96. Entwickle $|x|$ (im Intervall $[-1,1]$) nach den Legendrepolynomen.

97. Leite aus der Partialbruchreihe des $\cot x$ die Partialbruchreihen von $\tan x$ und $\frac{1}{\sin x}$ her. Hinweis: $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ und $\frac{1}{\sin x} = \cot\frac{x}{2} - \cot x$.

98. Zeige $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

99. Zeige die Legendresche Verdopplungsformel

$$2^x(\frac{x}{2})!(\frac{x-1}{2})! = \sqrt{\pi}x!$$

und berechne damit nocheinmal $(\frac{1}{2})!$.

100. Zeige die Verallgemeinerung von Gauß für $m \in \mathbb{N}$:

$$m^{x+\frac{1}{2}}(\frac{x}{m})!(\frac{x-1}{m})!\cdots(\frac{x-m+1}{m})! = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}x!.$$

Können Sie $(\frac{1}{3})!$ berechnen?

101. Zeige:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)} = \frac{a!\ b!}{(a+b)!}$$

102. Zeige: $\lim_{x\to 1-}(1-x)^{p+1}\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n = p! \quad (p > -1)$

Im folgenden werden einige interessante Kurven behandelt. Zeichnen Sie die Kurven und beweisen Sie die erwähnten Eigenschaften. Der sinnvolle Einsatz eines Computeralgebrasystems wie *Mathematica* oder *Derive* wird empfohlen. Mehr Information über diese und viele andere Kurven finden Sie unter
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Curves/Curves.html .

103. Die Kurve in Parameterdarstellung $f(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}), t \in \mathbb{R}$ definiert den Einheitskreis (ohne $(-1,0)$).

104. Die durch $f(t) = (\sin 2t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ definierte Kurve bildet einen Achter. Berechnen Sie die Tangentialvektoren im Doppelpunkt $(0,0)$.

105. Zeichnen Sie die *Zykloide* $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

106. The *Astroid* is determined in Cartesian coordinates by $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ or parametrically by $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$. The length of the astroid is $6a$ and its area is $3\pi a^2/8$. It can be formed by rolling a circle of radius $\frac{a}{4}$ on the inside of a circle of radius a.

107. Die Länge der *Kettenlinie* $f(x) = (x, \cosh x)$ im Intervall $[0, a]$ ist $\sinh a$. Zeichnung.

108. Die *Archimedische Spirale* ist in Polarform gegeben durch $r(\varphi) = c\varphi$, $\varphi \geq 0$. Berechnen Sie ihre Länge für $\varphi \in [0, 2\pi]$.