**Übungen zur Höheren Analysis** *Josef Hofbauer* **WS 2010**

1. Im folgenden werden einige interessante Kurven behandelt. Zeichnen Sie die Kurven und beweisen Sie die erwähnten Eigenschaften. Der sinnvolle Einsatz eines Computeralgebrasystems wie *Mathematica* oder *Derive* wird empfohlen. Mehr Information über diese und viele andere Kurven finden Sie unter
*http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Curves/Curves.html*

2. Die Kurve in Parameterdarstellung $f(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}), t \in \mathbb{R}$ definiert den Einheitskreis (ohne $(-1, 0)$).

3. Die durch $f(t) = (\sin 2t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ definierte Kurve bildet einen Achter. Berechnen Sie die Tangentialvektoren im Doppelpunkt $(0, 0)$.

4. Zeichnen Sie die *Zykloide* $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

5. The *Astroid* is determined in Cartesian coordinates by $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ or parametrically by $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$. The length of the astroid is $6a$ and its area is $3\pi a^2/8$. It can be formed by rolling a circle of radius $\frac{a}{4}$ on the inside of a circle of radius $a$.

6. Die Länge der *Kettenlinie* $f(x) = (x, \cosh x)$ im Intervall $[0, a]$ ist $\sinh a$. Zeichnung.

7. Die *Archimedische Spirale* ist in Polarform gegeben durch $r(\varphi) = c\varphi$, $\varphi \geq 0$. Berechnen Sie ihre Länge für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

8. Die *logarithmische Spirale* ist in Polarform gegeben durch $r(\varphi) = e^{a\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie ihre Länge für $\varphi \in [-\alpha, 0]$ und im Limes $\alpha \to \infty$.

9. Die Bogenlänge einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ist gegeben durch $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$.

10. Welche Kurve in $\mathbb{C}$ wird durch folgende Parameterform beschrieben ($a \in \mathbb{R}$ fest, $t \in \mathbb{R}$)?
a) $z(t) = ae^{it} + \frac{1}{a}e^{-it}$ b) $z(t) = a(1 + e^{it})^{-2}$

11. Die *Kardioide* (Herzkurve) lautet in Parameterform
$$x = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t),$$
in cartesischen Koordinaten $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$ und in Polarkoordinaten $r = 2a(1 - \cos\theta)$. Sie entsteht durch Abrollen eines Kreises auf einem zweiten, gleich großen Kreis. Ihr Umfang ist $16a$, ihre Fläche $6\pi a^2$. Die Sehnen durch die Spitze 0 haben alle die gleiche Länge $4a$.

12. Berechnen Sie die Länge eines Parabelbogens $f(x) = (x, x^2)$ im Intervall $[0, a]$.

13. Berechnen Sie die Krümmung der Parabel $y = x^2$.

14. Die Kegelschnitte (mit einem Brennpunkt in $(0, 0)$) haben folgende gemeinsame Darstellung in Polarkoordinaten: $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$.
Für $\varepsilon = 0$ ergibt sich ein Kreis, für $0 < \varepsilon < 1$ Ellipsen, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel und für $\varepsilon > 1$ Hyperbeln.

15. Berechne die Krümmungsmittelpunkte der Schraubenlinie $f(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$.

16. Bestimme die Krümmung der Kurve $f(t) = (t, t^2, t^3)$.

17. Leite die Formel für die Krümmung einer ebenen Kurve aus der Definition der Krümmung einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ her.

18. Welche der folgenden Funktionen sind von beschränkter Variation auf $[0,1]$?
$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$, $f(x) = \sin(100\pi x^2)$

19. Let $a_n$ be a sequence of real numbers satisfying $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. Show that there are bounded increasing sequences $c_n$ and $d_n$ such that $a_n = c_n - d_n$.

20. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$: $\quad ||x||_\infty \leq |x| = ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$.

21. In jedem metrischen Raum gilt:

    Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.
    Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
    Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

22. Seien $X, Y, Z$ metrische Räume. Wenn $f : X \to Y$ stetig im Punkt $x \in X$ und $g : Y \to Z$ stetig in $y = f(x)$ ist, dann ist $g \circ f$ stetig in $x$.

23. Sei $f : K \to Y$ stetig, $K$ kompakt metrisch und $Y$ metrisch. Dann ist $f$ gleichmäßig stetig.

24. $A$ ist genau dann offen wenn $A \cap \partial A = \emptyset$.
$A$ ist genau dann abgeschlossen wenn $\partial A \subseteq A$.

25. Für jede Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes $X$ gilt:

    1) $A \setminus \partial A$ ist offen.
    2) $A \cup \partial A$ ist abgeschlossen.
    3) $\partial A$ ist abgeschlossen.
    4) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

26. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind offen, abgeschlossen, kompakt?

    a) Die $x_1$ Achse $\quad \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}$,
    b) die rechte Halbebene $\quad \{(x_1, x_2) : x_1 > 0\}$,
    c) $\{x : |x| \geq 1\}$,
    d) $\{(x_1, x_2) : (0 \leq x_1 \leq 1 \text{ und } x_2 = x_1^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}) \text{ oder } (x_1 = 1 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq 1)\}$.

27. Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist der Graph von $f$, $\{(x, y) : y = f(x)\}$, eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

28. Zeige: Für jedes $L > 0, \alpha > 0, M > 0$ ist die Menge

$$\mathcal{F}_{L,\alpha,M} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : |f(a)| \leq M, |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in [a,b]\}$$

    eine kompakte Teilmenge von $C[a,b]$ (mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$).

29. Berechnen Sie die Tangentialebene an den Graphen von $f(x,y) = 2xy^2 + \sin(x+y)$ im Punkt $(2,-3)$.

30. Zeigen Sie: Wenn $f : U \to \mathbb{R}^m$ (wobei $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist) im Punkt $x \in U$ differenzierbar ist, dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung $\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ und diese ist gleich $f'(x)v$.

31. Ist $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ in $(0,0)$ differenzierbar? stetig? Existieren dort die partiellen Ableitungen? Zeichnen Sie den Graphen.

32. Leiten Sie die Quotientenregel aus der mehrdimensionalen Kettenregel her, indem Sie $t \mapsto (u(t), v(t))$ und $g(u,v) = u/v$ zusammensetzen.

33. Zeichnen Sie Höhenlinien und Gradientenfeld von $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2$. (Mathematica-Befehle: ContourPlot,GradientFieldPlot)

34. Sei $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$. Bestimmen Sie die Kurve $(x(t), y(t), z(t))$ mit $(x(0), y(0), z(0)) = (-3, 2, 1)$, deren Tangentenvektor in jedem Punkt in Richtung des Gradienten von $f$ zeigt.

35. Berechnen Sie die Ableitung von $x \mapsto u(x)^{v(x)}$, indem Sie die mehrdimensionale Kettenregel auf $g(u,v) = u^v$ anwenden.

36. Berechnen Sie die Ableitung von $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$, indem Sie die mehrdimensionale Kettenregel auf $g(u,v) = \int_u^v f(t)dt$ anwenden.

37. Sei $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$. Zeige: $f$ besitzt alle Richtungsableitungen in $(0,0)$. Ist $f$ dort stetig bzw. differenzierbar?

38. Sei $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Man zeige, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mindestens ein $y \in \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 0$ existiert. Für welche $x$ existieren mehr als ein $y$? Wo ist $y$ als Funktion von $x$ darstellbar? Man skizziere diese Kurve (das *cartesische Blatt*) und zeige, dass $x + y + 1 = 0$ eine Asymptote ist.

39. Sei $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $f$ lokal invertierbar? Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijektiv? Man beschreibe $f$ in Polarkoordinaten.

40. Sei $f(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$. Berechne $f'(x,y,z)$. Wo ist diese Abbildung invertierbar, wo nicht?

41. Sei $u(x,y) = U(r,\varphi)$ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Zeigen Sie, dass $u_{xx} + u_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi}$ gilt.

42. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $C^2$–Funktion, $c \in \mathbb{R}$ und $z(x,t) = f(x+ct)$. Berechnen Sie $z_{tt} - c^2 z_{xx}$.

43. Die $C^2$–Funktion $u = u(x,t)$ löse die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(c \neq 0)$. Sei $\xi = x - ct, \eta = x + ct$ und $v(\xi,\eta) = u(x,t)$. Man zeige, dass dann $v_{\xi\eta} = 0$ ist. Wie sehen die Lösungen $v$ dieser partiellen Differentialgleichung aus?

44. Die Funktion $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $(f(0,0) = 0)$ hat partielle Ableitungen 2. Ordnung $f_{xy}(0,0) = -1, f_{yx}(0,0) = +1$.

45. Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von $f(x,y,z) = \log(z^2+xy)$ um den Punkt $(0,0,1)$.

46. Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f(x,y) = \sin(x+y)+\cos(x-y)$ um den Punkt $(0,0)$.

47. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $s$ falls für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $f(tx) = t^s f(x)$. Zeigen Sie, dass für eine homogene Funktion vom Grad $s$ gilt: $\sum_i x_i f_{x_i} = sf$.

48. Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = x^2 - y^2$ auf der Menge $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

49. Zeigen Sie, dass für $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ der Punkt $O = (0,0,0)$ der einzige kritische Punkt ist. Bestimmen Sie eine Gerade durch $O$, auf welcher $f$ im Punkt $O$ ein Minimum hat und eine andere Gerade, auf welcher $f$ in $O$ ein Maximum hat.

50. Man bestimme die Dreiecke, für die das Produkt der Sinusse der Winkel maximal ist; d.h. für die $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ in $\{(x,y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi, 0 \le x+y \le \pi\}$ maximal wird.

51. Sind die folgenden quadratischen Formen positiv definit, negativ definit oder indefinit?
a) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy - 6xz + 2yz$
b) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 6yz$
c) $x^2 - 2xy - 2xz + 4yz$

52. Mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatormethode bestimme man den kleinsten Abstand der Geraden $ax + by = c$ vom Nullpunkt.

53. Bestimmen Sie Minimum und Maximum von $f(x,y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x^k + y^k = 1$, $x, y \ge 0$, wobei $k$ eine gegebene natürliche Zahl ist.

54. Bestimmen Sie den kleinsten Abstand des Punktes $(3,12)$ von der Parabel $y^2 = 6x$.

55. Berechnen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = 4x^3 - 3xy$ auf $x^2 + y^2 \le 1$.

56. Berechnen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = xy + \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ auf $x^2 + y^2 \le 1$.

57. Berechnen Sie den kleinsten Abstand der Ebene $2x_1+x_2-x_3+x_4 = 4$, $x_1+x_2-x_3+x_4 = -6$ vom Nullpunkt im $\mathbb{R}^4$.

58. Berechnen Sie das Integral $\int_0^a t^n e^{-t} dt$ durch Differenzieren von $F(x) = \int_0^a e^{-tx} dt$.

59. Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx$ für $a, b > 0$.

60. Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ stetig.

61. Sei $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ falls $x^2+y^2 \leq 1$ und $f(x,y) = 0$ sonst. Berechnen Sie das Doppelintegral $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y)dxdy$.

62. Sei $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Berechnen Sie die beiden Doppelintegrale $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx$.

63. Erfüllen die Funktionen $f_1(x,y) = e^x \sin y + 2xy$, $f_2(x,y) = e^x \cos y + x^2 + 1$ die Integrabilitätsbedingungen? Falls ja, wie lautet die Stammfunktion?

64. Für welche $a,b,c,d$ existiert eine Stammfunktion von $f(x,y) = (x^a y^b, x^c y^d)$?

65. Besitzt $f(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$?

66. Berechnen Sie die Hesse'sche Matrix von $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ für $x^2+y^2 < 1$. Zeigen Sie, dass diese negativ definit ist und $f$ daher streng konkav ist.

67. Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$ und bestimmen Sie $\sup f$ und $\inf f$. Zeichnen Sie den Graphen mit Plot3D und die Höhenlinien mit ContourPlot.

68. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x$. Bestimme alle Maxima und Minima von $f$ auf dem Schnitt der Ebene $x+y+z=0$ mit der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2=1$.

69. Finden Sie diejenige $C^2$ Funktion $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1$, für die $\int_0^1 y^2 + y'^2 dx$ minimal ist.

70. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ hat einen kritischen Punkt im Ursprung $O = (0,0)$. Zeige, dass $f$ entlang jeder Geraden durch den Ursprung ein lokales Minimum in $O$ besitzt. Hat $f$ ein lokales Minimum in $O$?

71. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ über den Kreis $x^2 + y^2 \leq R^2$ und das Quadrat $[0,R] \times [0,R]$ und und berechnen Sie die Limiten $R \to \infty$.

72. Berechne $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xy + yz + xz) dxdydz$

73. Betrachte die Funktion $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 1$ falls $x = 0, y \in \mathbb{Q}$ oder $x = 1, y \in \mathbb{Q}$ oder $x \in \mathbb{Q}, y = 0$ oder $x \in \mathbb{Q}, y = 1$ (also an den rationalen Punkten am Rand des Quadrates) und $f(x,y) = 0$ sonst.
Zeige: a) $f$ ist Riemann integrierbar.
b) Die beiden Doppelintegrale $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dydx$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dxdy$ existieren nicht (als R-Integrale).

74. Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = 1$ falls $(x,y) = (\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2l-1}{2^n})$ mit $n, k, l \in \mathbb{Z}$ und $f(x,y) = 0$ sonst.
Zeige: Für jedes $x$ existiert das Riemann–Integral $\int_0^1 f(x,y) dy$ und weiters das Doppelintegral $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dydx$.
$f$ ist aber nicht Riemann integrierbar.

75. Sei $f : [0,\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \cos x$ falls $y \in \mathbb{Q}$ und $f(x,y) = 0$ sonst. Welches der Doppelintegrale $\int_0^\pi \int_0^1 f(x,y) dydx$ und $\int_0^1 \int_0^\pi f(x,y) dxdy$ existiert? Ist $f$ Riemann integrierbar?

76. Sei $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$. Zeige: $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dydx = \frac{1}{2}$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dxdy = -\frac{1}{2}$.

77. Berechnen Sie den Inhalt der von der Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ eingeschlossenen Fläche.

78. Berechnen Sie den Inhalt der vom Cartesischen Blatt $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ eingeschlossenen Fläche. Versuchen Sie a) Polarkoordinaten,
b) die Koordinatentransformation $x + y = u, \quad x - y = v$.

79. Leiten Sie aus der Transformationsformel auf Polar- (bzw. Zylinder-)koordinaten die Formel für das Volumen eines Drehkörpers (siehe Analysis II) her.

80. Berechnen Sie das Volumen der (dreidimensionalen) Kugel mit Radius $R$ mit Hilfe der Transformationsformel auf Kugelkoordinaten.

81. Berechnen Sie das $n$-dimensionale Volumen des Simplex
$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1\}$ für $n = 2, 3, 4$.

82. Berechnen Sie das *Dirichlet' sche Integral*
$\int_{\Delta_n} x_1 x_2 \ldots x_n (1 - x_1 - \cdots - x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$,
(allgemein $\int_{\Delta_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} (1 - x_1 - \cdots - x_n)^{p_0} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$) für $n = 1, 2, 3$.

83. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeige: Der Graph von $f$ ist eine Nullmenge im $\mathbb{R}^2$.

84. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int y^2 dx - x^2 dy$
a) entlang des Geradenstücks von $(0,1)$ nach $(1,0)$,
b) entlang des Kreisbogens von $(0,1)$ nach $(1,0)$.

85. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse mittels eines Kurvenintegrals.

86. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Zykloide $x(t) = t - \sin t, y(t) = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ und der $x$–Achse.

87. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (oder $x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t$) mittels eines Kurvenintegrals.

88. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Kardioide $x(t) = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y(t) = a(2\sin t - \sin 2t)$ mittels eines Kurvenintegrals.

89. Für die Transformation auf Kugelkoordinaten $\Phi(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$ berechnen Sie die Determinante der Ableitung $\det \Phi'(r,\varphi,\theta)$.

90. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit einem (lokalen) Minimum bei 0. Weiters sei 0 der einzige kritische Punkt von $f$, d.h. $f'(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$. Folgt dann $f(x) \ge f(0)$ für alle $x$?

91. Berechne die Oberfläche eines Torus (mit Radien $r, R$).

92. Berechne die Oberfläche der *Vivianischen Fläche*, das ist der Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ mit dem Zylinder $x^2 - rx + y^2 \le 0$ (Zeichnung!).

93. Berechne das Integral $\int_B \frac{\sin x}{x} d(x,y)$. Dabei sei der Bereich $B$ das Dreieck, das von den Punkten $(0,0),(1,0)$ und $(1,1)$ aufgespannt wird.

94. Berechne den Flächeninhalt des Paraboloidstückes $z = x^2+y^2$ das zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 4$ liegt.

95. Berechne den Flächeninhalt des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$ mit $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x \geq 0, y \geq 0$.

96. Berechne die Oberfläche $F_\varepsilon$ von $z = \sqrt{2xy}$ über dem Rechteck $[\varepsilon, a] \times [\varepsilon, b]$ für $\varepsilon > 0$ und dann $\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon$.

97. Berechne mit dem Gaußschen Integralsatz: $\int_S (x^3, y^3, z^3) \cdot \mathbf{n} do$, wobei $S$ die Kugeloberfläche mit Radius $R$ und $\mathbf{n}$ der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor ist.

98. Berechne die Rotation von $F(x,y,z) = (xy, x^2z, y)$.

99. Für differenzierbare Funktionen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zeige:
$\operatorname{rot}(\varphi F) = \varphi \operatorname{rot} F + \operatorname{grad} \varphi \times F$.

100. Zeige: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$ für $C^2$–Funktionen $\varphi : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^3$ offen).

101. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig, $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine $C^1$–Funktion mit $\operatorname{rot} F = 0$. Dann existiert eine $C^2$–Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $F = \operatorname{grad} \varphi$.

102. Zeige: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$ für $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine $C^2$–Funktion, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen.

103. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig, $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine $C^1$–Funktion mit $\operatorname{div} f = 0$. Dann existiert eine $C^2$–Funktion $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit $f = \operatorname{rot} F$.

104. Sei $\varphi(x) = \frac{1}{|x|}$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $U = K_r(0)$. Zeige:

$$\int_{\partial U} \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} do = -4\pi.$$

Vergleiche mit dem Divergenzsatz!

105. Zeige: Sei $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeige, dass die Funktion $f : U \to U$, $f(x) = \frac{x}{|x|^2}$, ein $C^1$–Isomorphismus (Diffeomorphismus) ist, d.h. $f$ ist bijektiv, und $f$ und $f^{-1}$ sind $C^1$, und $f'(x)$ ist invertierbar $\forall x \in U$.

106. Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f_1(x) = x_1x_3 - x_2^2, \quad f_2(x) = x_2x_4 - x_3^2, \quad f_3(x) = x_1x_4 - x_2x_3.$$

Man zeige, dass $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} : f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

107. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$f_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 6 = 0, \quad f_2(x, y, z, t) = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 8 = 0$$

Lässt sich in einer Umgebung des Punktes $(0, -1, 2, 1)$ aus diesen Gleichungen $z$ und $t$ eliminieren, d.h. kann man dort $z$ und $t$ als Funktionen von $x, y$ darstellen?

108. Sei $\omega_1 = xy^2dx \wedge dy - zdy \wedge dz, \quad \omega_2 = xdx + ydy + zdz$. Berechne $\omega_1 \wedge \omega_2$.

109. Sei $\omega = (y^2 + xz)dx + \sin(x + y)dy + e^{xz}dz$ eine 1-Form im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $d\omega$ und $d(d\omega)$.

110. Seien $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $C^1$–Funktionen. Berechne $df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_n$.

111. Zeige $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p\omega_1 \wedge d\omega_2$. (Was ist $p$?)

112. Wann gilt $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1$? (Dabei sei $\omega_i$ eine $r_i$–Form.)