Übungen aus Analysis

(nach Zusammenstellungen von K. Gröchenig und G. Hörmann)

Sommersemester 2014

IV. INTEGRATION

Zu §9: Riemann-Integral

1 Beweisen Sie: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und in höchstens einem Punkt $x_0 \in [a,b]$ unstetig, so ist f R-integrierbrar. Folgern Sie daraus, dass beschränkte Funktionen auf $[a,b]$ mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen stets R-integrierbar sind.

2 Sei $a > 1$. Berechnen Sie $\int\limits_1^a \frac{dx}{x}$ mittels Riemann-Summen.

(Hinweis: $1 < a^{1/n} < a^{2/n} < \ldots < a^{(n-1)/n} < a$.)

3 Man beweise

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$$

[Wir werden später sehen, daß das Integral gerade den Wert log(2) hat.]

4 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und ungleich der Nullfunktion. Zeigen Sie: $\int_a^b |f(x)|\, dx > 0$.

5 Zeigen Sie, daß eine Riemann-integrierbare Funktion beschränkt sein muß. (Anleitung: indirekter Beweis. Zeigen Sie durch passende Wahl von Partitionen und Stützpunkten, daß eine unbeschränkte Funktion beliebig große Riemannsummen haben kann.)

Zu §10: Integration und Differentiation; Satz von Taylor

6 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$.

(a) Beschreiben Sie die Stammfunktionen zu den Einschränkung von f auf $I_1 :=] -\infty, 0[$ und $I_2 :=]0, \infty[$.

(b) Geben Sie alle differenzierbaren Funktion $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ an, für die gilt: $\forall x \neq 0$ ist $F'(x) = f(x)$. Welche davon lassen sich stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen? (F kann also als *Stammfunktion* bezeichnet werden. Wir haben aber in der VO Stammfunktionen nur auf Intervallen definiert.)
(c) Hat f eine (überall differenzierbare) Stammfunktion auf $\mathbb{R}$?

Aufgaben 7-11: Berechnen Sie die Integrale bzw. finden Sie Stammfunktionen:

$\boxed{7}$ (a) $\displaystyle\int_0^x \frac{2y+1}{y^2+y+3}\,dy \quad (x>0)$ (b) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \tan(t)\,dt$

$\boxed{8}$ $\displaystyle\int \frac{x}{-6+11x-6x^2+x^3}\,dx.$ (Hinweis: das Nennerpolynom hat ganzzahlige Nullstellen.)

$\boxed{9}$ (a) $\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (t \in \mathbb{R})$ (b) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx.$

$\boxed{10}$ (a) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

$\boxed{11}$

$$\int x^m \log(x)\,dx \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{\log(x)}{x^2}\,dx$$

$$\int x \arctan x\,dx$$

$$\int xe^{-\pi x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$\boxed{12}$ Man finde

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$$

$\boxed{13}$ (i) Finden Sie die Stammfunktionen zu den hyperbolischen Funktionen sinh, cosh, tanh.

(ii) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$$

$\boxed{\textbf{14}}$ Berechnen Sie $\log(1.5)$ auf sechs Stellen genau.

$\boxed{\textbf{15}}$ Zeigen Sie, daß die Taylorreihe von $f(x) = \log(1+x)$ um $a = 0$ auch für $x \in]-1, 0[$ gegen f konvergiert.

$\boxed{\textbf{16}}$ Berechnen Sie die Taylorpolynome der Funktion $f(x) = \arcsin(x)$ um $a = 0$ bis zur Ordnung 5.

$\boxed{\textbf{17}}$ Berechnen Sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x + x^2 - x^3}$$

$\boxed{\textbf{18}}$ Sei f eine gerade Funktion in $C^n(I)$, wobei $n \in \mathbb{N} \cup \infty$ und I ein offenes Intervall, das 0 enthält. Zeigen Sie, daß die zugehörigen Taylorpolynome und die Taylorreihe jeweils gerade Funktionen sind. Was bedeutet das für die Koeffizienten?

$\boxed{\textbf{19}}$ Berechnen Sie für $\alpha \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}{n^{\alpha+1}}\,.$$

$\boxed{\textbf{20}}$ (i) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_1^n \log(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \log(k) \leq \int_1^{n+1} \log(x)\,dx\,. \tag{1}$$

(ii) Leiten Sie daraus die Ungleichung

$$e\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \leq n! \leq e\Big(\frac{n+1}{e}\Big)^{n+1}$$

ab.

Bemerkung: Eine genauere Abschnätzung für $n!$ ist die sogenannte Sterlingsche Formel, die besagt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

(Siehe Forster “Analysis I”, p. 228)

$\boxed{\textbf{21}}$ Sei $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$. Zeigen Sie, daß $0 < c_n < 1$ und daß der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert. (Bemerkung: der Grenzwert ist als Euler-Mascheronische Konstante bekannt und ist $0.5772156649\ldots$.)

$\boxed{\textbf{22}}$ Man berechne den Flächeninhalt der Ellipse $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Sei $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ für $x > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel, aber ohne Benutzung des Logarithmus selbst, daß
(i) $F(xy) = F(x) + F(y), x, y > 0$
(ii) $F(x^\alpha) = \alpha F(x)$
(iii) $F(e^x) = x$

(Bemerkung: Dies ist eine Möglichkeit, die Logarithmusfunktion mit Hilfe des Integralbegriffs einzuführen, ohne vorher die Exponentialfunktion zu studieren. Diese Definition wird in manchen Lehrbüchern benutzt, die Potenzreihen zu Beginn der Analysis vermeiden möchten.)

$\boxed{\mathbf{24}}$ Man berechne $(m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx$$

und

$$\int_{-1}^1 (1+x)^n (1-x)^m \, dx \, .$$

$\boxed{\mathbf{25}}$ (a) Sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wie sieht die Taylor-Reihe von p mit Entwicklungspunkt x_0 aus? Ist die Summe gleich dem Funktionswert? Was erhalten wir speziell für $x_0 = 0$?

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierter Ordnung der Funktion tan um $x_0 = 0$.

Zu §11: Uneigentliche Integrale

Aufgaben 26-27: Untersuchen Sie, ob die uneigentlichen Integrale konvergent sind. (Können Sie gegebenfalls auch einen Wert finden?)

$\boxed{\mathbf{26}}$ (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2-2x}}$

$\boxed{\mathbf{27}}$ (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$

$\boxed{\mathbf{28}}$ Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$?

$\boxed{\textbf{29}}$ Bestimmen Sie, ob die uneigentlichen Integrale konvergieren oder divergieren.

$$(a) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

$$(b) \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\,dx$$

$$(c) \quad \int_1^\infty \log\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$$

$$(d) \quad \int_1^2 \frac{x^3+e^x}{\sqrt[4]{x^2-1}}\,dx$$

$\boxed{\textbf{30}}$ Bestimmen Sie, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{(1+x^2)^\alpha}\,dx$$

konvergiert.

$\boxed{\textbf{31}}$ Zeigen Sie, daß

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log(x))^3} = \frac{1}{2}\,.$$

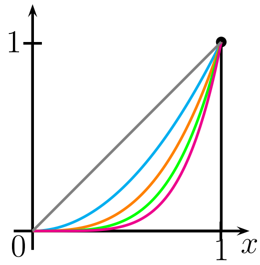
$\boxed{\textbf{32}}$ Zeigen Sie, daß für $a > 0$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-x^a}\,dx = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$$

V. FUNKTIONENFOLGEN UND -REIHEN

Zu §§12 und 13: Gleichmäßige und punktweise Konvergenz; Potenzreihen

33 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) := x^n$.



(a) Konvergiert (f_n) punktweise?

(b) Konvergiert (f_n) gleichmäßig?

34 Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \dfrac{(-1)^n\, x^2}{1 + n^2 x^2}$.

(a) Konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig oder punktweise?

(b) Definiert $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ eine stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

35 Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe um $x_0 \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die *Formel von Hadamard* für den Konvergenzradius R:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

(mit der Vereinbarung $R = 0$ zu setzen, falls der Limes superior unendlich ist, bzw. $R = \infty$, falls er Null ist). (Hinweis: Wurzeltest.)

36 Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius R für die angegeben Potenzreihen. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den rellen Randpunkten $x = x_0 \pm R$.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n \log(n+1)}$ (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-3)^k x^{2k+1}$

37 Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius R und finden Sie die Summenfunktionen (für *relle* $x \in]-R, R[$) für die angegeben Potenzreihen. Untersuchen Sie auch das Konvergenzverhalten in den rellen Randpunkten $x = \pm R$.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ (Hinweis: auf (a) zurückführen.) (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

38 Bestimmen Sie die Taylor-Reihe für die Funktion $\arcsin :]-1,1[\to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
(Hinweis: Kennen Sie vielleicht die Reihe für die Ableitung schon aus der VO?)

$\boxed{\mathbf{39}}$ Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Finden Sie die Taylor-Reihe von f, indem Sie eine bekannte Potenzreihenentwicklung umformen. Folgern Sie, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird. Benützen Sie dies, um eine Reihenentwicklung für den Wert des folgenden Integrals anzugeben

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{40}}$ Finden Sie eine Potenzreihe für die Funktionen $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius. (Anmerkung: Es läßt sich zeigen, daß $f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$)

$\boxed{\mathbf{41}}$ Entwickeln Sie $\sinh(x)$ in eine Potenzreihe und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, daß gilt $\sin(ix) = i \sinh(x)$.

$\boxed{\mathbf{42}}$ Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k!}{3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k+1)} \right)^2 x^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(\log n)/n} x^n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k + e^{-k}}{2} x^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b^{\sqrt{k}} x^k \qquad (b > 0)$$

$\boxed{\mathbf{43}}$ Für $n \geq 1$ und $x > 0$ sei $f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-x/n}$. Man zeige, daß die Folgen f_n auf $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, aber $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = 1$. Erklären Sie, wie diese Beobachtung mit den Sätzen aus der Vorlesung verträglich ist.

$\boxed{\mathbf{44}}$ Für $|x| < 1$ berechne man die Summen der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k \qquad \text{und } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Zu §14: Fourier-Reihen

$\boxed{\mathbf{45}}$ Sei $f \in \mathcal{C}[a, b]$ (Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$).

Zeigen Sie: $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
Folgern Sie daraus, dass durch $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ ein (unitäres) Skalarprodukt auf $\mathcal{C}[a, b]$ definiert wird.

46 Bestimmen Sie die (reelle Form der) Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $f(x) := |x|$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$.

47 Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $f(x) := \exp(iax)$ $(0 \leq x < 2\pi)$.

48 Es sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$. (Zum Beispiel die n-ten Partialsummen einer Fourier-Reihe.) Führen Sie folgende Bemerkung aus der VO, 14.8, im Detail aus:

(a) Wenn f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, dann folgt daraus auch die Konvergenz im quadratischen Mittel, d.h. $\|f_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$.

(b) Die Umkehrung der Aussage in (a) gilt nicht.

49 Was besagt die Parseval-Gleichung für die Funktionen aus den Aufgaben $\boxed{\text{46-47}}$?

50 Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{[n}}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert, aber die abgeleitete Folge $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ nirgends konvergiert. (Hinweis: wohin müßte f_n' konvergieren?)

51 Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x^\alpha}$ für jedes $\alpha > 1$ gleichmäßig konvergiert.

VI. TOPOLOGISCHE GRUNDBEGRIFFE

Zu §15: Metrische und normierte Räume

52 ("Metrik des französischen Eisenbahnsystems") Bezeichne P (für Paris) einen beliebigen Punkt im $\mathbb{R}^2$ und $\|\ \|$ die euklidische Norm. Wir definieren $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } x - P, y - P \text{ linear abhängig} \\ \|x - P\| + \|y - P\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Veranschaulichen Sie typische Fälle für die Lage von x und y in einer Skizze.
Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert. (Verwenden Sie Skizzen zur Unterstützung.)
Skizzieren Sie jeweils die Menge aller Punkte, die von $Q := P + (4, 0)$ bzw. $R := P + (1, 0)$ Distanz 2 bezüglich d haben.

53 Es sei $(V, \|\ \|)$ ein normierter Vektorraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

(a) Zeigen Sie aus den Axiomen für die Norm, dass durch $d(x, y) := \|x - y\|$ $(x, y \in V)$ eine Metrik auf V definiert wird.

(b) Zeigen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung: $\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$ für x, y aus V.

54 Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit den Normen $\| \ \|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Skizzieren Sie jeweils für $p = 1, 2, \infty$ die Menge $K_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ aller Punkte mit Abstand kleiner gleich 1 vom Ursprung.

Mit welchen Faktoren λ, $\mu > 0$ müssen Sie stauchen, um $\lambda \cdot K_\infty \subseteq \mu \cdot K_2 \subseteq K_1$ zu erreichen? (Notation: X Teilmenge eines Vektorraumes, ν ein Skalar, dann ist $\nu \cdot X := \{\nu z : z \in X\}$.)

55 Sei $\mathbb{R}$ mit dem üblichen euklidischen Abstand als Metrik versehen. Sind folgende Teilmengen offen oder abgeschlossen (oder "weder-noch")? [Argumentation an Hand von Skizzen genügt!] $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$

$$A = [a, b[, \quad B = \{a\}, \quad C = \bigcup_{n \geq 1} \left]\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right[, \quad D = [a, \infty[$$

56 Im $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen euklidischen Norm $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$: Sind folgende Teilmengen offen oder abgeschlossen (oder "weder-noch")? [Argumentation an Hand von Skizzen genügt!]

$E = [a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\quad (a_i,\ b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ i = 1, 2)$, $\quad F$ eine endliche Teilmenge,

$G = \{z \in \mathbb{R}^2 : 1 < \|z\| < 2\}, \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \frac{1}{x}\}$

57 Bestimmen Sie für die Mengen in Aufgaben 55-56 jeweils den Rand, das Innere und den Abschluss.

58 Sei (X, d) ein metrischer Raum.
(a) Es sei $A \subseteq G \subseteq X$ und A abgeschlossen, G offen. Dann ist $G \setminus A$ offen.
(b) Es sei $G \subseteq A \subseteq X$, A abgeschlossen, G offen. Dann ist $A \setminus G$ abgeschlossen.

59 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen oder abgeschlossen?
(a) die x-Achse $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$.
(b) die rechte Halbebene $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$.
(c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1\}$.

60 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie direkt mittels der Definition, daß die Menge $A = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ abgeschlossen in X ist, wobei $a \in X$ und $r > 0$.

(b) Zeigen Sie, daß die Menge $B = \{x \in X : d(x, a) = r\}$ abgeschlossen ist. (In der Vorlesung wurde die Abgeschlossenheit mit der Stetigkeit der Funktion $x \to d(x, a)$ begründet).

Zu §16: Konvergenz und Stetigkeit

61 Zeigen Sie: Grenzwerte konvergenter Folgen in metrischen Räumen sind eindeutig.

$\boxed{\mathbf{62}}$ Skizzieren Sie jeweils die ersten Glieder der Folge (x_k) im $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Grenzwert für $k \to \infty$, falls er existiert:

(a) $x_k := \left(\frac{k-1}{k}, \frac{1}{k}\right)$

(b) $x_k := \left((1+\frac{1}{k})^k, \frac{\log k}{k}\right)$

(c) $x_k := \left((-\frac{k+1}{k})^k, (-1)^{k+1}\right)$

(d) $x_k := \left(\frac{2^k}{3^k+1}, \sqrt[k]{k}\right)$

$\boxed{\mathbf{63}}$ Ist die Folge aus Aufgabe $\boxed{62}$(c) beschränkt? Falls ja, geben Sie explizit eine Konstante C an, für die $\|x_k\| \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Welcher Wert für C ist optimal, das heißt im vorliegenden Fall minimal?

$\boxed{\mathbf{64}}$ Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Zeigen Sie: für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ sind die *partiellen Funktionen* $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(a,y)$, und $h_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,b)$, stetig.

(b) Ist f stetig in $(0,0)$?
(Hinweis: Berechnen Sie z.B. $\lim\limits_{r \searrow 0} f(r,r)$.)

Eventuell selbst zu überlegen bzw. zur Verdeutlichung häufiger Missverständnisse: Warum steht Ihre Schlussfolgerung in (b) nicht im Widerspruch zu dem Satz aus der VO, wo Äquivalenz der Stetigkeit von Abbildungen in den $\mathbb{R}^n$ zur Stetigkeit aller Komponentenfunktionen gezeigt wurde?

$\boxed{\mathbf{65}}$ Der komplexe Vektorraum $\mathcal{C}([a,b])$ der stetigen (komplexwertigen) Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ sei versehen mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ (gemäß VO ist das ein Banach-Raum). Zeigen Sie, dass das lineare Funktional $L : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int\limits_a^b f(x)\,dx$ stetig ist und berechnen Sie seine Operatornorm $\|L\|_{\mathrm{op}}$.

$\boxed{\mathbf{66}}$ Sei $f_n(x) = \sin(2\pi nx) \in C([0,1])$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Folge (f_n) beschränkt im metrischen Raum $\big(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$ ist, aber keine konvergente Teilfolge besitzt. Vergleichen Sie mit dem metrischen Raum $\mathbb{R}^d$.

$\boxed{\mathbf{67}}$ Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf dem metrischen Raum X. Sei $\phi(x) = \max(f(x), g(x))$ und $\psi(x) = \min(f(x), g(x))$ für $x \in X$. Dann sind ϕ und ψ stetig auf X.

$\boxed{\mathbf{68}}$ Es sei $E := \{L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear}\}$ und $\|\ \|$ bezeichne die euklidischen Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass durch $\|L\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|Lx\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \le 1\}$ eine Norm auf E definiert wird.

$\boxed{\textbf{69}}$ (a) (Mit den Bezeichnungen aus $\boxed{68}$) Zeigen Sie, dass $\|L\|_{\mathrm{op}} = \sup\{\|Lx\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ gilt.

(b) Wie würden Sie die Operatornorm der linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ konkret bestimmen? Verwenden Sie (a), um die Frage in eine Extremwertaufgabe für eine reelle Funktion auf dem Intervall $[-1, 1]$ zu verwandeln.
(Hinweis: Dies ist trotzdem noch rechenaufwendig! Falls Sie den Wert tatsächlich berechnen wollen, nehmen Sie hier möglichst einen Computer oder Taschenrechner [und Skizzen] zu Hilfe.)

$\boxed{\textbf{70}}$ Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-\frac{x}{e}} = \exp(-x/e)$. Zeigen Sie, dass genau ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $a \cdot e^{\frac{a}{e}} = 1$ und überdies $0 < a < 1$ gilt.

$\boxed{\textbf{71}}$ Es sei A eine lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$ und $b \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung

$$x = b + Ax$$

gibt. Es folgt also $x = (I - A)^{-1}b$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet. Welche Näherungsformel für $(I-A)^{-1}$ ergibt das iterative Verfahren aus dem Beweis des Fixpunktsatzes von Banach für den Startwert $x_0 := b$?

Zu §17: Kompaktheit

$\boxed{\textbf{72}}$ Welche der Teilmengen aus Aufgaben $\boxed{55\text{-}56}$ sind kompakt? Von welchen dieser Teilmengen ist der Abschluss kompakt? Welche dieser Teilmengen haben kompakten Rand?

$\boxed{\textbf{73}}$ Sei (X, d) ein metrischer Raum und K eine kompakte Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass $(K, d\,|_{K\times K})$ ein vollständiger metrischer Raum ist.
(Hinweis: Hilft Ihnen dabei die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß weiter?)

$\boxed{\textbf{74}}$ (a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. Zeigen Sie: es gibt ein $c > 0$ derart, dass

$$\forall x \in A\ \forall y \in K : \quad d(x, y) \geq c.$$

(Hinweis: $X \setminus A$ ist offen und enthält alle Punkte aus K; überdecken Sie K mit geeigneten Kugeln.)

(b) Geben Sie ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik) an, das belegt, dass die Aussage in (a) falsch wird, wenn K nur als abgeschlossen vorausgesetzt wird.

VII. DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Zu §18: Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit

$\boxed{\textbf{75}}$ Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + ye^{2z} + \log(x^2 + y^2)$. Sind diese stetig?

$\boxed{\textbf{76}}$ Es sei $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Ist r in $(0, 0)$ partiell differenzierbar?

(b) An welchen Stellen ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x \cdot r(x, y)$ partiell differenzierbar? Wie lauten die partiellen Ableitungen?

$\boxed{\textbf{77}}$ Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x \cdot y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ist f zweimal partiell differenzierbar? Gilt die Relation $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ (auf ganz $\mathbb{R}^2$)?

$\boxed{\textbf{78}}$ Sei $U := \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}^3$ und $u : U \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x, y, t) := \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$.

(a) Es bezeichne $\nabla_{(x,y)}\, u$ die Abbildung $(D_1 u, D_2 u) : U \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für alle $(x, y, t) \in U$ gilt:

$$\nabla_{(x,y)}\, u(x, y, t) = -\frac{u(x, y, t)}{2t} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $\Delta_{(x,y)}\, u := D_1^2 u + D_2^2 u$. Zeigen Sie, dass u in U die Wärmeleitungsgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta_{(x,y)}\, u.$$

$\boxed{\textbf{79}}$ Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}^m$, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))$ $(t \in I)$. Drücken Sie die Differenzierbarkeit von f und die Ableitung $\dot{f}(t) := Df(t)$ mit Hilfe der Komponentenfunktionen $f_j\colon I \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$ aus. Wie können Sie den Vektor $\dot{f}(t) \in \mathbb{R}^m$ in Bezug auf f und $f(t)$ geometrisch deuten?

Illustrieren Sie die Diskussion am Beispiel: $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos(t), \sin(t))$.

$\boxed{\textbf{80}}$ (a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ $(x \in U)$. Zeigen Sie, dass f im Punkt a aus U genau dann differenzierbar ist, wenn alle Komponentenfunktionen f_j $(j = 1, \ldots, m)$ es sind. Drücken Sie die Ableitung $Df(a)$ durch jene der $f_1, \ldots, f_m$ in a aus.

(b) Begründen Sie, warum $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(r, \varphi, \theta) := (r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta))$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

$\boxed{\textbf{81}}$ Diskutieren Sie die Differenzierbarkeit der Funktionen aus Aufgaben $\boxed{64}$ und $\boxed{76}$.

$\boxed{\textbf{82}}$ (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := 2x^2 + 6xy + 3y^2$ im Punkt $(3, 2)$ in Richtung zum Punkt $(2, 3)$.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, $g(x, y) := \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ in einem Punkt $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ in Richtung zum Ursprung.

$\boxed{\mathbf{83}}$ Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (siehe VO, Beispiel 18.2.3). Zeigen Sie, dass an der Stelle $(0,0)$ alle Richtungsableitungen von f existieren, die Funktion dort aber nicht differenzierbar ist.

$\boxed{\mathbf{84}}$ Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \sin(x) + e^{x^2 y} + y^3$, im Punkt $(0, 2, f(0,2))$. Gibt es Punkte (x_0, y_0), über denen die Tangentialebene horizontal (d.h. parallel zur x-y-Ebene) ist?

$\boxed{\mathbf{85}}$ Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ und $c := f(x)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{grad} f(x) \in \mathbb{R}^n$ in folgendem Sinne normal auf die Niveaumenge („Niveau-Hyperfläche“) $N_f(c) := f^{-1}(\{c\}) = \{y \in U : f(y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^n$ steht: ist $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\gamma(I) \subseteq N_f(c)$ und $\gamma(0) = x$ (d.h. γ „ist eine Kurve in $N_f(c)$ durch x“), so folgt (mit der Notation $\dot\gamma(t) := D\gamma(t)$)

$$\langle \operatorname{grad} f(x) | \dot\gamma(0) \rangle = 0.$$

$\boxed{\mathbf{86}}$ Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $a, b \in U$ derart, dass auch die gesamte Verbindungsstrecke zwischen a und b in U enthalten ist.

(a) Zeigen Sie folgende Version des Mittelwertsatzes (VO 18.18) für *reellwertige* differenzierbare Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$: Es gibt einen Punkt ξ auf der Verbindungsstrecke zwischen a und b, so dass

$$f(b) - f(a) = Df(\xi) \cdot (b - a).$$

(Hinweis: betrachten Sie die Funktion $f \circ \gamma$, wobei $\gamma(t) = a + t(b-a)$ für $0 \leq t \leq 1$ die Verbindungsstrecke von a nach b durchläuft.)

(b) Zeigen Sie an Hand eines Gegenbeispiels, dass für *vektorwertige* differenzierbare Abbildungen $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ die (a) entsprechende Aussage im Allgemeinen falsch ist.

Zusatzfrage (freiwillig): Warum gilt dennoch die folgende Aussage?

Ist die Jacobi-Matrix $DF(\xi) = 0$ für alle ξ auf der Strecke von a nach b, dann ist entlang dieser Strecke F konstant (d.h. gleich einem festen Vektor aus $\mathbb{R}^m$).

$\boxed{\mathbf{87}}$ Es sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(t) := \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\, dx.$

(a) Berechnen Sie die Ableitung von h sowie $h(0)$.

(b) Sei weiters $G(t) := (\int_0^t e^{-u^2}\, du)^2$ $(t \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $G + h$ konstant ist und bestimmen Sie diese Konstante durch Berechnung von $G(0) + h(0)$. Beweisen Sie nun durch Grenzübergang $t \to +\infty$ die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{88}}$ Man berechne die Gradienten der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$, $f(x,y) = \arctan(y/x)$, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, sowie $f(x) = |x|^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (a) partiell differenzierbar und (b) differenzierbar ist.

$\boxed{\mathbf{89}}$ Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\nu : U \to \mathbb{R}^m$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie die Produktregel

$$\operatorname{div}(f\nu) = \nabla f \cdot \nu + f \operatorname{div}\nu\,.$$

$\boxed{\mathbf{90}}$ Sei $f(x,y) = \sqrt{|x|\,|y|}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar im Nullpunkt?

$\boxed{\mathbf{91}}$ Sei $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Zeigen Sie, daß $\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$.

$\boxed{\mathbf{92}}$ Man berechne die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ im Punkt $(1,-2,3)$ in Richtung des Vektors $(3,4,5)$.

$\boxed{\mathbf{93}}$ Man berechne die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x^y, y^x, x^{y+z})$.

$\boxed{\mathbf{94}}$ Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $c \in \mathbb{R}$ sei $N(c) = \{z \in U : f(z) = c\}$ die Niveaufläche. Zeigen Sie, daß für $x \in N(c)$ der Gradient $\nabla f(x)$ auf $N(c)$ senkrecht steht. (Dh. daß $\nabla f(x)$ senkrecht auf der Tangentialebene steht).

$\boxed{\mathbf{95}}$ Man berechne die Gleichung der Tangentialebene an der Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-\|x\|^2}$, $\|x\| < 1$, in einem beliebigen Punkt $z \in \mathbb{R}^d$.

$\boxed{\mathbf{96}}$ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $u(x,t) = f(x+ct)$. Berechnen Sie $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. (Lesen Sie in einem Physikbuch den Zusammenhang mit der Wellenausbreitung nach).

$\boxed{\mathbf{97}}$ Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenzbar und erfülle, für festes $\alpha \in \mathbb{R}$, die Gleichung $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Man zeige, daß die Funktion $g(t) = f(tx)$ differenzierbar ist und die Identität

$$\nabla f(x) \cdot x = kf(x)$$

erfüllt. (Anmerkung: Funktionen, die eine Gleichung der Form $f(tx) = t^\alpha f(x)$ erfüllen, heißen homogen vom Grad α. Beispiel: $f(x) = \|x\|^\alpha$)

Zu §19: Taylor-Formel und lokale Extrema

$\boxed{\mathbf{98}}$ (a) Formulieren Sie den Spezialfall der Taylor-Formel für eine Funktion von zwei Variablen ohne Verwendung der Multi-Index-Notation.

(b) Wie lautet die Taylor-Approximation zweiter Ordnung für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \sin(x) + e^{x^2 y} + y^3$ (vgl. $\boxed{84}$) an der Stelle $(0,2)$?

$\boxed{\mathbf{99}}$ Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := (y-x^2)(y-2x^2)$. Zeigen Sie (nach Peano 1884):

(a) $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$, aber f hat in $(0,0)$ kein lokales Extremum
(Hinweis: skizzieren Sie die Gebiete im $\mathbb{R}^2$, wo f positives oder negatives Vorzeichen hat.)

(b) entlang jeder Geraden durch den Ursprung wird f über $(0,0)$ minimal.

$\boxed{\mathbf{100}}$ Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $z_0 \in U$ mit $\operatorname{grad} f(z_0) \neq 0$. Weiters seien die Abbildungen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(y) := D_y f(z_0)$ (Richtungsableitung) sowie $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $h(t) := (\cos(t), \sin(t))$ gegeben. Finden Sie die Maximal- und Minimalwerte der Funktion $R := g \circ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{101}}$ Es sei A eine symmetrische reelle $(n \times n)$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle + \langle b|x\rangle + c$. Finden Sie jeweils (hinreichende) Bedingungen an A, b und c, damit folgendes gilt:

(a) f hat genau ein striktes lokales Maximum

(b) f hat keine kritischen Stellen

(c) f hat unendlich viele kritische Stellen und all diese sind (nicht strikte) lokale Minima.

Aufgaben $\boxed{\mathbf{102\text{-}104}}$ Bestimmen Sie jeweils die lokalen Maxima und Minima der gegebenen Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sind diese global?

$\boxed{\mathbf{102}}$ $f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy$.
(Sogenanntes *folium cartesii*, diskutiert in einem Brief von Descartes an Mersenne vom 23. August 1638; [aus E. Hairer und G. Wanner, *Analysis by its history*, Springer-Verlag 1996].)

$\boxed{\mathbf{103}}$ $f(x,y) := 3xe^y - x^3 - e^{3y}$

$\boxed{\mathbf{104}}$ $f(x,y) := x^3 - 4y^3 + 3x^2 - y^4$.

$\boxed{\mathbf{105}}$ Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) := x^2 y$ jeweils lokale und globale Maxima und Minima auf
(a) der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$
(b) dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$
(c) der abgeschlossenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$.

$\boxed{\mathbf{106}}$ Bestimmen Sie im $\mathbb{R}^3$ die Punkte mit minimalem bzw. maximalem Abstand vom Ursprung auf dem Schnitt des Ellipsoides $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 0$. (Dadurch erhalten Sie die Neben- und Hauptscheitel der Schnittellipse.)

$\boxed{\mathbf{107}}$ Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) := \|A \cdot z\|^2$, wobei $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Maximum und Minimum von f auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Vergleichen Sie mit Aufgabe $\boxed{69}$.

$\boxed{\mathbf{108}}$ (a) Es sei B eine symmetrische (reelle) $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass das Maximum und Minimum der zugeordneten quadratischen Form $q(z) := \langle z|Bz\rangle$, $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, auf der S^{n-1} durch den größten bzw. kleinsten Eigenwert von B gegeben ist.

(b) Schließen Sie aus (a), wie Sie die Operatornorm für eine beliebige (lineare Abbildung

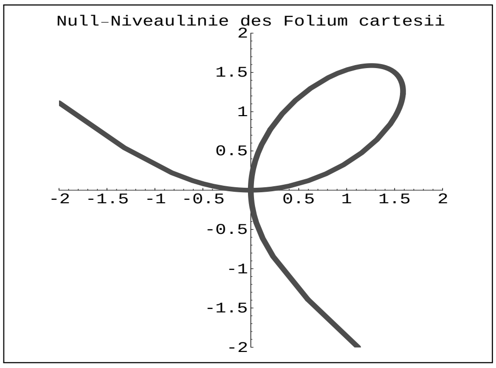
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit zugehöriger) $n \times n$-Matrix A (bzgl. der Standardbasen) durch Rückführung auf Eigenwerte einer geeignet gewählten Matrix bestimmen können.
Hinweis: $\|Az\|^2 = \langle z|A^*Az\rangle$.)

Zu §20: Implizite Funktionen und Umkehrsatz

$\boxed{\textbf{109}}$ („implizit versus explizit") Es sei $f(x,y) := x^2 + y^2$, sodass also die Niveaumenge $N_f(1) = f^{-1}(\{1\})$ für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zum Wert 1 den Einheitskreis beschreibt.
In welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ kann jeweils eine Variable als differenzierbare Funktion der anderen ausgedrückt werden? Was gibt Ihnen dabei der Satz über implizite Funktionen in die Hand und was sehen Sie in diesem konkreten Beispiel selbst (direkt) besser? Vergleichen Sie aber auch die implizite Berechnung der Ableitungen mit jener aus der expliziten Auflösung nach einer Variable.

$\boxed{\textbf{110}}$ Studieren Sie die Niveaumengen der Funktion aus Aufgabe $\boxed{102}$. Für welche Punkte kann der Satz über implizite Funktionen keine Aussage machen? An welchen Stellen ist *notwendig* keine Auflösbarkeit nach y (als differenzierbare Funktion von x) möglich? Wo in der verbleibenden Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ergibt sich jeweils $y'(x) = 0$?

Bemerkung: zur griffigeren Beschreibung der Niveaulinien können wir auch versuchen, diese als parametrisierte Kurvenstücke im $\mathbb{R}^2$ darzustellen; das heißt wir setzen $x(t) := r(t)\cos(t)$ und $y(t) := r(t)\sin(t)$ und hoffen, die Funktion r aus der Gleichung $f(x(t), y(t)) = c$ bestimmen zu können. Zum Beispiel funktioniert das hier für die Null-Niveaulinie ganz gut und ergibt nebenstehendes Bild. Probieren Sie es mal aus!



$\boxed{\textbf{111}}$ Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) := xz + \sin(xy) + \cos(xz) - 1$ mit Nullstellenmenge $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$. Welche Variablen können in einer Umgebung von $(0,1,1)$ jeweils innerhalb N als Funktion der beiden anderen ausgedrückt werden? Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der sich ergebenden Funktionen.

$\boxed{\textbf{112}}$ Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x y + \sin(xz) + \log(1+z) - 2 \\ \sin(x^2 y) + y^2 + z^5 - 4 \end{pmatrix}.$$

Welche zwei Variablen lassen sich aus dem Gleichungssystem $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(0,2,0)$ durch die jeweils dritte ausdrücken? Berechnen Sie die Differentiale der sich dabei ergebenden Funktionen an der $(0,2,0)$ entsprechenden Stelle.

$\boxed{\textbf{113}}$ Interpretieren Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, als Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, indem Sie $z = x + iy \in \mathbb{C}$ durch $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ersetzen. Berechnen Sie das Differential von g und untersuchen Sie, auf welcher Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ die Abbildung g ein lokaler Diffeomorphismus ist. Ist g ein Diffeomorphismus dieser Teilmenge W mit ihrer Bildmenge $g(W)$?

$\boxed{\textbf{114}}$ (*Kugelkoordinaten im* $\mathbb{R}^3$ [vgl. Aufgabe $\boxed{80}$(b)])
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(r,\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus?

(b) Nun sei $U :=]0,\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[\subseteq \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Bildmenge $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$, indem Sie für einen Punkt $(x,y,z) = f(r,\varphi,\theta)$ die Größen r, φ und θ geeignet als Radius, Winkel der Projektion auf die Ebene $z = 0$ und Winkel mit der z-Achse interpretieren (Skizze!).

(c) Wir setzen $g := f\,|_U\colon U \to V$. Zeigen Sie, dass g bijektiv ist.
Zusatzfrage: Ist g ein Diffeomorphismus?

$\boxed{\textbf{115}}$ Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen) stetig differenzierbar und $\nabla f(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, daß f konstant sein muß.

$\boxed{\textbf{116}}$ Taylorscher Satz mit Integralrestglied: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und das Segment $\{a + t\ xi : 0 \leq t \leq 1\}$ in U. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ $N+1$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(a+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!}\int_0^1 D^\alpha f(a+t\xi)\,dt\,.$$

$\boxed{\textbf{117}}$ Die Funktionen $f_1(x,y) = x^2+y^4$, $f_2(x,y) = x^2$, $f_3(x,y) = x^2+y^3$ besitzen alle den kritischen Punkt $(0,0)$. Berechnen Sie die Hessematrix dieser Funktionen und untersuchen Sie, welcher Extremwert vorliegt. Vergleichen Sie mit den Resultaten aus der Vorlesung. Was ist anders/falsch/was fehlt?

$\boxed{\textbf{118}}$ Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Ordnung zwei für die Funktion $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ im Punkt $(1,1)$.

$\boxed{\textbf{119}}$ Man untersuche folgende Funktionen auf Extrema:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

$\boxed{\textbf{120}}$ Sei A eine symmetrische $d \times d$ Matrix und $f(x) = Ax \cdot x$ (oder $\langle Ax, x\rangle$). Bestimmen Sie das Maximum von f auf der Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$, d.h., unter der Nebenbedingung $\|x\| = 1$.

$\boxed{\textbf{121}}$ Man berechne den kleinsten Abstand des Punktes $(3,12)$ von der Parabel $y^2 = 6x$.

$\boxed{\textbf{122}}$ Seien $a_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \ldots, n$ Punkte im $\mathbb{R}^d$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Summe der Abstandsquadrate

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \|x - a_j\|^2$$

ihr Minimum im Schwerpunkt $\xi = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \in \mathbb{R}^d$ annimmt. (Vergleiche "Methode der kleinsten Quadrate" in der Statistik etc.)

$\boxed{\textbf{123}}$ Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und

$$F(y) = \int_a^y f(x, y)\, dx$$

definiert. Zeigen Sie, daß F differenzierbar ist und daß $F'(y) = f(y, y) + \int_a^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$ ist. Anleitung: Betrachte $G(y, z) = \int_a^z f(x, y)\, dx$ und wende die Kettenregel geschickt an.

$\boxed{\textbf{124}}$ Die Gleichung $z^3 + z + y = 1$ hat für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x, y)$. Man zeige, daß $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne $\nabla g(1, 1)$. Man untersuche g auf Extrema.

Einige Zusatzbeispiele

$\boxed{\textbf{125}}$ Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar $(n \geq 1)$ und bei $x_0 \in]a, b[$ gelte:

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n-1 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.

(b) Ist n gerade, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Extremum. Dieses ist ein lokales Maximum, wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist, und ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Wenden Sie diese Kriterien auf die Funktion in Aufgabe $\boxed{50}$ (aus Einf. in die Analysis, SS 08) im Punkt $x_0 = 0$ an. (Fallunterscheidung $a = 0$ und $a > 0$.)

$\boxed{\textbf{126}}$ Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von sin oder cos (wählen Sie selbst) mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion darstellt. (Hinweis: vergleichen Sie z.B. die Argumentation in der VO, 10.11, Beispiel 1).)

$\boxed{\textbf{127}}$ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Im Punkt $c \in [a, b]$ gelte, daß

$$f^{(k)}(c) = 0 \qquad \text{für } 1 \leq k < n \quad \text{und } f^{(n)}(c) \neq 0\,.$$

Man beweise mittels des Satzes von Taylor und dem passenden Restglied folgende Aussage:

(a) Ist n ungerade, so besitzt f bei c kein lokales Extremum.

(b) Ist n gerade, so besitzt f bei c ein lokales Extremum, und zwar ist c ein lokales Maximum, wenn $f^{(n)}(c) < 0$, und ein lokales Minimum, wenn $f^{(n)}(c) > 0$.

128 Sei $c_n \neq 0$ für alle n und $\lim |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = r$, dann besitzen die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^{2k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^{2k+1}$ denselben Konvergenzradius $\sqrt{r}$.

129 Die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist genau dann gerade, wenn $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Sie ist genau dann ungerade, wenn nur ungerade Potenzen auftreten.

130 (a) Untersuchen Sie, für welche Parameter $s \in \mathbb{R}$ das uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \tag{2}$$

konvergent ist. (b) Setzen Sie die Reihenentwicklung $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x}(1-e^{-x})^{-1} = e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$ in das Integral ein und leiten Sie daraus die Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(s)\zeta(s)$$

ab, wobei Γ die Gammafunktion und $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ die Riemannsche Zetafunktion ist.

(c) Diskutieren Sie, welche Vertauschungen von Limiten etc. notwendig sind. Die genaue mathematische Argumentation ist subtil und findet sich in Forster, Analysis I, pp. 242 - 243.

131 Stellen Sie Überlegungen an, wie das ("unbestimmte") Integral

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

berechnet werden kann ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Welche Fälle können auftreten?

132 Gegeben eine stetige Funktion f auf einem Interval $[a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt$$

für $x \in [a, b]$. Bestimmen Sie F.

133 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, für die die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^{x_0}}$$

konvergiert. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^x}$ auf dem Intervall $[x_0, \infty]$ gleichmäßig konvergiert. (Bemerkung: Reihen dieser Form kommen in der Zahlentheorie häufig vor und heißen *Dirichletsche Reihen.*)

$\boxed{\mathbf{134}}$ Aus der VO, Beisp. 14.4, kennen wir die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $f(x) := (\pi - x)/2$ $(0 < x < \pi)$, $f(0) = f(2\pi) := 0$, nämlich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Wie wir festgestellt haben, konvergiert die Reihe punktweise gegen f. (Allerdings z.B. im Punkt $x = \pi/2$ nicht absolut.)

Zeigen Sie nun durch direkte Abschätzungen, dass für $0 < \delta < \pi$ auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ sogar gleichmäßige Konvergenz vorliegt.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass die Partialsummen im angegeben Intervall eine gleichmäßige Cauchy-Folge bilden. Dazu schreiben Sie die entsprechenden Teilsummen vermöge $s_m(x) := \sum_{k=1}^{m} \sin(kx)$ und mittels $\sin(kx)/k = (s_k(x) - s_{k-1}(x))/k$ um und wenden dann die sogenannte *Abelsche partielle Summation* an: es ist allgemein $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$, wobei $A_k := \sum_{j=1}^{k} a_j$ an eine Stammfunktion erinnert. Zusammen mit einer gleichmäßigen Schranke für $|s_l(x)|$ kommen Sie zum Ziel.)

Bemerkung: Das Ergebnis kann übrigens auch aus einem Konvergenzsatz über Fourier-Reihen gefolgert werden, weil f stückweise stetig und stetig differenzierbar ist und auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ stetig ist [vgl. Heuser, Band 2, Satz 137.2].

$\boxed{\mathbf{135}}$ Sei $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ und

$$O_n =]\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}[\,.$$

Dann ist $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von A, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

$\boxed{\mathbf{136}}$ Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $K = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$ (Einheitskugel bezüglich der Norm).

(a) Falls $x, y \in K$ und $0 \leq \lambda \leq 1$, dann ist $\lambda x + (1 - \lambda) y$ ebenfalls in K. Interpretieren Sie diese Eigenschaft geometrisch (Jargon: "K ist konvex")

(b) Zeigen Sie für die Euklische Norm $\|\cdot\|_2$, daß aus $x, y \in K, 0 \leq \lambda \leq 1$ und $\|\lambda x + (1 - \lambda) y\| = 1$ folgt, daß $x = y$. ("Die Euklische Einheitskugel ist strikt konvex".)

$\boxed{\mathbf{137}}$ Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wenn X kompakt ist, dann konvergiert jede Cauchy-Folge. ("Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig".)

$\boxed{\mathbf{138}}$ Sei $f : X \to Y$ eine *bijektive* Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y. Wenn X kompakt ist, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig.

$\boxed{\mathbf{139}}$ Lebesguesches Lemma: Sei K eine kompakte Menge eines metrischen Raums (X, d) und $(O_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von X. Man beweise: Es gibt eine Zahl $\lambda > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Teilmenge $A \subseteq K$ mit $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda$ gibt es ein $j \in J$, sodaß $A \subseteq O_j$. (Vergleiche mit dem Beweis der Satzes von Heine Borel.)

140 Beweisen Sie die Ungleichungen von Hölder und Minkowski für Funktionen, d.h., für alle $f, g \in C([a,b])$ und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

und

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$