Übungen
Karl Sigmund
WS 2011/12

(1) Berechnen Sie $\frac{3}{\frac{7}{2}-\frac{11}{3}}$ sowie $\frac{3-i}{2+3i}$ und den Betrag von $12+8i$.

(2) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{[\cos(3x)]^2}$ sowie eine Stammfunktion von $3\sin x - \frac{1}{x-1}$. Geben Sie die Definitionsbereiche an.

(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1/2, 0 \leq y \leq \sin x\}$

(4) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von $f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{5}$.

(5) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen $0 \leq e^{-x} < 1$ und $|2-3x| < 3$ in $\mathbb{R}$.

(6) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $1+3+5+...+(2n-1) = ...$

(7) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen $x \geq -1$.

(8) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $n^3 - n$ ist für alle natürlichen n durch 3 teilbar.

(9) Für welche natürlichen Zahlen n gilt $2^n > n^2$?

(10) Verwenden Sie die Summenschreibweise, um $1+3+9+27+81+243$, $a_2 + a_4 + ... + a_{10}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$ darzustellen.

(11) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

(12) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} (k^3+k) = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}.$$

(13) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}.$$

(14) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

falls $q \neq 1$.

(15) Berechnen Sie $\binom{5}{3}$, $\binom{8}{3}$ und $\binom{12}{10}$.

(16) Beweisen sie mittels Mengentafel, dass $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ für je drei Mengen A, B, C.

(17) Ebenso für $C\backslash(A\cap B) = (C\backslash A)\cup(C\backslash B)$ und $C\backslash(A\cup B) = (C\backslash A)\cap(C\backslash B)$

(18) Sei $f : A \longrightarrow B$. Wenn $A_1, A_2 \subseteq A$ so folgt $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Zeigen Sie mit einem einfachen Beispiel, dass nicht immer Gleichheit gilt. Zeigen Sie: wenn f injektiv ist, dann doch.

(19) Sei $f : A \longrightarrow B$. Wenn $B_1, B_2 \subseteq B$ so gilt $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Ebenso für $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(20) Die Menge A besitze n, die Menge B m Elemente $(m, n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie: es gibt m^n Abbildungen von A in B. Es gibt $m(m-1)...(m-n+1)$ injektive Abbildungen. Wann gibt es bijektive Abbildungen, und wieviele sind es? (Bitte nicht mit vollständiger Induktion!)

(21) Ist die folgende Relation auf R,

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad a^4 \leq b^4$$

eine Ordnungsrelation?

(22) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(23) Berechnen Sie 7^{100} modulo 20, sowie 112605^2 modulo 10. Lösen Sie die Gleichung $x^2 = -\bar{3}$ im Restklassenring Z_5.

(24) Berechnen Sie den Flächeninhalt und die Winkel des von den Vektoren $\binom{6}{3}$ und $\binom{1}{-2}$ aufgespannten Parallelogramms.

(25) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die normal zur Geraden l mit der Gleichung $3x_1 - x_2 = 4$ ist, und den Punkt $\binom{2}{4}$ enthält.

(26) Wo schneiden g und l einander?

(27) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene

$$\varepsilon := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(28) Liegt die Gerade

$$h := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : \rho \in \mathbb{R} \right\}$$

in der Ebene ε?

(29) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ von der Ebene ε.

(30) Liegt der Punkt p auf der Geraden h?

(31) Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei injektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f : X \to Z$ injektiv ist. Wenn umgekehrt $g \circ f : X \to Z$ injektiv ist, sind dann auch f und g injektiv?

(32) Berechnen Sie $(-1+i)^8$. (Es geht einfach!)

(33) Ist die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$,

$$nRm \quad \text{genau dann wenn} \quad n^3 \leq m^3$$

eine Ordnungsrelation? Begründen Sie die Antwort!

(34) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen folgender Gleichung:
$$z^2 - (7+2i)z + 12 + 8i = 0.$$
(35) Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch: (A) $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m$; (B)$\exists n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : n = m + 1$

(36) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den grössten gemeinsamen Teiler von 9782 und 9514.

(37) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := ax^2 + bx + c,$$
bei $x = -1$ eine Nullstelle besitzt, dort Steigung 2 hat, und bei $x = 1$ einen Extremwert besitzt.

(38) Berechnen Sie $\frac{2+i}{3-4i}$ und $\frac{\frac{7}{12}-\frac{1}{8}}{\frac{4}{7}}$ sowie den Betrag von $10 + 7i$.

(39) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \cos(3x) + 7x^3$ und eine Stammfunktion von $-x^3 + (2x+1)^2$.

(40) Welchen Wert hat $\cos(\pi/4)$? Wo nimmt die Funktion $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ den Wert $1/2$ an? (Hinweis: der rechte Winkel hat Bogenmass $\pi/2$.)

(41) Wie gross ist der Inhalt der von der x-Achse und dem Graphen von $-x^2 + 4$ umschlossenen Fläche?

(42) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen folgender Gleichung:
$$z^2 + 8 + 4i = (5+i)z.$$
(43) Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -6 \end{smallmatrix}\right)$ zwei Matrizen. Berechnen Sie die Determinanten von A und B sowie die Matrixprodukte AB und BA.

(44) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ aufgespannten Parallelogramms.

(45) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die normal zur Geraden l mit der Gleichung $3x_1 - x_2 = 14$ ist, und den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ enthält.

(46) Wo schneiden g und l einander?

(47) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene
$$\varepsilon := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$
(48) Liegt die Gerade
$$h := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} : \rho \in \mathbb{R} \right\}$$
in der Ebene ε?

(49) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ von der Ebene ε. Liegt der Punkt p auf der Geraden h?