22. Berechne die Fläche zwischen dem Halbkreis $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ und dem darunterliegenden Kreisbogen von $(-1, 0)$ nach $(1, 0)$ mit Mittelpunkt $(0, -1)$.
(nach Hippokrates von Chios, um 450 v. Chr.)

23. Berechne die Viertelkreisfläche $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ näherungsweise durch Ober- und Untersummen auf mindestens zwei Dezimalstellen genau.

24. Integriere $\int x \log(x^2)\,dx, \quad \int x\sqrt{1+x}\,dx$

25. Berechne $\int x \sin x\,dx, \quad \int x \cos x\,dx, \quad \int \sin^2 x\,dx, \quad \int \sin x \cos^3 x\,dx, \quad \int \sin^3 x\,dx.$

26. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen. Zeige:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \cdot \int_a^b |g(x)|\,dx$$

27. Leite den Mittelwertsatz der Integralrechnung aus dem MWS der Differentialrechung her.

28. Berechne: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int x^3 e^{-x^2}\,dx$

29. Berechne: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx, \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx.$

30. $\int x\sqrt{1-5x}\,dx, \quad \int \frac{x}{1-x^2}\,dx$

31. $\int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{y}}\,dy$

32. Berechne das Volumen eines Drehellipsoides.

33. Berechne das Volumen des Ringes, der durch Rotation des Kreises $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ $(a > r)$ um die y-Achse entsteht.

34. Berechne die Länge des Bogens der Kurve $f(x) = \sqrt{(x+1)^3}$ zwischen $x = 3$ und $x = 8$.

35. Berechne den Umfang der Ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ näherungsweise auf mindestens zwei Stellen genau.

36. Für welche α existieren die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$?
Berechne ihren Wert.

37. Welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren?
$\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx, \quad \int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x^3}\,dx.$

38. Leite Rekursionsformeln für die Integrale $I_n = \int x^n e^x\,dx$, $J_n = \int x(\log x)^n\,dx$, $K_n = \int \cos^n x\,dx$ her.

39. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

40. Die Astroide ist gegeben durch die Gleichung $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$. Zeichne diese Kurve. Berechne den Umfang und die Fläche.

41. Berechne das Integral $\int_0^\pi \sin x\, dx$ mittels Riemannsummen der Gestalt $\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^n \sin\frac{i\pi}{n}$ und der Formel aus Bsp. 9.

42. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar (und daher beschränkt). Zeige, dass die Funktion $F(x) = \int_0^x f$ Lipschitz–stetig ist.
Erkläre an Hand eines Beispiels einer integrierbaren, unstetigen Funktion f den Unterschied zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

43. Berechne $\int \cot x\ dx$.

44. $\int \frac{dx}{x\log x}$, $\quad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx \quad$, $\int \frac{x}{1-x^2}\ dx$

45. Zeige, dass die Fläche der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich $ab\pi$ ist.

46. $\int \arctan x\ dx$, $\quad \int \arcsin x\ dx$

47. Berechne das Volumen der 4-dimensionalen Kugel.

48. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\ dx$

49. $\int \frac{x\ dx}{x^3-3x+2}$, $\int \frac{x^2\ dx}{x^4+1}$,
$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$, $\int \frac{x^3\ dx}{x^3-x^2-x+1}$

50. $\int \frac{d\varphi}{a\sin\varphi+b\cos\varphi}$

51. Berechne die Oberfläche einer Kugelkappe.

52. Berechne die Oberfläche eines Rotationsparaboloids ($f(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x \le a$).

53. Skizziere (mit Computer) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Partialsummen der Fourierreihe $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \to \frac{\pi-x}{2}$ für $0 < x < 2\pi$.

54. Multipliziere die 2. Gleichung aus Bsp. 9 mit x und integriere von 0 bis π. Leite daraus die Gleichung $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$ her.

55. Berechne die ersten Partialsummen der Taylorreihe für $\log(1+x)$ an den Stellen $x = 1.5$, $x = 1.2$, $x = 1.1$ und $x = 1.01$ und gewinne daraus Schranken für die entsprechenden Logarithmen.

56. Entwickle $\ln x$ um $x_0 = a > 0$ in eine Taylorreihe.

57. Leite die Taylorreihe von $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ (für $-1 < x \le 1$) durch Integration von $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$ her.

58. Beweise: Der Umfang einer Ellipse $\quad 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\ d\varphi$ ist $\ge \pi(a+b)$.

59. Berechne mittels Trapezregel und Keplerscher Fassregel (Simpsonregel) näherungsweise das Integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.