

KORREKTUREN ZU DEN “ÜBUNGEN AUS ANALYSIS”

Beispiel 17

Berechnen Sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x+x^2-x^3}$$

(Korrektur: Obere Integralgrenze soll $1/2$ statt 1 sein, damit das Integral als Riemann-Integral definiert ist).

Beispiel 18

Sei f eine gerade Funktion in $C^n(I)$, wo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und I ein offenes Intervall ist, das 0 enthält. Zeigen Sie, daß die zugehörigen Taylorpolynome um $a = 0$ und die Taylorreihe jeweils gerade Funktionen sind.

(Korrektur: damit die Aufgabe sinnvoll ist, muß der Punkt 0 natürlich in I liegen.)

Beispiel 19

Berechnen Sie für $\alpha \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

(Korrektur: $\sum k^\alpha$ statt $\sum n^\alpha$)

Beispiel 20

(ii) Leiten Sie daraus die Ungleichung

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

ab.

(Korrektur: Koeffizient e statt e^{-1})

Beispiel 23

Sei $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ für $x > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel, aber ohne Benutzung des Logarithmus selbst, daß (i) $F(xy) = F(x) + F(y)$, $x, y > 0$

(Korrektur: $F(xy) = F(x) + F(y)$, statt $F(xy) = F(x)F(y)$)

Beispiel 35

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe um $x_0 \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die *Formel von Hadamard* für den Konvergenzradius R :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

(mit der Vereinbarung $R = 0$ zu setzen, falls der Limes superior unendlich ist, bzw. $R = \infty$, falls er Null ist).

(Korrektur: ergänze Potenz in $(x-x_0)^n$)

Beispiel 41

Entwickeln Sie $\sinh(x)$ in eine Potenzreihe und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, daß gilt $\sin(ix) = i \sinh(x)$.

(Korrektur: Ergänze i in $\sin(ix) = i \sinh(x)$.)

Beispiel 42

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k + e^{-k}}{2} x^k$$

(Korrektur des Summationsindex)

Beispiel 44

Für $|x| < 1$ berechne man die Summen der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

(Korrektur: Summationsindex ist k)

E-mail address: karlheinz.groechenig@univie.ac.at