

## Mathematische Randbemerkungen 12: Eine interessante Klasse von Polynomen

Johann Cigler

Im Folgenden möchte ich einige Polynome studieren, die sich in [9] bei der expliziten Berechnung der Darstellung von  $(X + sD_q)^n$  ergeben haben. Es stellt sich heraus, dass sie  $q$ -Analoge von Faltungsprodukten von Fibonacci-Polynomen sind. Wie viele andere mathematische Begriffe, die sich auf natürliche Weise ergeben, haben sie einige schöne Eigenschaften. Da sie eng mit den Vertauschungseigenschaften des Multiplikationsoperators  $X$  und des  $q$ -Differentiationsoperators  $D_q$  verknüpft sind, dürften sie auch nicht ganz uninteressant sein.

Sei  $X$  der Multiplikationsoperator auf den Polynomen in  $x$ , der durch  $Xp(x) = xp(x)$  definiert ist und  $D$  der Differentiationsoperator. Ich erinnere zuerst an ein bekanntes Resultat über  $(X + sD)^n$ .

Definiert man Polynome  $H_n(x, s)$  durch

$$H_n(x, s) = xH_{n-1}(x, s) + (n-1)sH_{n-2}(x, s) \quad (1)$$

mit den Anfangswerten  $H_0(x, s) = 1, H_1(x, s) = x$ , dann gilt

$$(X + sD)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_{n-k}(X, s) s^k D^k. \quad (2)$$

Die Polynome  $H_n(x, s)$  sind im wesentlichen Hermite-Polynome. Es gilt

$$H_n(x, s) = \sum_{2j \leq n} s^j \frac{n!}{2^j j! (n-2j)!} x^{n-2j}.$$

Die ersten Terme sind

$$1, x, x^2 + s, x^3 + 3sx, x^4 + 6sx^2 + 3s^2, \dots$$

Derartige Formeln sind in der einen oder anderen Form schon lange bekannt. Ich weiß nicht, wer sie zum ersten Mal bewiesen hat. In G.-C. Rota [10] wird auf eine Arbeit von J.L. Burchnall [1] verwiesen. In etwas anderer Gestalt wurde diese Formel einige Male wiederentdeckt, vgl. Varvak [11] und die dort zitierte Literatur. Es ging dabei darum, die auftretenden Produkte von  $X$  und  $D$  so umzuformen, dass alle Terme von der Gestalt  $X^j D^k$  sind. Das wird "normal ordering" genannt. Die Formel schaut dann folgendermaßen aus:

$$(X + sD)^n = \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^{\text{Min}(m, n-m)} \frac{n! s^{n-m}}{2^j j!(m-j)!(n-m-j)!} X^{m-j} D^{n-m-j}. \quad (3)$$

Die ersten Terme in dieser Anordnung sind dann

$$sD + X,$$

$$s^2 D^2 + 2sXD + s + X^2,$$

$$s^3 D^3 + 3s^2 XD^2 + 3s^2 D + sX^2 D + 3sX + X^3,$$

$$s^4 D^4 + 4s^3 XD^3 + 6s^3 D^2 + 6s^2 X^2 D^2 + 12s^2 XD + 3s^2 + 4sX^3 D + 6sX^2 + X^4.$$

Bezeichnet man mit  $D_q$  den  $q$ -Differentiationsoperator, definiert durch

$$D_q p(x) = \frac{p(qx) - p(x)}{qx - x},$$

dann ergeben sich für  $(X + sD_q)^n$  der Reihe nach die folgenden Ausdrücke

$$sD_q + X,$$

$$s^2 D_q^2 + (1+q)sXD_q + s + X^2,$$

$$s^3 D_q^3 + (1+q+q^2)s^2 XD_q^2 + (2+q)s^2 D_q + (1+q+q^2)sX^2 D_q + (2+q)sX + X^3,$$

$$s^4 D_q^4 + (1+q+q^2+q^3)s^3 XD_q^3 + (3+2q+q^2)s^3 D_q^2 + (1+q+2q^2+q^3+q^4)s^2 X^2 D_q^2 + (3+5q+3q^2+q^3)s^2 XD_q + (2+q)s^2 + (1+q+q^2+q^3)sX^3 D_q + (3+2q+q^2)sX^2 + X^4.$$

Dabei sind die Terme, die  $D_q$  nicht enthalten, die  $q$ -Hermite-Polynome

$$H_n(x, s | q) = (X + sD_q)^n 1, \text{ die in [7] studiert wurden.}$$

Wie dort gezeigt, lassen sie sich durch  $q$ -Lucas- Polynome der Gestalt

$$L_n(x, s | q) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]}{[n-k]} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} s^k x^{n-2k} \quad (4)$$

für  $n > 0$  und

$$L_0(x, s | q) = 1 \quad (5)$$

einfach ausdrücken.

Es gilt nämlich

$$H_n(x, (1-q)s | q) = (X + (1-q)sD_q)^n 1 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{j} s^j L_{n-2j}(x, -s | q). \quad (6)$$

Diese  $q$ -Lucas -Polynome haben eine verblüffende Eigenschaft. Sie bilden nämlich nicht nur ein  $q$ -Analogon der üblichen Lucas-Polynome, sondern lassen sich auch direkt auf diese zurückführen. Es gilt nämlich (vgl. [4], [6])

$$\begin{aligned} L_n(x, s | q) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]}{[n-k]} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} s^k x^{n-2k} = L_n((X + (q-1)sD_q), s | 1) 1 \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} s^k (X + (q-1)sD_q)^{n-2k} 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Gleichbedeutend damit ist die Rekursion

$$L_n(x, s | q) - (X + (q-1)sD_q)L_{n-1}(x, s | q) - sL_{n-2}(x, s | q) = 0 \quad (8)$$

für  $n > 2$ . Für  $n = 2$  erhält man den Wert  $s$ .

Würde man  $L_0(x, s | q) = 2$  setzen, dann würde (8) für alle  $n \geq 2$  gelten.

Das ist in gewisser Weise schöner und die richtige Wahl für andere Anwendungen. In unserem Fall brauchen wir jedoch  $L_0(x, s | q) = 1$ . In [8] habe ich für die hier verwendete Version der Lucas-Polynome die Bezeichnung  $L_n^*(x, s)$  gewählt. Da im Folgenden aber

nur diese Version verwendet wird, kann kein Missverständnis entstehen. Es sei auch darauf hingewiesen, dass es in der Literatur zwei verschiedene Normierungen für die Fibonacci- Polynome  $F_n(x, s)$  und Fibonacci- Zahlen  $F_n$  gibt. Die übliche ist

$$F_n(x, s) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-j-1}{j} s^j x^{n-1-2j}. \text{ Diese ist für die zahlentheoretischen Aspekte am}$$

geeignetsten, weil dann  $ggT(F_n, F_m) = F_{ggT(n,m)}$  gilt. Für kombinatorische Anwendungen

$$\text{ist } f_n(x, s) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{j} s^j x^{n-2j} \text{ nützlicher. Ich unterscheide beide durch Groß- bzw.}$$

Kleinschreibung und verwende im Folgenden nur  $f_n(x, s)$ . Für die Fibonacci-Zahlen  $(f_n = f_n(1,1)) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$  und die Lucas-Zahlen  $(L_n(1,1) = L_n) = (1, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots)$

gilt  $L_n = f_n + f_{n-2}$ . In der hier verwendeten Version gilt auch  $f_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j L_{n-2j}$ .

Computereperimente führten mich zur folgenden Vermutung, die ich in [9] verifiziert habe.

$$(X + (1-q)sD_q)^n = \sum_{k=0}^n A(n, k) D_q^k \quad (9)$$

mit

$$A(n, 0) = H_n(x, (1-q)s | q) \quad (10)$$

und

$$A(n, k) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \binom{n}{i} (1-q)^k s^{k+i} \frac{[n-2i]}{[k]} \quad (11)$$

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k-2i}{2} \rfloor} s^j \begin{bmatrix} n-j-2i-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} q^{j(n-j-2i-k)} L_{n-k-2j-2i}(X, -s | q) D_q^k$$

für  $k > 0$ .

Weitere Berechnungen zeigten, dass sich der zweite Ausdruck noch vereinfachen lässt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j(n-j)} (-s)^j \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} L_{n-2j}(x, s | q) \\
&= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{m}{2}} \frac{[k]}{[n+k-m]} \begin{bmatrix} n+k-m \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-m \\ m \end{bmatrix} s^m x^{n-2m}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Ich will zunächst von der rechten Seite ausgehen und die Äquivalenz später zeigen.

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  seien die verallgemeinerten  $q$ -Lucas- Polynome definiert durch

$$L_n^{(k)}(x, s | q) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{j}{2}} \frac{[n+k]}{[n+k-j]} \begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \tag{13}$$

und verallgemeinerte  $q$ -Fibonacci-Polynome durch

$$\begin{aligned}
f_n^{(k)}(x, s | q) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \frac{[k]}{[n+k-j]} \begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+k-2j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} s^j x^{n-2j}
\end{aligned} \tag{14}$$

Es ist klar, dass  $L_n^{(0)}(x, s | q) = L_n(x, s | q)$  ist. Weiters ist

$$L_n^{(k)}(x, qs | q) = \frac{[n+k]}{[k]} f_n^{(k)}(x, s | q) \tag{15}$$

für  $k > 0$ . Für  $k = 0$  ist  $f_n^{(0)}(x, s) = [n = 0]$ . Für  $k = 1$  ergibt sich

$$f_n^{(1)}(x, s | q) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j}. \text{ Das ist ein } q\text{-Analogon der Fibonacci-}$$

Polynome  $f_n(x, s) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j}$ . Auch hier gilt (vgl. [4],[6])

$$f_n^{(1)}(x, s | q) = f_n^{(1)}(x + (q-1)sD_q, s | 1). \quad (16)$$

Mit diesen Notationen kann (9) folgendermaßen formuliert werden:

$$(X + (1-q)sD_q)^n = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} s^j L_{n-2j-k}^{(k)}(X, -s | q) \right) (1-q)^k s^k D_q^k. \quad (17)$$

Daraus ist u.a. ersichtlich, dass die Polynome

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \left( \frac{s}{1-q} \right)^j L_{n-2j-k}^{(k)} \left( X, -\frac{s}{1-q} | q \right) \quad (18)$$

nicht-negative Koeffizienten haben und für  $q \rightarrow 1$  gegen  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} H_{n-k}(x, s)$  streben.

Für  $q = 1$  ist höchstwahrscheinlich alles wohlbekannt. Ich habe mir jedoch nicht die Mühe gemacht, die unüberschaubare Literatur daraufhin durchzusehen. Die erzeugende Funktion der Polynome  $f_n^{(k)}(x, s | 1)$  ist

$$\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}(x, s | 1) z^n = \frac{1}{(1 - xz - sz^2)^k} \quad (19)$$

und daher ist

$$f_n^{(k)}(x, s | 1) - xf_{n-1}^{(k)}(x, s | 1) - sf_{n-2}^{(k)}(x, s | 1) = f_n^{(k-1)}(x, s | 1) \quad (20)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wenn man  $f_n^{(k)}(x, s | 1) = 0$  für  $n < 0$  setzt. Die  $f_n^{(k)}(x, s | 1)$  sind also die  $k$ -fachen Faltungen der Fibonacci- Polynome. Die Formel für die erzeugende Funktion ergibt sich sofort aus der folgenden Identität.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}(x, s | 1) z^n &= \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{2j \leq n} \binom{n+k-1-j}{k-1} \binom{n-j}{j} s^j x^{n-2j} \\ &= \sum_{m \geq 0} z^m \sum_{j \leq m} \binom{m+k-1}{k-1} \binom{m}{j} s^j z^j x^{m-j} = \sum_{m \geq 0} z^m \binom{m+k-1}{k-1} \sum_{j \leq m} \binom{m}{j} s^j z^j x^{m-j} \\ &= \sum_{m \geq 0} \binom{m+k-1}{k-1} (sz^2 + xz)^m = \frac{1}{(1-xz-sz^2)^k}. \end{aligned}$$

Für die erzeugende Funktion der Polynome  $L_n^{(k)}(x, s | 1)$  gilt

$$\sum_{n \geq 0} L_n^{(k)}(x, s | 1) z^n = \frac{1 + sz^2}{(1-xz-sz^2)^{k+1}}. \quad (21)$$

Das folgt aus der Identität

$$f_n^{(k+1)}(x, s | 1) + sf_{n-2}^{(k+1)}(x, s | 1) = L_n^{(k)}(x, s | 1) \quad (22)$$

für  $n \geq 2$ , die durch Vergleich von (13) und (14) leicht verifiziert werden kann und den Anfangswerten  $f_0^{(k+1)}(x, s | 1) = L_0^{(k)}(x, s | 1) = 1$  und

$$f_1^{(k+1)}(x, s | 1) = L_1^{(k)}(x, s | 1) = (k+1)x.$$

Die Formel (22) hat ein schönes  $q$ -Analogon:

$$f_n^{(k+1)}(x, s | q) + q^{n+k} sf_{n-2}^{(k+1)}(x, s | q) = L_n^{(k)}(x, qs | q). \quad (23)$$

Zum Beweis betrachten wir zuerst den Fall  $k = 0$ . Hier ist zu zeigen, dass

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} + q^n s \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n-2-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2-2j} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{\binom{j+1}{2}} \frac{[n]}{[n-j]} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j}$$

gilt. Koeffizientenvergleich zeigt, dass das gleichbedeutend ist mit der offenbar richtigen Gleichung

$$\begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \frac{[n]}{[n-j]} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}.$$

Im allgemeinen Fall ist zu zeigen, dass

$$\begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} + q^{n+k-j} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \frac{[n+k]}{[k]} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix}$$

gilt. Das ist äquivalent mit der Identität

$$\begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \frac{[j]}{[n+k-j]} \begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix},$$

die unmittelbar verifiziert werden kann.

Nun wollen wir ein  $q$ -Analogon der erzeugenden Funktionen herleiten. Genauso wie oben erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}(x, s | q) z^n &= \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{2j \leq n} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \\ &= \sum_{m \geq 0} z^m \sum_{j \leq m} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} s^j z^j x^{m-j} = \sum_{m \geq 0} z^m \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \sum_{j \leq m} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} s^j z^j x^{m-j} \end{aligned}$$

Nun gilt bekanntlich (vgl. z.B. [3])

$$(1+t)(1+qt) \cdots (1+q^{n-1}t) = \sum_j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} t^j.$$

Daher ist

$$\sum_{j \leq m} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} s^j z^j x^{m-j} = (x+qs z)(x+q^2 s z) \cdots (x+q^m s z).$$

Das ergibt

$$\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}(x, s | q) z^n = \sum_{m \geq 0} z^m \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} (x+qs z)(x+q^2 s z) \cdots (x+q^m s z) \quad (24)$$

Der Spezialfall  $k=1, x=1, s=-\frac{1}{q}$  ist besonders erwähnenswert. Er ist eng verknüpft mit

Euler's Beweis des Pentagonalzahlsatzes und ergibt (vgl. [6] und die dort zitierte Literatur)

$$\sum_{n \geq 0} z^n (1-z)(1-qz) \cdots (1-q^{n-1}z) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left( q^{\frac{k(3k-1)}{2}} z^{3k} + q^{\frac{k(3k+1)}{2}} z^{3k+1} \right)$$

Grund dafür ist die Tatsache, dass  $f_{3n}^{(1)}\left(1, -\frac{1}{q} | q\right) = (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$ ,

$$f_{3n+1}^{(1)}\left(1, -\frac{1}{q} | q\right) = (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \text{ und } f_{3n+2}^{(1)}\left(1, -\frac{1}{q} | q\right) = 0 \text{ ist.}$$

Weiters ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(1, -1 | q) = \prod_{j=k}^{\infty} (1-q^j)$ .

Man kann die erzeugende Funktion noch in eine andere Gestalt bringen. Betrachten wir den linearen Operator  $\varepsilon$ , definiert durch  $\varepsilon f(s) = f(qs)$  und den Multiplikationsoperator  $S$  mit  $Sf(s) = sf(s)$ .

Dann gilt  $(Xz\varepsilon)(qSz^2\varepsilon) = q(qSz^2\varepsilon)(Xz\varepsilon)$ .

Für Operatoren  $A, B$  mit  $BA = qAB$  gilt bekanntlich (vgl. z.B. [3]) der  $q$ -

binomische Lehrsatz  $(A + B)^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} A^j B^{n-j}$ .

Nach dem  $q$ -binomischen Lehrsatz ist also

$$(Xz\varepsilon + qSz^2\varepsilon)^m = \sum_j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} (qSz^2\varepsilon)^j (Xz\varepsilon)^{m-j} = \sum_j q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} S^j z^{m+j} X^{m-j} \varepsilon^m.$$

Daher erhalten wir unter Benützung der wohlbekannten Formel

$$\frac{1}{(1-t)\cdots(1-q^{k-1}t)} = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} t^n$$

ein schönes  $q$ -Analogon der Formel (19)

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}(x, s | q) z^n &= \sum_{m \geq 0} q^{\binom{m}{2}} \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \sum_{j \leq m} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} S^j z^{j+m} x^{m-j} \\ &= \sum_{m \geq 0} q^{\binom{m}{2}} \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} (Xz\varepsilon + qSz^2\varepsilon)^m 1 \\ &= \frac{1}{(1 - (Xz\varepsilon + qSz^2\varepsilon))(1 - q(Xz\varepsilon + qSz^2\varepsilon)) \cdots (1 - q^{k-1}(Xz\varepsilon + qSz^2\varepsilon))} 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Daraus ergibt sich, wenn man beide Seiten mit  $(1 - q^{k-1}(Xz\varepsilon + qSz^2\varepsilon))$  multipliziert

$$f_n^{(k)}(x, s | q) - q^{k-1} x f_{n-1}^{(k)}(x, qs | q) - q^k s f_{n-2}^{(k)}(x, qs | q) = f_n^{(k-1)}(x, s | q) \tag{26}$$

Multipliziert man dagegen mit  $(1 - (Xz\varepsilon + qSz^2\varepsilon))$ , so ergibt sich

$$f_n^{(k)}(x, s | q) - x f_{n-1}^{(k)}(x, qs | q) - q s f_{n-2}^{(k)}(x, qs | q) = f_n^{(k-1)}(qx, qs | q) \tag{27}$$

Wir können auch noch eine andere Version der erzeugenden Funktion finden. Sei  $\eta$  der lineare Operator mit  $\eta f(x) = f(qx)$ .

Dann ist

$$(qS_z^2 \varepsilon \eta)(Xz) = q(Xz)(qS_z^2 \varepsilon \eta).$$

Daher ist nach dem  $q$ -binomischen Lehrsatz

$$(Xz + qS_z^2 \varepsilon \eta)^m = \sum_j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} (Xz)^{m-j} (qS_z^2 \varepsilon \eta)^j = \sum_j q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} S^j z^{m+j} X^{m-j} \varepsilon^m \eta^m.$$

Somit ist auch

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}(x, s | q) z^n &= \sum_{m \geq 0} q^{\binom{m}{2}} \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} (Xz + qS_z^2 \varepsilon \eta)^m 1 \\ &= \frac{1}{(1 - (Xz + qS_z^2 \varepsilon \eta))(1 - q(Xz\varepsilon + qS_z^2 \varepsilon \eta)) \cdots (1 - q^{k-1}(Xz\varepsilon + qS_z^2 \varepsilon \eta))} 1. \end{aligned} \quad (28)$$

.

Das bedeutet

$$f_n^{(k)}(x, s | q) - x f_{n-1}^{(k)}(x, s | q) - q s f_{n-2}^{(k)}(qx, qs | q) = f_n^{(k-1)}(qx, qs | q) \quad (29)$$

und

$$f_n^{(k)}(x, s | q) - q^{k-1} x f_{n-1}^{(k)}(x, s | q) - q^k s f_{n-2}^{(k)}(qx, qs | q) = f_n^{(k-1)}(x, s | q). \quad (30)$$

Die Identität (16) lässt sich erweitern zu

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(x, s | q) - (X + (q-1)sD_q) f_{n-1}^{(k)}(x, s | q) - s f_{n-2}^{(k)}(x, s | q) \\ = f_n^{(k-1)}(qx, s | q) = q^n f_n^{(k-1)}\left(x, \frac{s}{q^2} | q\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Denn sie bedeutet

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} - \sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2j} \\
& - (q-1)s \sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j \end{bmatrix} s^j [n-1-2j] x^{n-2-2j} \\
& - s \sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-3 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-2 \\ j \end{bmatrix} s^j x^{n-2-2j} - \sum_{j=0} q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} s^j (qx)^{n-2j} = 0.
\end{aligned}$$

Der Koeffizient von  $s^j x^{n-2j}$  ist dabei

$$\begin{aligned}
& q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} - q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j \end{bmatrix} - (q-1)q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j-1 \end{bmatrix} [n+1-2j] \\
& - q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} - q^{\binom{j+1}{2}+n-2j} \begin{bmatrix} n+k-j-2 \\ k-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-j \\ j \end{bmatrix} \\
& = q^{\binom{j+1}{2}} \frac{[n+k-j-1]!}{[k-1]![j]![n-2j]!} - q^{\binom{j+1}{2}} \frac{[n+k-j-2]!}{[k-1]![j]![n-2j-1]!} - (q^{n+1-2j} - 1)q^{\binom{j}{2}} \frac{[n+k-j-1]!}{[k-1]![j-1]![n-2j+1]!} \\
& - q^{\binom{j}{2}} \frac{[n+k-j-2]!}{[k-1]![j-1]![n-2j]!} - q^{\binom{j+1}{2}+n-2j} \frac{[n+k-j-2]!}{[k-2]![j]![n-2j]!}
\end{aligned}$$

Hebt man  $\frac{q^{\binom{j}{2}} [n+k-j-2]!}{[k-1]![j]![n-2j+1]!}$  heraus, dann bleibt der Faktor

$$\begin{aligned}
& q^j [n+k-j-1][n-2j+1] - q^j [n-2j][n-2j+1] - (q^{n+1-2j} - 1)[n+k-j-1][j] \\
& - [j][n-2j+1] - q^{n-j} [k-1][n-2j+1] = 0.
\end{aligned}$$

Nun wollen wir noch (12) beweisen.

$$f_n^{(k)}(x, s | q) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j(n-j)} (-qs)^j \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} L_{n-2j}(x, qs | q). \quad (32)$$

Das stimmt für  $k=0$ . Für  $k=1$  bedeutet es

$$f_n^{(1)}(x, s | q) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j(n-j)} (-qs)^j L_{n-2j}(x, qs | q). \quad (33)$$

Das folgt aus (23) für  $k = 0$ . Denn

$$f_n^{(1)}(x, s | q) + q^n s f_{n-2}^{(1)}(x, s | q) = L_n(x, qs | q) \text{ impliziert}$$

$$f_n^{(1)}(x, s | q) = L_n(x, qs | q) - q^n s f_{n-2}^{(1)}(x, s | q) = L_n(x, s | q) - q^n s (L_{n-2}(x, qs | q) - q^{n-2} s f_{n-2}^{(1)}(x, s | q))$$

$$= \dots = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j(n-j)} (-qs)^j L_{n-2j}(x, s | q).$$

Nun müssen wir nur noch (23) überprüfen.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j(n-j)} (-qs)^j \begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k \\ k \end{bmatrix} L_{n-2j}(x, qs | q) \\ & + q^{n+k} s \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} q^{j(n-2-j)} (-qs)^j \begin{bmatrix} n-2+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k \\ k \end{bmatrix} L_{n-2j-2}(x, qs | q) \\ & = \frac{[n+k]}{[k]} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j(n-j)} (-qs)^j \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} L_{n-2j}(x, qs | q) \end{aligned}$$

Das ist äquivalent mit

$$\begin{bmatrix} n+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k \\ k \end{bmatrix} - q^k \begin{bmatrix} n-1+k-j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k-1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n+k]}{[k]} \begin{bmatrix} n+k-1-j \\ k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

oder

$$[n+k-j][j+k] - q^k [n-j][j] - [n+k][k] = 0.$$

Analog zu (33) folgt allgemein aus (23)

$$f_n^{(k+1)}(x, s | q) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{j(n+k-j)} (-qs)^j \frac{[n+k-2j]}{[k]} f_{n-2j}^{(k)}(x, s | q). \quad (34)$$

Da jedes  $L_n^{(k)}(x, s | q)$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist, lässt sich  $x^n$  eindeutig als Linearkombination dieser Polynome darstellen. Es gilt

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-s)^j \begin{bmatrix} n+k \\ j \end{bmatrix} L_{n-2j}^{(k)}(x, s) = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} x^n \quad (35)$$

oder anders ausgedrückt

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-s)^j \frac{[k]![n]!}{[j]![n+k-j]!} L_{n-2j}^{(k)}(x, s) = x^n. \quad (36)$$

Zum Beweis vergleichen wir die Koeffizienten. Als Koeffizient von  $x^{n-2m}$  ergibt sich auf der linken Seite

$$\frac{[n]!}{[m]![n-2m]!} \sum_{i+j=m} (-1)^j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \frac{[n-2j+k]}{[n+k-j]!} [n-j+k-m-1]! q^{\binom{i}{2}}.$$

Es ist also zu zeigen, dass für  $2m \leq n$

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} \frac{[n-2m+2i+k]}{[n+k-m+i]!} [n-2m+k+i-1]! q^{\binom{i}{2}} = [m=0]$$

oder für  $m \leq n$

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i q^{\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} \frac{[n-m+k+2i]}{[n+k+i][n+k+i-1] \cdots [n+k-m+i]} = [m=0]$$

gilt.

Das ist ein Spezialfall der Formel

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \frac{1 - q^{2j} a}{(q^j a; q)_{m+1}} = [m = 0] \quad (37)$$

für  $a = q^{n-m+k}$ . Diese Formel trat in [5] in anderem Zusammenhang auf. Dabei bedeutet  $(a; q)_n = (1 - qa)(1 - q^2 a) \cdots (1 - q^n a)$ . Sie lässt sich sehr einfach mit Hilfe des  $q$ -Zeilbergeralgorithmus beweisen.

Ein anderer Beweis kann wie in [8] mit den Methoden von [2] geführt werden.

Betrachtet man das lineare Funktional  $\Lambda_k$ , definiert durch

$$\Lambda_k(L_n^{(k)}(x, -1)) = [n = 0], \quad (38)$$

dann ergibt sich aus (36)  $\Lambda_k(x^{2n+1}) = 0$  und

$$\Lambda_k(x^{2n}) = \frac{[k]![2n]!}{[n]![n+k]!}. \quad (39)$$

Für  $k = 0$  ergibt sich das  $q$ -Analogon  $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$  der zentralen Binomialkoeffizienten.

Für  $k = 1$  erhalten wir ein  $q$ -Analogon der Catalan-Zahlen

$$\Lambda_k(x^{2n}) = \frac{[2n]!}{[n]![n+1]!} = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}.$$

Die rechte Seite von (35) ist unabhängig von  $s$ . Vergleicht man mit (18), so fällt auf, dass

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \left( \frac{s}{1-q} \right)^j L_{n-2j-k}^{(k)} \left( X, -\frac{s}{1-q} \mid q \right) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}$$

ist, also für  $q \rightarrow 1$  einen anderen Grenzwert hat als (18), wo statt der  $q$ -Binomialkoeffizienten  $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$  die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{j}$  auftreten.

In allen bisher betrachteten Rekurrenzrelationen für  $f_n^{(k)}(x, s | q)$  tritt irgendwo  $qx$  bzw.  $qs$  statt  $x$  bzw.  $s$  auf. Es gibt aber auch echte Rekurrenzrelationen, wo jeweils nur feste Werte  $x, s$  vorkommen, so wie das für  $q = 1$  der Fall ist. Dabei treten jedoch Polynome als Koeffizienten auf.

Für  $q = 1$  gibt es u.a. die folgende Rekursion

$$nf_n^{(k)}(x, s | 1) - (n + k - 1)xf_{n-1}^{(k)}(x, s | 1) - (n + 2k - 2)sf_{n-2}^{(k)}(x, s | 1) = 0. \quad (40)$$

Für  $k = 1$  reduziert sich das auf die übliche Rekursion

$$f_n^{(1)}(x, s | 1) - xf_{n-1}^{(1)}(x, s | 1) - sf_{n-2}^{(1)}(x, s | 1) = 0.$$

Das folgt sofort aus der erzeugenden Funktion.

Denn

$$\begin{aligned} & \sum_n nf_n^{(k)}(x, s)z^n - x \sum_n (n-1)f_{n-1}^{(k)}(x, s)z^n - s \sum_n (n-2)f_{n-2}^{(k)}(x, s)z^n \\ &= (1 - xz - sz^2)z \frac{d}{dz} \frac{1}{(1 - xz - sz^2)^k} = (1 - xz - sz^2) \frac{k(xz + 2sz^2)}{(1 - xz - sz^2)^{k+1}} \\ &= \frac{k(xz + 2sz^2)}{(1 - xz - sz^2)^k} = \sum_n (kxf_{n-1}^{(k)}(x, s) + 2ksf_{n-2}^{(k)}(x, s))z^n. \end{aligned} \quad (41)$$

Das entsprechende  $q$ -Analogon ist etwas komplizierter:

$f_n^{(k)}(x, s | q)$  erfüllt

$$\begin{aligned} & [n + k - 3][n]f_n^{(k)}(x, s | q) = x[n + k - 3][n + k - 1]f_{n-1}^{(k)}(x, s | q) \\ & + sq^{n-1}[2][k - 1][n + k - 2]f_{n-2}^{(k)}(x, s | q) + sxq^{n+k-2}[n + k - 3][n + k - 1]f_{n-3}^{(k)}(x, s | q) \\ & + s^2q^{n-1}[n + k - 1][n + 2k - 4]f_{n-4}^{(k)}(x, s | q). \end{aligned} \quad (42)$$

Die etwas mühsame Verifikation sei dem Leser überlassen.

Für  $k = 1$  kann man die Terme  $[n][n - 2]$  kürzen und erhält die Rekursion

$$f_n^{(1)}(x, s | q) = xf_{n-1}^{(1)}(x, s | q) + q^{n-1}sf_{n-3}^{(1)}(x, s | q) + q^{n-1}s^2f_{n-4}^{(k)}(x, s | q).$$

### Literaturhinweise

- [1] J. L. Burchnall, A note on the polynomials of Hermite, *Quart. J. Math.* 12(1941), 9-11
- [2] L. Carlitz, Some inversion formulas, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, 12 (1963), 183-199
- [3] J. Cigler, Elementare  $q$  – Identitäten, *Sem. Lotharingien Comb.*, B05a (1981), 29 pp.
- [4] J. Cigler, Einige  $q$  – Analoga der Lucas- und Fibonacci-Polynome, *Sitzungsber. ÖAW* 211 (2002), 3-20
- [5] J. Cigler, A simple approach to some Hankel determinants, [arXiv:0902.1650](https://arxiv.org/abs/0902.1650)
- [6] J. Cigler, A new class of  $q$  – Fibonacci polynomials, *Electr. J. Comb.* 10 (2003), #R19
- [7] J. Cigler and J. Zeng, Two curious  $q$  – analogues of Hermite polynomials, [arXiv: 0905.0228](https://arxiv.org/abs/0905.0228)
- [8] J. Cigler,  $q$  – Lucas polynomials and associated Rogers-Ramanujan type identities, [arXiv:0907.0165](https://arxiv.org/abs/0907.0165)
- [9] J. Cigler, Some operator identities related to  $q$  – Hermite polynomials, [arXiv: 1006.3210](https://arxiv.org/abs/1006.3210)
- [10] G.-C. Rota, *Finite Operator Calculus*, Academic Press 1975
- [11] A. Varvak, Rook numbers and the normal ordering problem, *J. Comb. Th. A* 112 (2005), 292-307