Übungen zu "Höhere Analysis und elementare Differentialgeometrie

K. Gröchenig

Wintersemester 2014/15

(nach Zusammenstellungen von G. Hörmann, F. Haslinger)

Wiederholung: lokale Extrema mit Nebenbedingungen

Einige Wiederholungsbeispiele für die erste Woche (bis 3. Okt)

1 Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) := x^2y$ jeweils lokale und globale Maxima und Minima auf
(a) der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$
(b) dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$
(c) der abgeschlossenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$.

2 Bestimmen Sie im $\mathbb{R}^3$ die Punkte mit minimalem bzw. maximalem Abstand vom Ursprung auf dem Schnitt des Ellipsoides $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 0$. (Dadurch erhalten Sie die Neben- und Hauptscheitel der Schnittellipse.)

3 Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) := \|A \cdot z\|^2$, wobei $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Maximum und Minimum von f auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Erklären Sie die Bedeutung der berechneten Maxima und Minima.

4 (a) Es sei B eine symmetrische (reelle) $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass das Maximum und Minimum der zugeordneten quadratischen Form $q(z) := \langle z|Bz\rangle$, $q\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, auf der S^{d-1} durch den größten bzw. kleinsten Eigenwert von B gegeben ist.

(b) Schließen Sie aus (a), wie Sie die Operatornorm für eine beliebige (lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit zugehöriger) $n \times n$-Matrix A (bzgl. der Standardbasen) durch Rückführung auf Eigenwerte einer geeignet gewählten Matrix bestimmen können.
Hinweis: $\|Az\|^2 = \langle z|A^*Az\rangle$.)

Zu §20: Implizite Funktionen und Umkehrsatz

Für die Woche vom 6. - 10. Oktober.

5 („implizit versus explizit“) Es sei $f(x,y) := x^2 + y^2$, sodass also die Niveaumenge $N_f(1) = f^{-1}(\{1\})$ für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zum Wert 1 den Einheitskreis beschreibt.
In welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ kann jeweils eine Variable als differenzierbare Funktion der anderen ausgedrückt werden? Was gibt Ihnen dabei der Satz über implizite Funktionen in die Hand und was sehen Sie in diesem konkreten Beispiel selbst (direkt) besser? Vergleichen Sie aber auch die implizite Berechnung der Ableitungen mit jener aus der expliziten Auflösung nach einer Variable.

6 Die Gleichung $z^3 + z + x + y = 1$ hat für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x,y)$. Man zeige, daß $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne $\nabla g(1,1)$. Man untersuche g auf Extrema.

7 Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) := xz + \sin(xy) + \cos(xz) - 1$ mit Nullstellenmenge $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$. Welche Variablen können in einer Umgebung von $(0,1,1)$ jeweils innerhalb N als Funktion der beiden anderen ausgedrückt werden? Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der sich ergebenden Funktionen.

8 Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x y + \sin(xz) + \log(1+z) - 2 \\ \sin(x^2 y) + y^2 + z^5 - 4 \end{pmatrix}.$$

Welche zwei Variablen lassen sich aus dem Gleichungssystem $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(0,2,0)$ durch die jeweils dritte ausdrücken? Berechnen Sie die Differentiale der sich dabei ergebenden Funktionen an der $(0,2,0)$ entsprechenden Stelle.

9 (*Kugelkoordinaten im* $\mathbb{R}^3$
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(r,\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus?

(b) Nun sei $U :=]0,\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[\subseteq \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Bildmenge $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$, indem Sie für einen Punkt $(x,y,z) = f(r,\varphi,\theta)$ die Größen r, φ und θ geeignet als Radius, Winkel der Projektion auf die Ebene $z = 0$ und Winkel mit der z-Achse interpretieren (Skizze!).

(c) Wir setzen $g := f\,|_U\colon U \to V$. Zeigen Sie, dass g bijektiv ist.
Zusatzfrage: Ist g ein Diffeomorphismus?

Zu §21: Wege und Kurven

10 Berechnen Sie jeweils die Bogenlänge der angegebenen Wege:

(a) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die *Schraubenlinie* $\gamma(t) := (r\cos(t), r\sin(t), c\,t)$ mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $c > 0$

(b) $\gamma\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$ die *Zykloide* $\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ (Weg eines Punktes an der Peripherie eines Einheitskreises, der eben und ohne Gleiten abrollt).

11 *(Polarkoordinatendarstellung ebener Wege)* Es sei $\alpha > 0$ und $r\colon [0,\alpha] \to [0,\infty[$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: durch $\gamma(t) := r(t)\cdot(\cos(t),\sin(t))$ wird ein stetig differenzierbarer Weg definiert; der Weg γ ist genau dann regulär, wenn $r'(t)^2 + r(t)^2 > 0$ ist für alle $t \in [0,\alpha]$.
Die Bogenlänge ist gegeben durch $L(\gamma) = \int_0^\alpha \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\,dt$.

12 Wenden Sie Aufgabe 11 (mit Notation wie ebendort) an, um in folgenden Beispielen jeweils den Bogenlängenparameter sowie die Gesamtbogenlänge zu berechnen:

(a) die *Kardioide* (Herzkurve) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch die Radiusfunktion $r(t) := 1 + \cos(t)$.

(b) die *Archimedische Spirale* mit beliebigem Winkelbereich $[0,\alpha]$ und Radius $r(t) := b \cdot t$, wobei $b > 0$ konstant ist.

13 Man berechne die Bogenlänge der Kurve $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t^3), t \in [0, 2\pi]$.

Zu §22: Vektorfelder, 1-Formen und Kurvenintegrale

14 Gegeben sei die 1-Form $\omega(x,y) := -y\,dx + x\,dy$ auf $\mathbb{R}^2$ und $0 < \alpha < \pi/2$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von ω über C, wobei C wie folgt definiert ist:

(a) $\gamma(t) := e^t(\cos(t),\sin(t))$ (für $t \in [0,\alpha]$)

(b) Zusammensetzung der Strecken von $(1,0)$ nach $(0,0)$ und von $(0,0)$ nach $e^\alpha(\cos(\alpha),\sin(\alpha))$.

15 Es seien $r > 0$, $d > 0$, dann definiert $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (r\cos(t), r\sin(t), d\,t)$ die Schraubenlinie C mit Radius r und Ganghöhe d. Berechnen Sie das Kurvenintegral der 1-Form $\omega(x,y,z) := (x-y)\,dx + z\,dy + xy\,dz$ über C.

16 Man berechne die folgenden Kurvenintegrale: $\int_\gamma \omega$.
(a) $\omega = ydx + xdy$, $\gamma(t) = (t, t^2)$ für $0 \le t \le 1$.
(b) $\omega = x^2dx + y^2dy$, $\gamma(t) = (2t, 4t)$ für $0 \le t \le 1$.
(c) $\omega = e^x yzdx + \sin(x+y)dy + (x + zy^2)dz$, wobei γ die stückweise lineare Kurve im $\mathbb{R}^3$ ist, die die Punkte $(1,0,1)$, $(1,2,3)$ und $(3,-1,0)$ in dieser Reihenfolge verbindet.

17 Es sei $\omega = \sum_{j=1}^{n} v_j\, dx_j$ eine stetige 1-Form auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $v := (v_1, \ldots, v_n)$ das zugehörige Vektorfeld und $\gamma\colon [a,b] \to U$ ein $\mathcal{C}^1$-Weg in U. Zeigen Sie, dass die folgende *Abschätzung für Kurvenintegrale* gilt:

$$\Big|\int_\gamma \omega\,\Big| = \Big|\int_\gamma \langle v|dx\rangle\,\Big| \le L(\gamma)\ \|v\|_{\gamma,\infty},$$

wobei $L(\gamma)$ die Weglänge von γ bezeichnet und $\|v\|_{\gamma,\infty} = \sup\{\|v(\gamma(t))\| : t \in [a,b]\}$ das Maximum der euklidischen Norm von v entlang γ.

18 Es sei $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $v(x) := -\dfrac{x}{\|x\|^3}$ mit zugeordneter 1-Form $\omega := \langle v|dx\rangle = \sum v_j dx_j$. Zeigen Sie, dass $F(x) := 1/\|x\|$ eine Stammfunktion für ω auf U definiert und berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ entlang des Weges $\gamma(t) := \big(\tanh(t\log(3/2)), t^{7/6}, \cos(\pi\, t)\big)$ $(t \in [0,1])$.

19 Betrachten Sie das Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^3$, wobei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ und $v(x,y,z) := (x^2y, ze^x, xy\log z)$.

(a) Ist v ein Gradientenfeld auf U?

(b) Sei ω die v zugeordnete 1-Form auf U. Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\displaystyle\int_C \omega$, wobei C durch $\gamma(t) = (t, t^2, 1)$ $(0 \le t \le 1)$ dargestellt ist?

20 Besitzen die folgenden 1-Formen eine Stammfunktion? Wenn ja, geben Sie eine an.

(a)	$\omega(x,y) = (x^2+2y)dx + (2x-y^3)dy$	auf $\mathbb{R}^2$
(b)	$\nu(x,y) = x\log y\ dx + y\log x\ dy$	auf $]0,\infty[^2$
(c)	$\mu(x,y,z) = (x+z)dx - (y+z)dy + (x-y)dz$	auf $\mathbb{R}^3$
(d)	$\alpha(x,y,z) = (x+2z)dx - (y+z)dy + 2(x-y)dz$	auf $\mathbb{R}^3$

Zu §23: Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$

21 Stellen Sie den Torus (vgl. VO, Beisp. 23.3, 2.)) als Niveaumenge zu einem regulären Wert einer stetig differenzierbaren Funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dar. Schließen Sie daraus abermals, dass es sich um eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ handelt. Geben Sie eine Formel für einen Normalvektor an den Torus in einem beliebigen Punkt desselben an.

Aufgaben 22-23 *Rotationsflächen im* $\mathbb{R}^3$*:* Verwenden Sie in dieser Aufgabe die Bezeichnungen und Resultate aus Beisp.23.3 der VO.

22 Es sei Z der (Mantel des) Kreiszylinder(s) mit Radius $r > 0$ um die z-Achse. Zeigen Sie, dass Z eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, indem Sie Z als Rotationsfläche definieren. Schreiben Sie Z auch als Nullstellenmenge einer geeigneten $\mathcal{C}^1$-Funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Gradient auf Z nicht verschwindet.

23 Es sei $\alpha\colon]0,3[\to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) := (2 + \sin(\frac{3\pi}{4-t}), t)$, die als Kurve in der x-z-Ebene aufgefasst wird. M sei die durch Rotation um die z-Achse daraus entstehende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, d.h. mit $F\colon]0,3[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(t,s) := (\alpha_1(t)\cos(s), \alpha_1(t)\sin(s), \alpha_2(t))$ ist $M = F\big(]0,3[\times\mathbb{R}\big)$.

Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermanngifaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie eine Basis der Tangentialebene $T_a(M)$ im Punkt $a := F(t_0, s_0) \in M$ an. Schreiben Sie M auch als Nullstellenmenge einer geeigneten $\mathcal{C}^1$-Funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Gradient auf M nicht verschwindet und geben Sie einen Normalvektor an M in einem Punkt $(x,y,z) \in M$ an.

24 Klären Sie (an Hand von Def. 23.2 oder Thm. 23.4 aus der VO) für folgende Spezialfälle von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, ob es sich um Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$ handelt und welche Dimension diese haben:

(a) X eine offene Teilmenge

(b) W ein Untervektorraum der Dimension k.

25 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $M := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Graph von f. Ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$? Welcher Dimension? Können Sie im Punkt $a := (x, f(x))$ eine Basis des Tangentialraumes $T_a(M)$ und des Normalraumes $N_a(M)$ angeben?

Zusatzbeispiel zu §23:

⋆ **Zusatzaufgabe** *(freiwillig)* (Weltkarte nach Gerhard Mercator 1569)
Es sei $T := \mathbb{R}\times]0, 2\pi[\subseteq \mathbb{R}^2$. Die *Mercator-Projektion* $\mu\colon T \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\mu(s,\varphi) := \frac{1}{\cosh(s)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \sinh(s) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine lokale Parametrisierung der S^2 handelt. Welches Stück von S^2 wird durch $\mu(T)$ beschrieben?
Der Winkel φ entspricht der geographischen Länge. Wie ist der Zusammenhang zwischen dem Parameter s und der geographischen Breite?

Zu §24: Iterierte Integrale

26 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y^2)\, d(x,y)$ (b) $\displaystyle\int_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y)^2}\, d(x,y)$

27 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{[1,4]\times[-1,1]} \sin(xy)e^{-x^2}\, d(x,y)$

(b) $\displaystyle\int_{[-1,1]^3} (x^2+y^2+z^2)\sin(xy^3)e^{x+z}\, d(x,y,z)$

28 Berechnen Sie $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y}\, d(x,y)$ und diskutieren Sie, in welchem Sinn das iterierte Integral definiert ist.

29 Für $y > 0$ sei $g(y) := \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y}$.
(a) Finden Sie einen expliziten Ausdruck für $g(y)$ und $g'(y)$.
(b) Fassen Sie andererseits $g(y)$ als Parameterintegral auf und zeigen Sie, dass g stetig differenzierbar ist. Wie lautet die Ableitung $g'(y)$ als Parameterintegral?
(c) Kombinieren Sie (a) und (b), um das Doppelintegral

$$\int_{[0,1]\times[1,3]} \frac{1}{(x^2+y)^3}\, d(x,y)$$

zu berechnen.

30 Es sei $f(x,y,z) := (x-y^2)e^z$, wobei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie $I := \int\limits_{[0,1]^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

(b) Seien a, b und c positive reelle Zahlen und $Q := [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$. Berechnen Sie $\int\limits_Q f(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c})\, d(x,y,z)$ und vergleichen Sie den Wert mit I.

(c) Ist die Beobachtung in (b) verallgemeinerbar auf beliebige stetige Funtionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$?

31 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := \sqrt{1 - \|x\|^2}$, falls $\|x\| \leq 1$, und 0 sonst. Begründen Sie, warum $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ gilt und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx$. Geben Sie eine (informelle) geometrische Interpretation.

32 Konstruieren Sie explizit Ihr eigenes Beispiel einer stetigen Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingungen erfüllt:
(i) $\operatorname{supp}(g) \subseteq \overline{B_1(0)}$ (insbesondere gilt also $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$)
(ii) $\forall z \in \mathbb{R}^2$: $0 \leq g(z) \leq 1$
(iii) $g(z) = 1$ für $\|z\| \leq 1/2$.

Skizzieren Sie die Funktion g und berechnen Sie $\int\limits_{\mathbb{R}^2} g(z)\, dz$.

33 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi(x) = 1$ für $x \in K$ (Warum können wir annehmen, dass es so eine Funktion φ gibt? [Hinweis bei Argumentationsnotstand: sperren Sie K in eine Kugel und verwenden Sie dann eine Variante „Ihrer“ Funktion aus Aufgabe 32]). Zeigen Sie: für jede Funktion $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$ gilt

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx \right| \leq C \cdot \|f\|_\infty,$$

wobei die Konstante $C \geq 0$ nur von K und φ abhängt.

34 Zeigen Sie, dass der Differentialoperator $H := -\Delta$ folgende Positivitätseigenschaft erfüllt: für alle $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$

$$\langle Hf | f \rangle_{L^2} := \int\limits_{\mathbb{R}^d} (Hf)(x) f(x)\, dx \geq 0.$$

Überdies ist die Ungleichung strikt, falls f nicht die Nullfunktion ist.
[Hinweis: Mittelwertsatz aus Analysis 2]

Zu §25: Volumina und Integration über Normalbereiche

35 (a) Man berechne das Volumen des Körpers zwischen der Ebene $z = x + y$ und dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 2]$.

(b) Man berechne das Volumen des Körpers der oben von dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und unten von dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ begrenzt wird.

(c) Man berechne das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche $z = xy^2 + y^3$ und oberhalb des Quadrats $[0, 2] \times [0, 2]$ liegt.

36 Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die (abgeschlossene) obere Hälfte der Kreisscheibe mit Radius 2 um den Ursprung. Berechnen Sie $\int\limits_B x^2 y \, d(x, y)$ als Integral über einen Normalbereich.

37 Geben Sie den Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ an, für den

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 2x \, dxdy = \int\limits_B 2x \, d(x, y)$$

gilt. Berechen Sie das iterierte Integral in der gegebenen Form sowie mit vertauschter Integrationsreihenfolge.

38 Es sei $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ g_1(x) \leq y \leq \frac{x}{2}\}$ und $g_1(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Berechnen Sie $\int\limits_B x \, d(x, y)$, indem Sie $B \subseteq \mathbb{R}^2$

(a) als Normalbereich bzgl. der x-Achse auffassen. (b) als Normalbereich bzgl. der y-Achse

39 Berechnen Sie das Volumen der folgenden Teilmenge des $\mathbb{R}^4$:

$$K := \{(t, x, y, z) : t - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}.$$

40 Man bestimme den Flächeninhalt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

41 Man bestimme das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

42 Man berechne

$$\int_B x^2 \, d(x,y),$$

wobei $B = \{(x,y) \ : \ |x| + |y| \leq 1\}$.

43 Man berechne

$$\int_B xyz \, d(x,y,z),$$

wobei $B = \{(x,y,z) \ : \ 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$.

44 Welches Volumen hat die kompakte Menge im $\mathbb{R}^3$, die entsteht, indem der elliptische (Voll-)Zylinder $\{(x,y,z) \ : \ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ durch die Ebenen $z = 0$ und $z = x + y + 2$ abgeschnitten wird?

45 (a) Seien $a < b$ und g_1, g_2 stetige Funktionen $[a,b] \to [0,\infty[$ mit $g_1 \leq g_2$. Zeigen Sie, dass das Volumen des Rotationskörpers

$$K := \{(x,y,z) : z \in [a,b], g_1(z) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq g_2(z)\}$$

(mit der z-Achse als Drehachse) gegeben ist durch

$$\pi \int_a^b (g_2(z)^2 - g_1(z)^2) \, dz.$$

(b) Es sei $0 < r < R$. Wenden Sie das Resultat aus (a) an, um das Volumen jenes (Voll-) Torus zu bestimmen, der durch Rotation einer (vertikal gelegenen) Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunktsabstand R von der (ebenfalls vertikalen) Rotationsachse entsteht.

Zu §26: Transformationsformel

Zu den folgenden Aufgaben: unabhängig vom Zeitpunkt, zu dem Sie diese Aufgaben besprechen, nehmen Sie dafür bereits die Transformationsformel in der Form wie im Punkt 26.2 der VO als gültig an. (Der Beweis samt vorbereitender Sätze wird uns in der VO ungefähr eine Woche lang beschäftigen.)

46 Wie sieht die Transformationsformel für Integrale von Funktionen $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ im Spezialfall eines affin linearen Diffeomorphismus aus? Was erhalten wir in den (noch spezielleren) Fällen einer orthogonalen Transformation oder einer skalaren Multiplikation?

47 Berechnen Sie Beispiel 36 noch einmal mit Hilfe von Polarkoordinaten.

48 Wiederholen Sie Definitionen, geometrische Interpretation und Resultate zum Thema Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ (vgl. VO). Geben Sie eine entprechende Transformationsformel für Integrale an.

49 Berechen Sie das Volumen jener Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die unterhalb des Rotationsparaboloids $z = 1 - (x^2 + y^2)$ und oberhalb der xy-Ebene liegt.

50 Es bezeichne $U_{-\pi} =]0, \infty[\times]-\pi, \pi[$, $V_{-\pi} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ und $\Phi\colon U_{-\pi} \to V_{-\pi}$ die Polarkoordinatentransformation $\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ (vgl. Notation aus VO). Eine Funktion $w\colon V_{-\pi} \to \mathbb{R}$ sei wie folgt konstruiert: wähle $g \in \mathcal{C}_c(]0, \infty[)$, $h \in \mathcal{C}_c(]-1, \infty[)$ und setze

$$w(x) := g(\|x\|) \cdot h\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \quad (x \in V_{-\pi}).$$

(a) Begründen Sie, warum w wohldefiniert ist, kompakten Träger in $V_{-\pi}$ hat und stetig ist.
(b) Welchen Ausdruck erhalten Sie für $\int_{V_{-\pi}} w(x)\,dx$ nach Transformation auf Polarkoordinaten?

51 (a) Es sei $\rho\colon [0, 2\pi] \to [0, \infty[$ stetig und $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der zugehörige stetige Weg $\gamma(t) := \rho(t) \cdot (\cos(t), \sin(t))$. Weiters bezeichne $\Phi\colon [0, \infty[\times[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung $\Phi(r, \varphi) = r \cdot (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ und $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ beliebige Randwinkel. Veranschaulichen Sie in einer Skizze den Bereich

$$B := \Phi(K) \quad \text{mit} \quad K := \{(r, t) : \varphi_1 \leq t \leq \varphi_2, 0 \leq r \leq \rho(t)\}$$

und leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt von B her.

(b) Berechnen Sie die Fläche jenes kompakten Bereiches im $\mathbb{R}^2$, der von der Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ begrenzt wird $(a > 0)$.
(Hinweis: suchen Sie zunächst eine Parametrisierung der Lemniskate mittels Polarkoordinaten und wenden Sie (a) an.)

52 Man berechne den Inhalt des Bereichs, der von der archimedischen Spirale $r = a\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ und dem Intervall $[0, 2a\pi]$ begrenzt wird.

53 Man berechne den Inhalt des Bereichs, der von der Kardioide

$$r = a(1 + \cos\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

umschlossen wird.

54 (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Kreisscheibe (um 0 in $\mathbb{R}^2$) bzw. das Volumen der Kugel (um 0 in $\mathbb{R}^3$) jeweils mit Radius $R > 0$ direkt unter Verwendung von Polar- bzw. Kugelkoordinaten.

(b) Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ das Ellipsoid beschrieben durch die Ungleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$ (a, b und c positive Konstanten). Verallgemeinern Sie die Kugelkoordinatentransformation passend, um das Volumen dieses Ellipsoids relativ einfach und direkt zu berechnen.
Wie würden Sie alternativ dazu die Berechnung durch eine einfache Transformation auf das Kugelvolumen zurückführen?
Wie könnten Sie das Volumen ohne (mehrdimensionale) Transformationsformel berechnen? (nur Skizze bzw. Ansatz)

55 Es sei H die (abgeschlossene) obere Halbkugel mit Radius 4 um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$ und Z der senkrechte Zylinder über der (waagrechten) Kreisfläche mit Radius 2 um den Mittelpunkt $(2, 0, 0)$. Berechnen Sie das Volumen von $K := H \cap Z$.
(Hinweis: vertrauen Sie hier auf Zylinderkoordinaten; in der Endphase der Berechnung stoßen Sie [ziemlich sicher] auf den Ausdruck $\int_0^{\pi/2} \sin^3(\varphi)\, d\varphi$ – verwenden Sie einfach, dass dies den Wert $2/3$ liefert; zur Kontrolle: das Endergebnis ist $(\pi - 4/3)64/3$.)

$\star$ **Zusatzaufgabe** *(freiwillig)* Es sei $\Phi\colon \mathbb{R}^d \supseteq B_1(0) \to \mathbb{R}^d$ gegeben durch $\Phi(x) := (1 - \|x\|^2)^{-1/2} \cdot x$.

(a) Zeigen Sie direkt, dass Φ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist, indem Sie Bijektivität nachweisen und die Inverse Abbildung explizit bestimmen. (Hinweis: betrachten Sie zunächst $\|\Phi(x)\|^2$.)

(b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $|\det D\Phi|$, indem Sie in folgenden (skizzenhaft geschilderten) Schritten vorgehen:
• $D_j\Phi_k(x) = \big(\delta_{jk} + \Phi_j(x)\Phi_k(x)\big)/\sqrt{1 - \|x\|^2}$
• mit der Notation $y \otimes y = (y_j y_k)_{1 \leq j,k \leq n}$ gilt für jede orthogonale $(n \times n)$-Matrix A die Relation $\det(\mathrm{I}_d + Ay \otimes Ay) = \det(\mathrm{I}_n + y \otimes y)$
• durch geschickte Wahl von A (passend zu $y \neq 0$) folgt $\det(\mathrm{I}_n + y \otimes y) = 1 + \|y\|^2$

(c) Nun sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Verwandeln Sie $\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, dy$ vermöge Φ in ein Integral über die (offene) Einheitskugel.

Zu §27: Oberflächenintegrale

56 Berechnen Sie den Flächeninhalt des kompakten Flächenstückes des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 4$.

57 (a) Es sei $f\colon [a, b] \to [0, \infty[$ stetig. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der (kompakten) Rotationsfläche

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = f(z)^2, z \in [a, b]\}$$

(mit der z-Achse als Drehachse) gegeben ist durch

$$2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}\, dz.$$

(b) Berechnen Sie die Mantelfläche eines Kreiskegels vom Radius $R > 0$ und Höhe $h > 0$.

58 Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie den Inhalt der Torusfläche, die durch Rotation einer (vertikal gelegenen) Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunktsabstand R von der (ebenfalls vertikalen) Rotationsachse entsteht, auf zwei Arten:

(a) durch Reduktion auf die vorige Aufgabe (in zwei Stücken)

(b) mit Hilfe der Parametrisierung

$$\Phi(s, t) = \begin{pmatrix} (R + r\cos(t))\cos(s) \\ (R + r\cos(t))\sin(s) \\ r\sin(t) \end{pmatrix} \qquad (s, t) \in [0, 2\pi]^2.$$

59 Berechnen Sie den Flächeninhalt jenes kompakten Flächenstückes, das als Deckfläche des Volumens in Aufgabe 55 auftritt.
(Vivianisches Fenster; nach Vicenzo Viviani, ein Schüler Galileis)

60 Man berechne den Flcheninhalt desjenigen Teils des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$, der ber dem Viertelkreis $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0, y \geq 0$, liegt.

61 Man berechne den Flcheninhalt desjenigen Teils der Halbkugeloberflche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, welcher in dem zur z-Achse parallelen Kreiszylinder $(x - R/2)^2 + y^2 \leq R^2/4$ liegt.

Zu §28: Lebesgue-Integral

62 Seien Q_1 und $Q_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ zwei Quader.

(i) Zeigen Sie, daß $Q_1 \cap Q_2$ ein Quader ist.

(ii) Falls $Q_1 \subseteq Q_2$, zeigen Sie, daß sich die Differenz $Q_2 \setminus Q_1$ als Vereinigung von höchstens $3^d - 1$ disjunkten Quadern darstellen läßt.

63 Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *Nullmenge* (Lebesgue-Nullmenge), wenn

$$\|\chi_N\|_1 = 0\,.$$

(also die L^1-Halbnorm verschwindet). Zeigen Sie (mithilfe der Definition der L^1-Halbnorm aus der Vorlesung), daß folgende Eigentschaften äquivalent sind:

(i) $N \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Nullmenge;

(ii) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es offene Quader Q_k, sodaß $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}_d(Q_k) < \epsilon$.

64 (i) Seien $N_k, k \in \mathbb{N}$, Nullmengen in $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, daß $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ ebenfalls eine Nullmenge ist.

(ii) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen eine Nullmenge ist.

65 Sei $r > 0$. Finden Sie eine Hüllreihe für die Funktion $f(x) = x^{-r}\chi_{]0,1]}$. Zeigen Sie, daß f genau dann eine Hüllreihe mit endlichem Inhalt besitzt, wenn $r < 1$.

66 Sei $f :]a, b] \to [0, \infty[$ eine stetige Funktion, sodaß das uneigentliche (Riemann-)Integral $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$ existiert. Zeigen Sie, daß f auf dem Intervall $]a, b]$ Lebesgue-integrierbar ist.

Zu §29: Sätze von Green und Gauß

67 Man berechne das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ auf zwei Arten (direkt und mit Satz von Green), wobei

(a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), 0 \le t \le 2\pi$, und $\omega = e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$ ist.

(b) γ der positiv orientierte Rand des Quadrats $B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ und $\omega = 2ydx + 6xdy$.

(c) γ der geschlossene Polygonzug durch die Punkte $(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$ und $(0, 0)$ (in dieser Reihenfolge) und $\omega = xydx + ye^x dy$.

68 Mit Hilfe des Satzes von Green berechne man den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

eingeschlossen wird.

69 Mit Hilfe des Satzes von Green berechne man den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Zykloide $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ und dem Intervall $[0, 2\pi r]$ eingeschlossen wird.

70 Man berechne die Divergenz der folgenden Vektorfelder:

a) $v(x, y, z) = (x^2yz, e^{x+z}, \sin y \cos z)$,

b) $v(x, y, z) = (\sin(xy), y^3z, x^2e^{yz})$.

71 Sei $v(x, y, z) = (x, y, z), r = \|v\|$ und $m \in \mathbb{Z}$. Man zeige :

$$\operatorname{div}(r^m v) = (m + 3)r^m.$$

72 Die Vektorfelder $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ und das Skalarfeld φ seien differenzierbar auf einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^3$. Man zeige : auf E gilt

a) $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$,

b) $\operatorname{div}(a\mathbf{F}) = a \operatorname{div}\mathbf{F}$, $a \in \mathbb{R}$,

c) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) = \varphi \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathbf{F}$,

73 Bestimmen Sie jeweils ein Einheits-Normalenfeld (Ihrer Wahl) an die gegebenen (Hyper)Flächen im $\mathbb{R}^3$.

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1, y^2 + z^2 = 1\}$$
$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$$

74 Bestimmen Sie jeweils ein Einheits-Normalenfeld (Ihrer Wahl) an die gegebenen (Hy-

per)Flächen im $\mathbb{R}^3$.

$$S := \{(s\cos(t), s\sin(t), t) \in \mathbb{R}^3 : 1 < s < 2, 0 < t < 4\pi\}$$
$$R := \{(f(s)\cos(t), s, f(s)\sin(t)) \in \mathbb{R}^3 : s \in]a, b[, 0 < t < \pi\} \qquad f \in \mathcal{C}^1(]a, b[), f > 0$$

75 Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und $v(x, y, z) = x + z, x, y)$. Berechnen Sie

$$\int_{S^2} \langle v, \mathbf{n}\rangle dS$$

wobei S^2 gemäß der äußeren Normalen (positiv) orientiert sein soll.

76 Es seien f, g, $h \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^3)$ beliebig (d.h., f, g, h sind stetig differenzierbar mit kompaktem Träger). Zeigen Sie durch direkte Rechnung:

$$\int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^2} \operatorname{div} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} d(x, y, z) = \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^2} f\, dS.$$

77 Sei $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v(x, y, z) := \begin{pmatrix} xz^2 \\ x^2y - z^3 \\ 2xy + y^2z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{S^2} \langle v(x, y, z)|\mathbf{n}\rangle \, \mathbf{dS}$$

direkt und mit dem Satz von Gauß (wobei $\mathbf{n}$ die nach außen weisende Normale ist).

78 Mit Hilfe des Satzes von Gauß (Divergenzsatz) berechne man das Integral

$$\int_{\partial B} \langle (x^3, y^3, z^3), \mathbf{n}\rangle \, dS,$$

wobei B die Kugel mit Radius $R > 0$ um den Nullpunkt und $\mathbf{n}$ die nach außen weisende Normale ist.

79 Mit Hilfe des des Satzes von Gauß (Divergenzsatz) berechne man

$$\int_M \operatorname{div} v \, d(x, y, z),$$

wobei M der Zylinder $\{(x,y,z) : x^2+y^2<1,\ 0<z<1\}$ und

$$v(x,y,z) = (1-(x^2+y^2)^3, 1-(x^2+y^2)^3, x^2z^2)$$

ist.

80 Mit Hilfe des des Satzes von Gauß (Divergenzsatz) berechne man

$$\int_{\partial B} (x^2+y+z)\, dS,$$

wobei B die Einheitskugel $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ und ∂B positiv orientiert ist. (Interpretiere den Integranden als $\langle v, \mathbf{n}\rangle$)

81 Es sei $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$ und $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $w(x,y,z) := (3x^2z, y^2-2x, z^3)$. Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} \langle w|\mathbf{n}\rangle\, dS,$$

wobei $\mathbf{n}$ das äußere Einheits-Normalenfeld auf ∂K ist.

82 Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechne man

$$\int_{\partial M} \langle v, \mathbf{n}\rangle,$$

wobei $v(x,y,z) = (x^2, -2xy, 3xz)$ und $M = \{(x,y,z) \ : \ x,y,z \geq 0\,, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ ist.

Zu §30 - §32: Differentialformen und Integralsätze

83 Für die folgenden 1-Formen auf $\mathbb{R}^3$ berechne man das äußere Differential:

a) $x^2dx + ydz$,

b) $xdx + xydy + xzdz$,

c) $e^{xy}dx - \sin ydy + xdz$,

d) $(x + \cos y)dy + 3dz$.

84 Berechne das äußere Differential der folgenden 2-Formen auf $\mathbb{R}^3$:

a) $x^2dx \wedge dy + e^z dy \wedge dz$,

b) $(x + \sin z)dx \wedge dy + ydx \wedge dz + xyzdy \wedge dz$.

85 Es seien die folgenden Differentialformen und eine Funktion auf $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$\omega = e^{-z}\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz$
$\mu = \sin(xy)\, dx \wedge dz + y\, dy \wedge dz$
$\sigma = e^{y+z}\, dx + \cos(xz)\, dy + dz$
$f(x, y, z) = ye^z$.

Diskutieren Sie, welche der folgenden Operationen sinnvoll sind und berechnen Sie für die sich ergebenden Formen die Darstellung bezüglich der Standardbasis dx_I:

(a) $\omega + \mu$, $\omega + \sigma$, $f \cdot \omega$, $f \wedge \sigma$

(b) $\omega \wedge \sigma$, $\omega \wedge \mu$, $(df - \sigma) \wedge \omega$

(c) $d(d\sigma)$, $d\sigma - \mu$, $d(\mu + d\sigma)$, $d(\mu + \omega)$

(d) $d(f \cdot \omega)$, $d(\sigma \wedge df)$, $d\mu - \sigma$

86 Es sei $U :=]0, \infty[^n \subseteq \mathbb{R}^n$ und die n-Form ω auf U gegeben durch

$$\omega := \frac{x_1 \exp(x_3 + \ldots + x_n)}{x_1^2 + x_2}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Berechnen Sie $\int_K \omega$, wobei $K := [1, 2]^n$.

87 Bestimmen Sie jeweils ein Einheits-Normalenfeld (Ihrer Wahl) an die gegebenen (Hyper)Flächen im $\mathbb{R}^3$.

$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1, y^2 + z^2 = 1\}$
$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$
$S := \{(s\cos(t), s\sin(t), t) \in \mathbb{R}^3 : 1 < s < 2, 0 < t < 4\pi\}$
$R := \{(f(s)\cos(t), s, f(s)\sin(t)) \in \mathbb{R}^3 : s \in]a, b[, 0 < t < \pi\} \qquad f \in \mathcal{C}^1(]a, b[), f > 0$

88 Diskutieren Sie in den folgenden Beispielen (a)-(f) jeweils, ob es sich bei den gegebenen Teilmengen um Kompakta K mit glattem Rand ∂K in einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ handelt. Sie dürfen anschaulich an Hand von Skizzen argumentieren. Geben Sie aber in allen Fällen k und n an und beschreiben Sie die Teilmenge ∂K (als Rand von K relativ M) präzise:

(a) $M :=]-2,2[^3 \subseteq \mathbb{R}^3$, $K := \overline{B_1(0)}$

(b) $M := S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, $K := \{(x,y) \in S^1 : y \geq \frac{1}{2}\}$

(c) $M := H$ aus Aufgabe 88, $K := \{(x,y,z) \in H : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(d) $M :=]-2,2[^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $K := [0,1]^2$

(e) $M := S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $K := \{(x,y,z) \in S^2 : z \geq 0\}$

(f) $M := \mathbb{R}^3$, $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1\}$

89 Mit Hilfe des Satzes von Stokes berechne man das Integral

$$\int_\gamma -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz,$$

wobei γ der Durchschnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 3$ mit der Ebene $x + y + z = 1$ ist und γ entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn orientiert ist, wenn man γ von einem genügend hoch gelegenen Punkt auf der z-Achse betrachtet.

90 Mit Hilfe des Satzes von Stokes berechne man das Integral

$$\int_\gamma y^2\cos(xz)\,dx + x^3 e^{yz}\,dy - e^{xyz}\,dz,$$

wobei γ der positiv orientierte Kreis $x^2 + y^2 = 4$ der (x,y)-Ebene ist.