k f|\ \tau^{1-1/n}||_{L^p_{-n/q}} \tag{22}$$

f) Pour $1 \leq p < n/k, k \in \mathbf{N}, q\alpha < -n$, avec $q = np/(n-kp), r_0 > 0$, et s'il n'existe pas de $s \in \mathbf{N}, 1 < s < k$, tel que $\alpha = k - s - n/p$, alors

$$||f||_{L^q_\alpha} \leq C(n,p,k,\alpha,r_0)(||f||_{L^p(B(r_0))} + ||\nabla^k f||_{L^p_\alpha}) \tag{23}$$

alors que si $\alpha = k - s - n/p, 1 \leq s < k, s \in \mathbf{N}$,

$$||f||_{L^q_\alpha} \leq C(n,p,k,\alpha,r_0)(||f||_{L^p(B(r_0))} + ||\ |\nabla^k f|\ \tau^{1-1/n}||_{L^p_\alpha}) \tag{24}$$

Démonstration.

a) s'obtient par itération de (7), b) par itération de (13) et de (8). c) et f) sont une conséquence des propositions 1 et 2 et des inégalités de trace ou d'interpolation. Finalement d) s'obtient par simple itération de (10), alors que e) s'obtient de (11) par emploi répété de (15).

Proposition 3. -

a) Pour $p > 1, k \in \mathbf{N}, \alpha p > -n, n(1+pq) + \alpha p > 0$,

$$||f\tau^q||_{L^p_\alpha} \leq C(n,p,k,\alpha,q)||\ |\nabla^k f|\ \tau^q||_{L^p_{\alpha+k}} \tag{25}$$

b) Pour $1 \leq p < n/k,\ k \in \mathbf{N}$, avec $q = np/(n-kp)$, l'inégalité

$$||f\tau^t||_{L^q_\alpha} \leq C(n,p,k,\alpha,t)||\ |\nabla^k f|\ \tau^{t'}||_{L^p_\alpha} \tag{26}$$

est toujours satisfaite si

i) $\alpha\ q > -n$, alors $t' = t$.
ii) $\alpha\ q = -n, t+1 > 0$, alors $t' = t + 1 - 1/n$.
iii) $\alpha\ q < -n$ et $f = 0$ dans $B(1)$ et il n'existe pas d'entier $s < k$ tel que $(\alpha + s)q = -n$, alors $t' = t$.
iv) $\alpha\ q < -n$ et $f = 0$ dans $B(1)$ et $(\alpha+s)q = -n$, pour $s \in \mathbf{N}, s < k$, et $t+1 > 0$ alors $t' = t+1-1/n$.

c) Pour $p > 1$ et $k > n/p, k \in \mathbf{N}, q > t + 1 - 1/p$

$$|f(x)| \leq C(n,p,k,\alpha,t,q)\sigma(x)^{-\alpha}\tau(x)^{-t}||f\ \tau^q||_{W^p_{k,\alpha-n/p}} \tag{27}$$

d) Pour $p > n$, pour tout x et pour y tels que $|x-y| \leq |x|/2$

$$|f(x) - f(y)| < C(n,p,\beta,t)\sigma^{-\beta}(x)\ \tau(x)^{-t}||\ |\nabla f|\ \tau^t||_{L^p_\beta}|x-y|^\alpha, \tag{28}$$

avec $\alpha = 1 - n/p$.

Démonstration.

(25) et (26) s'obtiennent par un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 1. (27) est obtenu par un calcul analogue à celui de la démonstration de la proposition 5.3 de [1] . (28) découle de l'inégalité

$$\forall\ R \leq |x|/2 \int_{B(x,R)} |\nabla f| \leq C\ \sigma^{-\beta}(x)\ \tau(x)^{-t}\ ||\ |\nabla f|\ \tau^t||_{L^p_\beta} R^\alpha$$

et du lemme de Morrey (cf. th. 7.19 de [8]).

Dans le problème de régularité des solutions faibles les espaces $C_\delta^{s,\alpha}$ sont forts utiles, permettant d'obtenir des estimations a priori du type de Schauder (cf. [7]). Nous avons le résultat suivant :

THEOREME 2. - Pour $p > 1, s > n/p, s \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, k < k_0$ et $\alpha \in (0,1]$, avec $k_0 =$ entier $[s - n/p]$, ou $k = k_0$ et $\alpha \in (0, \alpha_0]$, avec$= \alpha_0 = s - k_0 - n/p$, les inclusions suivantes sont continues :

a) Pour $\delta > \beta - n/p$

$$W_{s,\delta}^p \subset C_\beta^{k,\alpha} \tag{29}$$

b) Pour $\delta > \beta - n/p$ et tout $q \in \mathbf{R}$ ou pour $\delta = \beta - n/p$ et $q > 1 - 1/p$

$$W_{s,\delta,q}^p \subset C_\beta^{k,\alpha}, \quad \widetilde{W}_{s,\delta,q}^p \subset C_\beta^{k,\alpha} \tag{30}$$

<u>Démonstration</u>. Il suffit de démontrer l'estimation des quotients de Hölder pour les dérivées k_o-ièmes (cf.[1]) et ceci pour des fonctions s'annulant dans la boule unité $-(29)$ découle alors de (28) et de $(21), (22), (23)$ ou (24). (30) pour $\delta > \beta - n/p$ découle de (29), et si $\delta = \beta - n/p$ (30) découle de $(26), (27)$ et de (28).

Notons encore une inégalité particulièrement élégante lorsque $p = n$:

Proposition 4 - Supposons $\int f \sigma^{-2n} = 0$. Pour $p > 1$

$$||f||_{L^p_{-2n/p}} \leq C(n,p) \, ||\nabla f||_{L^p_{2(p-n)/p}}. \tag{31}$$

<u>Démonstration</u>. Par projection stéréographique $\varphi : S^n \to \mathbf{R}^n$ on a $\int_{\mathbf{R}^n} |f|^p \sigma^{-2n} = \int_{S^n} |f \circ \varphi|^p \, d\mu$, où $d\mu$ est la mesure riemanienne sur la sphère de rayon 1/2. La proposition 4 découle alors de l'inégalité

$$\int_{S^n} |g|^p \, d\mu \leq C(n,p) \int_{S^n} |\nabla g|^p \, d\mu,$$

qui est vraie si $\int_{S^n} g d\mu = 0$, ce qu'on démontre d'une façon analogue à la démonstration du théorème 3.6.5 de [9].

Remarque. - Si $p = 2$ la meilleure constante possible est égale à $\sqrt{2}n (= \sqrt{\lambda_1}, \lambda_1$-première valeur propre non-nulle du laplacien sur la sphère de rayon 1/2). La condition $\int f\sigma^{-2n} = 0$ peut être remplacée par un grand nombre de conditions alternatives.

L'auteur tient à remercier L. VERON pour plusieurs discussions intéressantes.

Références bibliographiques :

[1] M. CANTOR, Bull. Am. Math. Soc. 5, 1981, p. 235.

[2] Y. CHOQUET-BRUHAT, D. CHRISTODOULOU, Acta Math. 146, 1981, p. 129.

[3] R.B. LOCKHART, Duke Math. Jour. 48, 1981, p. 289.

[4] D. CHRISTODOULOU, N. O'MURCHADHA, Comm. Math. Phys. 80, 1981, p. 271.

[5] J. LACAZE, C. Rendus. Acad. Sci. de Paris, série I, 1984, p. 411.

[6] T.H. PARKER, Comm. Math. Phys. 100, 1985, p. 471.

[7] A. CHALJUB-SIMON, Y. CHOQUET-BRUHAT, Ann. Fac. Sci. Toulouse 1, 1979, p. 9.

[8] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer Verlag, Berlin 1977.

[9] C.B. MORREY Jr, "Multiple Integrals in the Calculus of Variations", Springer Verlag, Berlin 1966.

Adresse permanente : Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Sniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Pologne.