

### Mathematische Randbemerkungen 3. Gibt es mathematische Objekte?

G.H. Hardy hat im Jahr 1940 in „A Mathematician’s Apology“ (online auf <http://www.math.ualberta.ca/~mss/books/A%20Mathematician's%20Apology.pdf>) seine Ansichten zur Realität der Mathematik dargelegt (p. 22): “By physical reality I mean the material world, ... the world which physical science tries to describe. ... For me, and I suppose for most mathematicians, there is another reality, which I will call ‘mathematical reality’; and there is no sort of agreement about the nature of mathematical reality among either mathematicians or philosophers. Some hold that it is ‘mental’ and that in some sense we construct it, others that it is outside and independent of us. A man who could give a convincing account of mathematical reality would have solved very many of the most difficult problems of metaphysics. If he could include physical reality in his account, he would have solved them all. I should not wish to argue any of these questions here even if I were competent to do so, but I will state my own position dogmatically in order to avoid minor misapprehensions. I believe that mathematical reality lies outside us, and that our function is to discover or observe it, and that the theorems we prove, and which we describe grandiloquently as our “creations” are simply our notes of our observations. This view has been held, in one form or another, by many philosophers of high reputation from Plato onwards...”

Und Kurt Gödel schrieb 1964 in „What is Cantor’s continuum problem?“ (vgl. Collected Works II, p. 170): “Despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don’t see any reason why we should have any less confidence in this kind of perception, i.e. in mathematical intuition, than in any sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future. The set-theoretical paradoxes are hardly more troublesome for mathematics than deceptions of the senses are for physics... New mathematical intuitions leading to a decision of such problems as Cantor’s continuum hypothesis are perfectly possible.”

Derartige Anschauungen werden als mathematischer Platonismus bezeichnet.

Mich hat die Lektüre einiger Artikel in dem von Reuben Hersh herausgegebenen Essayband „18 unconventional essays on the nature of Mathematics“ (Springer 2006) dazu angeregt, einige Meinungen zur Frage der Existenz mathematischer Objekte zu sammeln.

Im Internetportal der DMV findet man dazu folgende Bemerkung

(<http://www.mathematik.de/mde/information/landkarte/stichpunkte/existenz.html>):

„Ein Platonist stellt sich vor, dass es die Objekte der Mathematik irgendwo, irgendwie gibt. (Der Name leitet sich von der Ideenlehre des Philosophen Platon her, der sich alle Ideen als ganz real im *Reich der Ideen* existierend vorstellte.) Für ihn war es schon immer richtig, dass der Satz des Pythagoras gilt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt usw. Diese Tatsachen wurden von uns Menschen nach und nach *entdeckt*. Dieser Standpunkt ist unter Mathematikern sehr weit verbreitet, für die stark überwiegende Mehrheit stellt sich ihr Fach so dar. Das liegt unter anderem daran, dass nach genügend langer intensiver Auseinandersetzung mit einem mathematischen Teilbereich die Objekte einem ähnlich real vorkommen wie etwa der schiefe Turm von Pisa, über den man eine Menge weiß, den man vielleicht ja auch noch nie konkret gesehen hat. Vorsicht: Diesen Standpunkt behält man besser für sich, sonst kommen Nachfragen (“Wo sind denn nun genau die Kreise, Wahrscheinlichkeitsräume, Vektoren, ...”).“

In „Erfahrung Mathematik“ beschreiben Philip J. Davis und Reuben Hersh eine extremere Version des mathematischen Platonismus als den Standpunkt, dass die Gesamtheit der Mathematik ewig und unabhängig vom Menschen besteht und es die Aufgabe des Mathematikers ist, diese mathematischen Wahrheiten zu entdecken. Sie schreiben (p. 334) „Im Platonismus sind mathematische Objekte real. Ihre Existenz ist eine objektive Tatsache; sie existieren, unabhängig, ob wir von ihrer Existenz wissen oder nicht.... Sie existieren außerhalb des Raums und der Zeit der physischen Existenz. Sie sind unveränderlich – wurden weder geschaffen, noch werden sie sich je verändern oder auflösen.“

Der mathematische Platonismus wird von sehr vielen Philosophen und einigen philosophisch interessierten Mathematikern als philosophisch unhaltbar abgelehnt. So schreiben Davis und Hersh (a.a.O. p. 345): „Von der Betrachtungsweise aus, die heute unter Wissenschaftlern vorherrscht, ist die weite Verbreitung des Platonismus als informelle und stillschweigend geduldete Arbeitsphilosophie eine bemerkenswerte Anomalie. In der Wissenschaft sind die allgemein akzeptierten Postulate heute – und seit vielen Jahren – jene des Materialismus in Bezug auf die Ontologie und jene des Empirismus in Bezug auf die Erkenntnistheorie.... Dagegen verfügen wir in der Mathematik über Kenntnisse von Dingen, die wir nie beobachtet haben und nie beobachten können. Zumindest ist dies der naive Standpunkt, den wir einnehmen, wenn wir nicht versuchen, philosophisch zu sein.“

Während Hardy der Ansicht ist, dass wir Mathematik entdecken, vertritt Laugwitz in „Zahlen und Kontinuum“ (B.I. 1986) das andere Extrem und meint, dass wir sie erfinden. Er schreibt (p. 235): „Nun kommt es darauf an, was man unter Existenz versteht. Es muss ja wohl nicht die von Ewigkeit zu Ewigkeit unveränderlich im Ideenhimmel ruhende, der Entdeckung harrende unerschöpfliche Kollektion mathematischer Wahrheiten sein, die allein mathematische Existenz ausmacht. Die *Fiktionen als intersubjektive geistige Konstrukte* haben eine Existenz, wengleich von anderer Qualität als die Vorräte im Ideenhimmel. Es handelt sich bei diesen Konstrukten nicht um Entdeckungen, sondern um Erfindungen, und sie haben geistige Realität, wie andere menschliche Erfindungen physische und zugleich geistige Realität aufweisen (die Dampfmaschine und ihr physikalisch-technischer Bauplan).“ Dagegen hat André Weil (Collected Papers I, 1940a) in einem Brief an seine Schwester Simone Weil darauf hingewiesen, dass es in der Mathematik beides gibt und beispielsweise zwischen seinen Entdeckungen aus der Zahlentheorie und seiner Erfindung der uniformen Räume unterschieden.

Im 1947 verfassten Artikel „The locus of mathematical reality: An anthropological footnote“, der auch im erwähnten Essayband nachgedruckt wurde, versucht der Anthropologe Leslie A. White seine Erfahrungen mit den unterschiedlichsten Kulturen auf die Mathematik zu übertragen und zu erklären, warum der Glaube an die unabhängige Existenz mathematischer Wahrheiten so plausibel und überzeugend erscheint. Er betrachtet die Evolution der Mathematik analog zur Evolution von Kulturen. Jedes Individuum wird sowohl in eine vom Menschen geschaffene kulturelle Welt als auch in eine natürliche Umwelt geboren. Aber es ist vor allem die Kultur, die seine Gedanken, Gefühle und sein ganzes Verhalten bestimmt. Er stellt die These auf, dass mathematische Wahrheiten ihre Existenz in der kulturellen Tradition haben, in welche ein Individuum geboren wird. Außerhalb dieser kulturellen Tradition haben mathematische Konzepte weder Existenz noch Bedeutung. Mathematische Objekte sind nach dieser These real und existieren unabhängig vom individuellen Bewusstsein, hängen jedoch total vom Bewusstsein der Spezies Mensch ab. Er schreibt u.a. „There is no more reason to believe that mathematical realities have an existence independent of the human mind than to believe that mythological realities can have their being apart from man. The square root of minus one is real. So were Wotan and Osiris. So are the gods and spirits that primitive peoples believe in today. The question at issue, however, is not, are these things real, but “Where is the locus of their reality?” It is a mistake to identify reality with the external world only.“

Ähnlich drückt sich auch der Soziologe Peter L. Berger in „Zur Dialektik von Religion und Gesellschaft“ (p.13) zur Objektivität der Sprache aus: „Kaum jemand ... wird leugnen, dass Sprache ein menschliches Produkt ist. Jede beliebige Sprache ist ein Ergebnis der langen Geschichte menschlicher Einbildungskraft ... Im Laufe ihrer Geschichte ist sie von Menschen und ihrem Handeln entwickelt worden. Und sie existiert nur, insofern und so lange Menschen nicht aufhören, sie zu sprechen und zu verstehen. Nichtsdestoweniger präsentiert sie sich dem einzelnen als eine objektive Wirklichkeit, die er als solche respektieren muss, wenn er nicht die Konsequenzen tragen will. Die Regeln der Sprache sind objektiv vorhanden. Man muss Sprache lernen, ob als Muttersprache oder als Fremdsprache, und kann sie nicht beliebig verändern.... Die englische Sprache ist objektiv wirklich kraft der einfachen Tatsache, dass sie *da* ist, eine vorgefabrizierte und kollektiv anerkannte Sinnwelt des Gesprächs, in der Individuen sich und einander verständigen können.“

Dagegen meint Hardy (a.a.O. p.8): „Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not.“

Der Wissenschaftstheoretiker Christian Thiel schreibt in „Was ist und was soll Philosophie der Mathematik“ ([http://sowi.iwp.uni-linz.ac.at/DIALOG/DT/9610\\_Thiel/9610\\_Thiel.html](http://sowi.iwp.uni-linz.ac.at/DIALOG/DT/9610_Thiel/9610_Thiel.html)): „Die Wurzeln des weitgehend unkritischen platonistischen Zugangs liegen meines Erachtens tief und betreffen ganz allgemein die Verflechtung menschlichen Handelns mit der Sprache und unseren mentalen Repräsentationen. Die unaufhebbare Endlichkeit und die faktisch sehr engen Grenzen unserer Fähigkeit, Sinneseindrücke von großer Ausdehnung in Raum oder Zeit zu überschauen, sowie unserer Fähigkeit zur Handhabung sehr langer oder sehr komplexer Zeichenreihen haben die menschliche Spezies auf das Hilfsmittel der Reifikation gebracht: ausgehend von Gegenständen unserer unmittelbaren Erfahrung arrangieren oder ordnen wir Komplexe von Erfahrungen durch Schaffung von Bezugspunkten für unser Vorstellungsvermögen und für die Wörter unserer Sprache, und das heißt, durch Schaffung neuer Quasi-Gegenstände. In dieser Kürze ist das sicher eine globale Behauptung, die genauerer Ausführung und Begründung, vielleicht auch der Einschränkung bedürfte. Aber der Gedanke ist alles andere als neu und es gibt auch kaum Zweifel daran, dass sich unsere Rede über abstrakte Gegenstände wie Begriffe, Zahlen, Gedanken, Wahrheitswerte und ähnliches als Rede über Quasi-Objekte rekonstruieren lässt.“

Yehuda Rav wendet sich in seinem Essay „Philosophical problems of mathematics in the light of evolutionary epistemology“, der ebenfalls im obigen Sammelband enthalten ist, gegen jede Form des Platonismus (p. 72): „Whereas the quarrel about universals and ontology *had* its meaning and significance within the context of medieval Christian culture, it is an intellectual scandal that some philosophers of mathematics can still discuss whether whole numbers exist or not. It was an interesting question to compare mathematical “objects” with physical objects as long as the latter concept was believed to be unambiguous. But, with the advent of quantum mechanics, the very concept of a physical object became more problematic than any mathematical concept.“

(p. 78): „The core element, the depth structure of mathematics, incorporates cognitive mechanisms, which have evolved like other biological mechanisms, by confrontation with reality and which have become genetically fixed in the course of evolution. I shall refer to this core structure as the *logico-operational component* of mathematics. Upon this scaffold grew and continues to grow the *thematic component* of mathematics, which consists of the specific content of mathematics. This second level is culturally determined.“ Und schließlich auf Seite 81: “The sense of reality that one experiences in dealing with mathematical concepts stems in part from the fact that in all our hypothetical reasonings, the object of our reasoning is treated in the nervous system by cognitive mechanisms, which have evolved through interactions with external reality.“

William Timothy Gowers (Fields Medal 1998) vertritt in seinem Essay „Does mathematics need a philosophy?“, der ebenfalls im erwähnten Sammelband vorkommt (und auch auf <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/philosophy.html>) einen formalistischen Standpunkt. Er schreibt: “Formalism is more or less the antithesis of Platonism. One can caricature it by saying that the formalist believes that mathematics is nothing but a few rules for replacing one system of meaningless symbols with another. If we start by writing down some axioms and deduce from them a theorem, then what we have done is correctly apply our replacement rules to the strings of symbols that represent the axioms and ended up with a string of symbols that represents the theorem. At the end of this process, what we know is not that the theorem is “true” or that some actually existing mathematical objects have a property of which we were previously unaware, but merely that a certain statement can be obtained from certain other statements by means of certain processes of manipulation.... I take the view, which I learnt recently goes under the name of *naturalism*, that a proper philosophical account of mathematics should be grounded in the actual practice of mathematicians. In fact, I should confess that I am a fan of the later Wittgenstein, and I broadly agree with his statement that “the meaning of a word is its use in the language”. [Philosophical Investigations Part I section 43 - actually Wittgenstein qualifies it by saying that it is true “for a large class of cases”.] So my general approach to a philosophical question in mathematics is to ask myself how a typical mathematician would react to it, and why.... If you attempt to say what a set is, then you are probably doing naive set theory. What I have just described, where sets are not defined (philosophers would call the word “set” an undefined primitive), is abstract set theory. Notice that as soon as you do abstract set theory, you do not find yourself thinking about the actual existence or nature of sets, though you might, if you were that way inclined, transfer your worries into the meta-world and wonder about the existence of the model. Even so, when you were actually doing set theory, your activity would more naturally fit the formalist picture than the Platonist one.” Etwas später schreibt er: “In fact, to many mathematicians, including me, it is not altogether clear what is even meant by the phrase “there exists” in the external sense. Die Aussage „es gibt unendlich viele Primzahlen“ bedeutet seiner Meinung nach nur, dass die normalen Regeln zum Beweis mathematischer Aussagen erlauben, die entsprechenden Quantifikatoren zu benutzen. Zum Auswahlaxiom meint er, dass wir Folgerungen aus dem Auswahlaxiom aus guten Gründen manchmal ignorieren und manchmal darauf bestehen. “If the axiom of choice helps to make the infinite world better reflect the finite one then we are happy to use it. If it doesn’t then we describe its consequences as “bizarre” and not really part of “mainstream mathematics”. And that is why I do not believe that it is “really” true or “really” false.”

Ein anderer Verfechter des Formalismus ist Edward Nelson. In “Mathematics and faith” (<http://www.math.princeton.edu/~nelson/papers/faith.pdf>) schreibt er: “Mathematics as we know it originated with Pythagoras, and Pythagoras founded a religion in which numbers played a central role. For the Pythagoreans, the numbers were an infinite, real, uncreated world of beings, and most mathematicians retain that faith today...Now I live in a world in which there are no numbers save those that human beings on occasion construct. The Pythagorean religion is no longer practiced. But Pythagoras strongly influenced Plato, and through Plato us. The numbers of Pythagoras are the type of Platonic ideas. What are Platonic ideas? Are they created, contingent and subject to change? Are they uncreated –as they were in the beginning, are now, and ever shall be? Or are they constructs of human thought which we come perilously close to idolizing? For us, men and women from the world of learning, to reify abstract ideas ... is a temptation more insidious than the worship of metal effigies, and more corrupting.”

Doron Zeilberger meint in seinem Artikel „‘Real’ analysis is a degenerate case of discrete analysis“ (<http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimPDF/real.pdf>) sogar: “I am not a professional philosopher of mathematics, nor an expert logician or foundationalist, but I think that the philosophy that I am advocating here is called ultrafinitism. If I understand it correctly, the ultrafinitists deny the existence of any infinite, even the potential infinity, but their motivation is ‘naturalistic’, i.e. they believe in a ‘fade-out’ phenomenon when you keep counting.

Myself, I don’t care so much about the natural world. I am a platonist, and I believe that finite integers, finite sets of finite integers, and all finite combinatorial structures have an existence of their own, regardless of humans (or computers). I also believe that symbols have an independent existence. What is completely meaningless is any kind of infinite, actual or potential. So I deny even the existence of the Peano axiom that every integer has a successor. Eventually we would get an overflow error in the big computer in the sky, and the sum and product of any two integers is well-defined only if the result is less than  $p$ , or if one wishes, one can compute them modulo  $p$ . Since  $p$  is so large, this is not a practical problem, since the overflow in our earthly computers comes so much sooner than the overflow errors in the big computer in the sky. However, one can still have ‘general’ theorems, provided that they are interpreted correctly. The phrase ‘for all positive integers’ is meaningless. One should replace it by: ‘for finite or symbolic integers’. For example, the statement:

“(n + 1)<sup>2</sup> = n<sup>2</sup> + 2n + 1 holds for all integers” should be

replaced by: “(n + 1)<sup>2</sup> = n<sup>2</sup> + 2n + 1 holds for finite or symbolic integers n”. Similarly, Euclid’s statement: ‘There are infinitely many primes’ is meaningless. What is true is: if  $p_1 < p_2 < \dots < p_r < p$  are the first  $r$  finite primes, and if  $p_1 p_2 \dots p_r + 1 < p$ , then there exists a prime number  $q$  such that  $p_r + 1 < q < p_1 p_2 \dots p_r + 1$ . Also true is: if  $p_r$  is the ‘symbolic  $r$  – th prime’, then there is a symbolic prime  $q$  in the discrete symbolic interval

$[p_r + 1, p_1 p_2 \dots p_r + 1]$ .

By hindsight, it is not surprising that there exist undecidable propositions, as meta-proved by Kurt Gödel. Why should they be decidable, being meaningless to begin with! The tiny fraction of first order statements that are decidable are exactly those for which either the statement itself, or its negation, happen to be true for symbolic integers. A priori, every statement that starts “for every integer  $n$ ” is completely meaningless. I hope to expand this line of thought that may be called ‘ultrafinite computerism’ or ‘ansatz-centric formalism’ (as opposed to Hilbert’s logocentric formalism) in the future.”

Sehr aufschlussreich ist auch das Buch „Gedankenmaterie“ (Springer 1992), in welchem der Mathematiker Alain Connes und der Neurobiologe Jean-Pierre Changeux ihre Ansichten über die Natur der Mathematik darlegen. A. Connes vertritt den platonistischen Standpunkt und schreibt (p.8): „Ich denke, dass ich dem realistischen Standpunkt ziemlich nahe stehe. Zum Beispiel hat für mich die Folge der Primzahlen eine stabilere Realität als die uns umgebende materielle Wirklichkeit. Man kann den Mathematiker in seiner Arbeit mit einem Forscher vergleichen, der die Welt entdeckt. Diese Tätigkeit deckt harte Tatsachen auf. Man findet zum Beispiel mit einfachen Rechnungen, dass die Folge der Primzahlen kein Ende zu haben scheint. Die Arbeit des Mathematikers besteht dann darin zu beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.“

(p. 16): „Wir wollen einmal die mathematische Realität mit der materiellen Welt um uns vergleichen. Was beweist die Realität dieser materiellen Welt unabhängig von ihrer Wahrnehmung durch unser Gehirn? Vor allem die Kohärenz unserer Perzeptionen und ihre Dauer. Genauer die Kohärenz des Tastsinns und des Sehens eines und desselben Individuums. Ferner die Übereinstimmung der Wahrnehmungen zwischen verschiedenen Individuen. Die mathematische Realität ist von derselben Natur. Eine auf verschiedene Weise ausgeführte Rechnung gibt dasselbe Ergebnis, einerlei ob sie von einer oder mehreren Personen ausgeführt ist. Die Wahrheit des Primzahlsatzes von Euklid hängt nicht von der einen oder

anderen Wahrnehmungsweise ab. Es ist wahr, dass die Mathematik als Sprache für die anderen Wissenschaften nützlich ist. Aber man kann sie nicht, ohne einen schweren Fehler zu begehen, darauf beschränken, nur eine Sprache zu sein.“

Changeux meint dagegen (p. 34): „Diese Frage nach der Existenz einer mathematischen Welt ist unser größter Streitpunkt. Ich versuche, mich in Deine Rolle zu versetzen, und habe mich gefragt, wo sich diese Welt befindet und welche *Spur* sie in der Natur hinterlässt. Wenn Du die Hypothese aufstellst, dass die mathematische Welt außerhalb von uns existiert, und wenn Du Dich einen Materialisten nennst, dann musst Du ihr eine materielle Grundlage geben.“

Und (p. 65): „Was können die Neurowissenschaften zum Verständnis der Erzeugung und des Umgangs mit mathematischen Objekten beitragen?...Eine starke materialistische Epistemologie muss die Beschreibung des Erkenntnisapparats und seiner Funktionsweise einschließen, also unser Gehirn und wie es die mathematischen Objekte erzeugt.“

A. Connes meint dazu (p.19): „Auf der einen Seite existiert unabhängig vom Menschen eine rohe und unveränderliche mathematische Realität, auf der anderen erkennen wir sie nur mit unserem Gehirn...Ich trenne also die mathematische Realität vom Werkzeug, das wir zu ihrer Erforschung haben, und ich gebe zu, dass das Gehirn ein materielles Erkenntniswerkzeug ist, das nichts Göttliches an sich hat und mit keinerlei Transzendenz verknüpft ist...Aber die mathematische Realität, wie zum Beispiel die Folge der Primzahlen, wird dadurch überhaupt nicht verändert.“

Der Logiker Jan Mycielski schreibt in „A system of axioms of set theory for the rationalists“ (Notices AMS 53 (2), 2006): “There are two extreme ontologies of mathematics:

(a) Platonism, which tells us that pure mathematics is a description of an ideal structure that exists independently of humanity, and (b) Formalism, which says that pure mathematics is just a game with symbols. (Both views acknowledge the seminal role of applications, e.g., both agree that Greek geometry is an abstract approximate description of the physical space-time.) We think that neither (a) nor (b) is convincing; (a) assumes too much, it violates Ockham’s principle *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*, and (b) ignores that logic and set theory constitute a framework and a tool for describing reality which was given to us by natural evolution. We believe the latter since people of all cultures agree that mathematical arguments are convincing, and those who study the rules of logic and the axioms of set theory (ZFC with urelements allowed) think that they are evident.

Thus we accept a view which is intermediate between (a) and (b) and which says that not only applications but (in a great measure) human nature itself defines and causes pure mathematics. The ideal actually infinite sets of the Platonists are replaced by physical phenomena in human brains, that is, thoughts of things like boxes whose content is not fully imagined. The meaning of quantifiers is explained as follows: If we claim in pure mathematics that  $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ , where  $x$  and  $y$  range over a universe  $U$ , we assert only that we have a mental operation such that given any  $a$  in  $U$  we can imagine a  $b$  in  $U$  satisfying  $\varphi(a, b)$ . Hence the infinite sets and universes of pure mathematics are not actually but only potentially infinite. Thus pure mathematics is a finite human construction in a state of growth dealing with imaginary objects. It makes no sense to call it true or false since truth can appear only in applications. And yet logic and set theory are not arbitrary since human intelligence is made to describe reality in this framework (i.e., to classify using sets, sets of sets. etc.).

W. V. Quine und Hilary Putnam meinten, dass man die Existenz mathematischer Objekte indirekt aus der Tatsache, dass Mathematik unentbehrlich für die Physik ist, erschließen könne. (vgl. <http://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/>).

In „Farewell to reason“ meint Paul Feyerabend (p. 88): “For the ancient Greeks, the Greek gods existed and acted independently of the wishes of humans. They simply ‘were there’. This is now regarded as a mistake. In the view of modern rationalists the Greek gods are inseparable parts of Greek culture, they were imagined, they did not really exist. Why the disclaimer? Because the Homeric gods cannot exist in a scientific world. Why is this clash used to eliminate the gods and not the scientific world? Both are objective in intention and both arose in a culture dependent way. The only answer I have heard to this question is that scientific objects behave more lawfully than gods and can be examined and checked in greater detail. The answer assumes what is to be shown, namely that scientific laws are real while gods are not. It also makes accessibility and lawfulness a criterion of reality. This would make shy birds and anarchists very unreal indeed. There is no other way out: we either call gods and quarks equally real, but tied to different circumstances, or we altogether cease talking about the ‘reality’ of things and use more complex ordering schemes instead.”

Ich habe Mathematik immer als Beschreibung und Untersuchung gewisser mentaler Objekte angesehen. Ich kann mir dabei vorstellen, dass es mathematische Aussagen geben kann, die wahr aber nicht beweisbar sind. So glaube ich etwa, dass die Frage, ob  $\pi$  eine normale Zahl ist, d.h. dass jede Ziffernkombination in der Dezimalentwicklung mit der richtigen Häufigkeit auftritt, eine definitive Antwort hat, auch wenn es unmöglich sein sollte, diese Frage je zu entscheiden. Genau so glaube ich, dass die Kontinuumshypothese für Mengen im Cantor’schen Sinn entweder wahr oder falsch sein muss, auch wenn sie im Zermelo-Fraenkel’schen Axiomensystem nicht entscheidbar ist. Ich glaube zwar nicht an die Pythagoräische Religion, die Connes’sche Aussage, dass mathematische Objekte eine analoge Art der Realität wie die Objekte der materiellen Welt haben, kommt mir jedoch sehr plausibel vor. Aber nach dem Studium einiger der oben genannten Ansichten bin ich ziemlich verunsichert. Vielleicht habe ich nur eine unkritische Einstellung zu meinen mathematischen Vorstellungen oder mein Nervensystem spielt mir einen Streich und gaukelt mir Quasiobjekte vor, die es in Wirklichkeit gar nicht gibt? Möglicherweise habe ich auch einiges missverstanden, weil mir die entsprechende philosophische Vorbildung fehlt. Dass meine Fähigkeit, Mathematik zu betreiben, mit der Struktur meines Gehirns zusammenhängt, ist wohl evident. Ebenso dass jede mathematische Tätigkeit gewisse Veränderungen im Gehirn bewirkt. Der Schluss, dass deshalb mathematische Objekte mit gewissen Gehirnzuständen *identifiziert* werden können, kommt mir dagegen unzulässig vor, ganz abgesehen davon, dass diese dann wohl bei jedem Mathematiker die gleichen sein müssten.

Wenn nur solche Dinge als ‘real’ angesehen werden, die im Rahmen der heutigen Naturwissenschaft erklärbar sind, scheint für den Platonismus kein Platz zu sein. Selbst Alain Connes konnte mit seinen Ansichten einen Naturwissenschaftler wie Changeux nicht überzeugen. Allerdings änderten sich im Laufe der Zeit auch die Ansichten der Physiker darüber, was real ist oder nicht, wie der mathematische Physiker Barry M. McCoy in seinem interessanten Essay („Modern metaphysics“, arXiv: hep-th/9609160) gezeigt hat, wo er schreibt: “Metaphysics is the science of being and asks the question “What really exists?” The answer to this question has been sought for by mankind since the beginning of recorded time. In the past 2500 years there have been many answers to this question and these answers dominate our view of how physics is done. Examples of questions which were originally metaphysical are the shape of the earth, the motion of the earth, the existence of atoms, the relativity of space and time, the uncertainty principle, the renormalization of field theory and the existence of quarks and strings. I will explore our changing conception of what constitutes reality by examining the views of Aristotle, Ptolemy, St. Thomas Aquinas, Copernicus, Galileo, Bacon, Descartes, Newton, Leibnitz, Comte, Einstein, Bohr, Feynman, Schwinger, Yang, Gell-Mann, Wilson and Witten.“

Kurt Gödel hat in dem Manuskript „The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy” (Collected Works III) aus seinem Nachlass versucht, die mathematische Grundlagenforschung der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts in philosophischen Begriffen zu beschreiben. Er ordnet die möglichen Weltanschauungen von links nach rechts, wobei links Materialismus, Skeptizismus und Positivismus und rechts Spiritualismus, Idealismus und Theologie stehen. Er erwähnt, dass die Entwicklung der Philosophie seit der Renaissance im Großen und Ganzen von rechts nach links gegangen ist. Er schreibt dann (p. 374): „Es müsste ein Wunder sein, wenn diese, ich möchte sagen, rabiate Entwicklung sich nicht auch in der Auffassung der Mathematik geltend gemacht hätte. Tatsächlich hat die Mathematik ihrer Natur nach als apriorische Wissenschaft selbst überall eine Neigung nach rechts und hat daher dem Zeitgeist, der seit der Renaissance herrschte, lang widerstanden...Aber schließlich um die Jahrhundertwende hatte auch ihre Stunde geschlagen, insbesondere waren es die Antinomien der Mengenlehre, Widersprüche, die angeblich innerhalb der Mathematik aufgetreten waren, welche in ihrer Bedeutung von Skeptikern und Empiristen übertrieben und zum Vorwand für den Umsturz nach links verwendet wurden. Ich sagte „angeblich“ und „übertrieben“, weil (1) diese Widersprüche nicht in der Mathematik sondern an ihrer äußersten Grenze zur Philosophie zu auftreten und (2) sie in einer vollständig befriedigenden sowie für jeden, der diese Theorie versteht, beinahe selbstverständlichen Weise aufgelöst wurden. Aber solche Argumente helfen nichts gegen den Zeitgeist und so war das Resultat, dass von vielen oder den meisten Mathematikern gezeugnet wurde, dass die Mathematik, wie sie sich vorher entwickelt hatte, ein System von Wahrheiten darstellt; vielmehr wurde das nur für einen (je nach Temperament größeren oder kleineren) Teil der Mathematik anerkannt und alles übrige wurde bestenfalls in einem hypothetischen Sinn beibehalten.“ (p. 380): „Man muss entweder die alten rechtsseitigen Aspekte der Mathematik aufgeben oder man muss versuchen, diese im Widerspruch mit dem Zeitgeist aufrechterhalten. Offenbar ist der erste Weg der einzige, der in unsere Zeit passt....Und man beachte, man gibt diese Aspekte auf, nicht weil die erzielten mathematischen Resultate dazu zwingen, sondern weil das die einzige Möglichkeit ist, trotz dieser Resultate mit der herrschenden Philosophie in Übereinstimmung zu bleiben....Jedenfalls ist kein Grund, dem Zeitgeist blindlings zu vertrauen und es ist daher zweifellos der Mühe wert, einmal die andere der oben genannten Alternativen...zu versuchen...Das heißt offenbar die Sicherheit der Mathematik nicht dadurch sicherzustellen, dass man gewisse Eigenschaften in Projektion auf materielle Systeme, nämlich das Umgehen mit physischen Symbolen, beweist, sondern dadurch, dass man die Erkenntnis der abstrakten Begriffe selbst, welche zur Aufstellung jener mechanischen Systeme führt, kultiviert...“ (p.384): „Es zeigt sich nämlich, dass bei einem systematischen Aufstellen der Axiome der Mathematik immer wieder neue und neuere Axiome evident werden, die nicht formallogisch aus den bisher aufgestellten folgen. Es ist durch die früher erwähnten negativen Resultate gar nicht ausgeschlossen, dass trotzdem auf diese Weise jede klar gestellte mathematische Ja- oder Nein-Frage lösbar ist, denn eben dieses Evidentwerden immer neuerer Axiome auf Grund des Sinnes der Grundbegriffe ist etwas, was eine Maschine nicht nachahmen kann.“

Auch ich habe den Eindruck, dass im Fall der Mathematik „rechtsseitige“ Philosophien – um die Gödel'sche Terminologie zu verwenden – eine plausiblere Beschreibung geben könnten. Leider bin ich mit der diesbezüglichen philosophischen Literatur zu wenig vertraut. Ich habe mich allerdings mit einigen Werken beschäftigt, die durch so genanntes „Channeling“ entstanden sind, in welchen ebenfalls eine solche Weltansicht vertreten wird. (Einen Überblick über dieses Phänomen, das bisher wissenschaftlich leider kaum untersucht und weitgehend ignoriert wurde, gibt das Buch „Channeling: Der Empfang von Informationen aus paranormalen Quellen“ (Bauer 1988) von Jon Klimo).

Als Beispiel möchte ich die Sethbücher von Jane Roberts (vgl. [http://en.wikipedia.org/wiki/Jane\\_Roberts](http://en.wikipedia.org/wiki/Jane_Roberts) ) und „A Course in Miracles“ (vgl. [http://en.wikipedia.org/wiki/A\\_course\\_in\\_miracles](http://en.wikipedia.org/wiki/A_course_in_miracles) ) von Helen Schucman erwähnen. Genau so wie die Thesen einzelner Philosophen unterscheiden sich auch diese gechannelten Informationen sehr stark voneinander. Gemeinsam ist aber allen, dass sie den Geist als das Primäre ansehen und dass sie die Existenz einer inneren Realität behaupten, aus der die physische Realität entsteht. Daraus lässt sich zwar auch keine verbindliche Aussage über die Natur mathematischer Begriffsbildungen ableiten, die Existenz der Mathematik kommt mir aber aus dieser Sicht weniger mysteriös vor als vom rein materialistischen Standpunkt aus. Wie dem auch sei, über die Frage, was die eigentliche Natur der Mathematik ist und ob mathematische Objekte in irgendeiner nicht-trivialen Form existieren, wird es wahrscheinlich nie eine allgemein akzeptable Antwort geben.