Mathematische Randbemerkungen 11.
Fibonacci-Polynome und Genocchi -Zahlen

Johann Cigler

Aus mathematischen Arbeiten ist leider nur selten ersichtlich, wie die dort bewiesenen Resultate gefunden wurden. Bei manchen Arbeiten kann man die Entstehungsgeschichte erraten, bei anderen überhaupt nicht. Ich würde gerne mehr darüber erfahren. Um vielleicht den einen oder die andere anzuregen, über solche Erfahrungen zu berichten, möchte ich im Folgenden schildern, wie ich von einem einfachen Problem über Fibonaccipolynome zur Betrachtung von $q-$Genocchi- Zahlen gekommen bin.

1.

Mein Ausgangspunkt war eine Frage über Fibonaccipolynome. Definiert man sie durch

$$F_n(s)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-k-1}{k}s^k, \tag{1}$$

dann erfüllen sie die Rekurrenz

$$F_n(s)=F_{n-1}(s)+sF_{n-2}(s) \tag{2}$$

mit den Anfangswerten $F_0(s)=0$ und $F_1(s)=1$.

Die Folge dieser Polynome beginnt mit

$0,1,1,1+s,1+2s,1+3s+s^2,1+4s+3s^2,1+5s+6s^2+s^3,\cdots$

Es ist klar, dass die Polynome $\left(F_{2n+1}(s)\right)_{n\geq 0}$ eine Basis für den Vektorraum der Polynome in s bilden, weil $F_{2n+1}(s)$ genau den Grad n hat. Mich interessierte die Darstellung von $F_{2n}(s)$ durch diese Polynome.

Sei also

$$F_{2n}(s)=\sum_{k=0}^{n-1}a(n,k)F_{2k+1}(s). \tag{3}$$

Ich habe mit Mathematica die ersten Werte der Matrix $\left(a(n,k)\right)_{n\geq 1,k\geq 0}$ berechnet. Es ergab sich z.B. $\left(a(n,k)\right)_{1\leq n\leq 5,0\leq k\leq 4}$ als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ -17 & 28 & -14 & 4 & 0 \\ 155 & -255 & 126 & -30 & 5 \end{pmatrix}$$

Damit konnte ich zunächst nicht viel anfangen. Aber glücklicherweise gibt es die On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Dort sah ich, dass die Zahlen der ersten Spalte bis auf das Vorzeichen mit den sogenannten Genocchi-Zahlen übereinstimmen.

Die Genocchi-Zahlen G_{2n} werden üblicherweise als Koeffizienten der Reihenentwicklung von $\frac{2z}{1+e^z}$ definiert. Es gibt verschiedene Bezeichnungen. Ich verwende im Folgenden sowohl

$$\frac{2z}{1+e^z} = z + \sum_{n\geq 1} (-1)^n G_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{4}$$

als auch

$$\frac{2z}{1+e^z} = \sum_{n\geq 0} g_n \frac{z^n}{(n)!}. \tag{5}$$

Wenn man in (5) Koeffizienten vergleicht, ergibt sich

$$g_n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k = 2[n=1]. \tag{6}$$

Dadurch sind die Zahlen g_n eindeutig festgelegt.
Die Folge $(g_n)_{n\geq 0}$ beginnt mit
$0, 1, -1, 0, 1, 0, -3, 0, 17, 0, -155, 0, 2073, \cdots$
Es zeigt sich, dass alle g_n ganze Zahlen sind und G_{2n} positiv ist. Bekanntlich gilt
$G_{2n} = 2(1-2^{2n})B_{2n}$.

2.
Damit hat mein Problem plötzlich eine andere Wendung erhalten. Ich begann mich dafür zu interessieren, ob und wenn ja was die Fibonacci-Polynome mit den Genocchi-Zahlen zu tun haben.

Um die erste Spalte der Matrix $\left(a(n,k)\right)_{n\geq 1, k\geq 0}$ zu erhalten, wandte ich das lineare Funktional L auf dem Vektorraum der Polynome in s, das durch

$$L\left(F_{2n+1}(s)\right) = 0 \tag{7}$$

for $n > 0$ and $L\left(F_1(s)\right) = L(1) = 1$ eindeutig bestimmt ist, auf (3) an. Ein Vergleich mit den Genocchi-Zahlen ergab die Vermutung, dass

$$L(F_{2n}(s)) = (-1)^{n-1} G_{2n} \tag{8}$$

gilt oder anders ausgedrückt, dass

$$g_n = -L(F_n(s)) \tag{9}$$

für $n \neq 1$ erfüllt ist.

Es erstaunt mich immer wieder, dass man bei derartigen Problemen aus ganz wenig Werten so allgemeine Schlüsse ziehen kann, die sich als richtig erweisen. Es würde mich interessieren, ob man dafür vernünftige Gründe angeben kann.

Ich nahm an, dass dieser überraschende Zusammenhang zwischen Fibonacci-Polynomen und Genocchi-Zahlen längst bekannt sein musste. Ich wusste allerdings nicht, wo ich suchen sollte. Ich wandte mich an Jiang Zeng, der einige Arbeiten über Genocchi-Zahlen verfasst hatte. Von ihm erfuhr ich, dass das erwähnte Resultat implizit in seiner Arbeit mit Dumont [4] aus dem Jahr 1994 als Corollary 1 enthalten ist, also gerade 15 Jahre alt ist. Allerdings kam dieses Resultat dort nur am Rande vor. Meiner Meinung nach sollte es eine zentrale Stelle einnehmen und der Ausgangspunkt für weitergehende Untersuchungen sein.

3.

In der Zwischenzeit hatte ich auch versucht, ein $q-$ Analogon dieses Resultats zu finden. Mit $q-$ Fibonacci-Polynomen habe ich mich schon öfter beschäftigt. Die einfachsten sind die zuerst von L. Carlitz betrachteten $q-$ Fibonacci-Polynome

$$F_n(s,q) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix} s^k, \tag{10}$$

welche die Rekurrenz

$$F_n(s,q) = F_{n-1}(s,q) + q^{n-3} s F_{n-2}(s,q) \tag{11}$$

erfüllen.

Die Folge dieser Polynome beginnt mit

$0,1,1,1+s,1+(1+q)s,1+(1+q+q^2)s+s^2,1+(1+q+q^2+q^3)s+(1+q+q^2)s^2,\cdots$

In Analogie zu den vorigen Überlegungen habe ich ein lineares Funktional L durch

$$L\left(F_{2n+1}(s,q)\right) = [n=0] \tag{12}$$

definiert und einige Werte $L\left(F_{2n}(s,q)\right)$ berechnet. Hier ergab sich

$\{1,\ -q,\ q^2\,(1+q+q^2),\ -q^3\,(1+2q+4q^2+4q^3+3q^4+2q^5+q^6),$
$q^4\,(1+q+q^2+q^3+q^4)\,(1+2q+5q^2+6q^3+6q^4+5q^5+3q^6+2q^7+q^8)\}$

Ich war wieder überrascht, als ich sah, dass ein einfacher Zusammenhang mit einem $q-$ Analogon der Genocchi-Zahlen zu existieren schien, das Zeng und Zhou [8] aus ganz anderen Gründen studiert hatten. Es ergab sich nämlich die Vermutung, dass

$$L(F_{2n}(s,q)) = (-1)^{n-1} q^{(n-1)^2} G_{2n}\left(\frac{1}{q}\right) \tag{13}$$

gilt. Dieses Resultat war anscheinend neu.

4.

Bevor ich versuchte, einen Beweis zu finden, wollte ich mehr darüber herausfinden, welche Rolle die Fibonacci-Polynome im eben betrachteten klassischen Fall spielen. Ich kannte die beiden Arbeiten [4] und [8] über Genocchi-Zahlen. In der einen kam eine Version der Fibonacci-Polynome vor, in der anderen lag ein kombinatorisches Modell zugrunde. Es wurden jeweils verschiedene Zugänge gewählt. In der ersten Arbeit war von einer Seidel-Matrix, in der zweiten von einem anders definierten Seidel-Dreieck die Rede. Mir war zunächst nicht klar, wie diese zusammenhängen. Angesichts der zunehmenden Spezialisierung in der Mathematik wäre es besonders wichtig, auf Querverbindungen bei verschiedenen Zugangsmöglichkeiten hinzuweisen. Die ursprüngliche Arbeit von Seidel wurde zwar oft zitiert, nur war sie mir leider zunächst nicht zugänglich. Auf der Suche nach weiterer Literatur fand ich die Arbeit [3] von Dumont, aus der die Zusammenhänge ersichtlich waren. Diese Arbeit war weder in [4] noch in [8] zitiert. Das hat wahrscheinlich damit zu tun, dass sie hauptsächlich eine Zusammenfassung bekannter Resultate darstellt und es offenbar üblich ist, vor allem jene Arbeiten zu zitieren, wo ein bestimmtes Resultat zum ersten Mal bewiesen wurde. Das mag vielleicht wichtig sein, um Fragen der Priorität zu klären. Mindestens so wichtig wäre aber meiner Meinung nach, auch Übersichtsartikel zu zitieren, aus welchen ein Leser, der mit den entsprechenden Theorien nicht vertraut ist, relevante Zusammenhänge lernen und vereinfachte Beweise finden kann.

In der Arbeit [3] von Dumont geht es um folgendes: Sei $a_0, a_1, a_2, \cdots$ eine Folge von Elementen eines kommutativen Rings. Die zugehörige Euler-Seidel-Matrix sei die Matrix $\left(a_{n,k}\right)$, wo

$$a_{n,0} = a_n \tag{14}$$

für $n \geq 0$ und

$$a_{n,k} = a_{n,k-1} + a_{n+1,k-1} \tag{15}$$

für $k \geq 1$ gilt.
Dann ist klar, dass

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{n+i,0} \tag{16}$$

gilt.

Wählt man $a_{n,0} = g_n$, so ergibt sich die Euler-Seidel-Matrix für die Genocchi-Zahlen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -17 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 3 & -3 & -17 & 17 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -6 & -14 & 34 & 138 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -8 & -8 & 48 & 104 & -448 \\ 1 & 1 & -2 & -8 & 0 & 56 & 56 & -552 & -1160 \\ 0 & -3 & -6 & 8 & 56 & 0 & -608 & -608 & 8832 \\ -3 & -3 & 14 & 48 & -56 & -608 & 0 & 9440 & 9440 \\ 0 & 17 & 34 & -104 & -552 & 608 & 9440 & 0 & -198272 \\ 17 & 17 & -138 & -448 & 1160 & 8832 & -9440 & -198272 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Zusammenhang zwischen den Genocchi-Zahlen und den Fibonacci-Polynomen legt es nun nahe, die Euler-Seidel-Matrix zur Folge $a_n = (-1)^{n-1} F_n(s)$, also wegen (2) die Matrix $\left(a_{n,k}\right)_{n,k\geq 0}$ mit

$$a_{n,k} = (-1)^{n-k-1} s^k F_{n-k}(s) \tag{17}$$

zu studieren.
Dabei erweitern wir die Fibonacci-Polynome unter Beibehaltung der Rekurrenz (2) auf negative n. Es ergibt sich

$$F_{-n}(s) = (-1)^{n-1} \frac{F_n(s)}{s^n}. \tag{18}$$

Die ersten Terme dieser Euler-Seidel-Matrix sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1+s & 1+2s & 1+3s+s^2 & 1+4s+3s^2 \\ 1 & 0 & s & s & s+s^2 & s+2s^2 & s+3s^2+s^3 \\ -1 & s & 0 & s^2 & s^2 & s^2+s^3 & s^2+2s^3 \\ 1+s & -s & s^2 & 0 & s^3 & s^3 & s^3+s^4 \\ -1-2s & s+s^2 & -s^2 & s^3 & 0 & s^4 & s^4 \\ 1+3s+s^2 & -s-2s^2 & s^2+s^3 & -s^3 & s^4 & 0 & s^5 \\ -1-4s-3s^2 & s+3s^2+s^3 & -s^2-2s^3 & s^3+s^4 & -s^4 & s^5 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus (17) und (18) ergibt sich $a_{n,n-2k} = -s^{n-2k}F_{2k}(s)$ und $a_{n-2k,n} = -s^n F_{-2k}(s) = s^{n-2k}F_{2k}(s)$
Daher ist

$$a_{n,n-2k} = -a_{n-2k,n}. \tag{19}$$

Als Spezialfall ergibt sich

$$a_{n,n} = 0. \tag{20}$$

Genauso ergibt sich

$$a_{n,n-2k-1} = a_{n-2k-1,n}. \tag{21}$$

Aufgrund des Zusammenhangs mit den Genocchi-Zahlen ergeben sich durch Anwendung des linearen Funktionals L sofort Eigenschaften der Seidel-Matrix für die Genocchi-Zahlen.

5.
Wir betrachten nun die linke untere Teilmatrix. Diese sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} F_1[s] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F_2[s] & s\,F_1[s] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_3[s] & -s\,F_2[s] & s^2\,F_1[s] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F_4[s] & s\,F_3[s] & -s^2\,F_2[s] & s^3\,F_1[s] & 0 & 0 & 0 \\ F_5[s] & -s\,F_4[s] & s^2\,F_3[s] & -s^3\,F_2[s] & s^4\,F_1[s] & 0 & 0 \\ -F_6[s] & s\,F_5[s] & -s^2\,F_4[s] & s^3\,F_3[s] & -s^4\,F_2[s] & s^5\,F_1[s] & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bilden nun eine neue Matrix, wo die Elemente der Diagonale $i+j=n$ aus der obigen Matrix in der Reihenfolge von rechts oben nach links bis auf eine geeignete Wahl des Vorzeichens unten in der $n-$ten Zeile stehen, d.h. wir betrachten statt der Matrix $\left((-1)^{i-j-1}s^j F_{i-j}(s)\right)_{i,j\geq 0}$ die Matrix $\left(b_{n,k}\right)_{n\geq 0,k\geq 1}$ mit

$$b_{2n,k} = (-1)^n s^{n+1-k}F_{2k-1}(s) \tag{22}$$

und

$$b_{2n+1,k} = (-1)^n s^{n+1-k}F_{2k}(s) \tag{23}$$

für $k = 1,2,\cdots,n+1.$ Alle anderen Einträge seien $0.$
Diese schaut folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} F_1[s] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_2[s] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s\,F_1[s] & -F_3[s] & 0 & 0 & 0 \\ -s\,F_2[s] & -F_4[s] & 0 & 0 & 0 \\ s^2\,F_1[s] & s\,F_3[s] & F_5[s] & 0 & 0 \\ s^2\,F_2[s] & s\,F_4[s] & F_6[s] & 0 & 0 \\ -s^3\,F_1[s] & -s^2\,F_3[s] & -s\,F_5[s] & -F_7[s] & 0 \\ -s^3\,F_2[s] & -s^2\,F_4[s] & -s\,F_6[s] & -F_8[s] & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vorzeichen sind so gewählt, dass

$$b_{2n+1,k} = b_{2n+1,k-1} + b_{2n,k} \tag{24}$$

für $k = 2,3,\cdots,n+1$ gilt. Weil $F_0(s) = 0$ ist, gilt das auch für $k = 1$.
Für die geraden Indizes gilt

$$b_{2n,k} = b_{2n,k+1} + b_{2n-1,k} \tag{25}$$

für $k = 1,2,\cdots,n.$
Für $k = n+1$ ergibt sich dagegen $b_{2n,n+1} = (-1)^n F_{2n+1}(s) \neq 0 + 0 = 0.$
Wenn wir hier jedoch das lineare Funktional L anwenden, also $g_{n,k} = L(b_{n,k})$ bilden, dann bleibt (25) auch für $k = n+1$ richtig. In diesem Fall lässt sich die gesamte Matrix aus den beiden Anfangswerten
$g_{0,1} = 1$ und $g_{1,1} = 1$ mit den Rekursionen

$$g_{2n+1,k} = g_{2n+1,k-1} + g_{2n,k} \tag{26}$$

und

$$g_{2n,k} = g_{2n,k+1} + g_{2n-1,k} \tag{27}$$

berechnen. Man muss dabei beachten, dass man für gerade Indizes die Werte von rechts nach links berechnen muss.
Es ergibt sich also die Matrix $\left(g_{n,k}\right)_{n\geq 0,k\geq 1}$, die folgendermaßen beginnt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und deren Koeffizienten nach Konstruktion nicht negativ sind.
Die Matrix $\left(g_{i,j}\right)_{i,j\geq 1}$ wird als Seidel-Dreieck für die Genocchi-Zahlen bezeichnet.
Aus (22) und (23) ergibt sich für $k = 1,2,\cdots,n+1$

$$g_{2n,k} = (-1)^n L(s^{n+1-k} F_{2k-1}) \tag{28}$$

und

$$g_{2n+1,k} = (-1)^n L(s^{n+1-k} F_{2k}). \tag{29}$$

6.
Allerdings ist bis jetzt noch nicht bewiesen, dass (9) tatsächlich gilt. Das ergibt sich jedoch - unabhängig von den Resultaten in [4] - aus einer einfachen Eigenschaft der Fibonacci-Polynome $F_n(s)$. Sie erfüllen nämlich

$$F_n(s)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_k(s)=0. \tag{30}$$

Diese Gleichung ist eine einfache Folgerung der Formel von Binet

$$F_n(s)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{31}$$

mit $\alpha=\frac{1+\sqrt{1+4s}}{2}$ und $\beta=\frac{1-\sqrt{1+4s}}{2}=1-\alpha.$
Denn wegen $\alpha^n+(1-\alpha)^n=\alpha^n+\beta^n=\beta^n+(1-\beta)^n$

ergibt sich

$$F_n(s)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_k(s)=\frac{\alpha^n+(1-\alpha)^n-\left(\beta^n+(1-\beta)^n\right)}{\alpha-\beta}=0.$$

In Wirklichkeit braucht man nicht einmal die Formel von Binet, sondern kommt mit der Rekurrenzrelation (2) aus. Sei $\Delta F_k(s)=F_{k+1}(s)-F_k(s).$ Dann ist nach (2) $\Delta F_k(s)=sF_{k-1}(s)$ und daher

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}F_{k+j}(s)=\Delta^n F_k(s)=s^nF_{k-n}(s). \tag{32}$$

Speziell ist also

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}F_j(s)=(-1)^n\Delta^nF_0(s)=(-1)^n s^nF_{-n}(s)=-F_n(s). \tag{33}$$

Die Identität (30) kann auch in der Form

$$F_n(s)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(s)=2\sum\binom{n}{2k+1}F_{2k+1}(s)$$

geschrieben werden.

Daraus folgt

$$L(F_n(s))+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L(F_k(s))=2\binom{n}{1}L(F_1(s))=2n.$$

Sei nun $h_1=1$ und $h_n=-L(F_n(s))$ für $n\neq 1.$
Dann gilt also $h_n+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h_k=2[n=1]$. Ein Vergleich mit (6) liefert $h_n=g_n$ und daher

$$g_n=-L(F_n(s)) \tag{34}$$

für $n \neq 1$.
Speziell ergibt sich $g_{2n} = -L\left(F_{2n}(s)\right) = (-1)^n g_{2n-1,n}$. Da $g_{2n-1,n} > 0$ ist, ergibt sich (8).

Die Zahlen

$$H_{2n+1} := g_{2n+1,1} = (-1)^n L(s^n) \tag{35}$$

werden "median Genocchi numbers" genannt.

Weiters folgt aus (17)

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g_{n+j} = (-1)^{n+k-1} L\left(s^k F_{n-k}(s)\right). \tag{36}$$

Der wichtigste Spezialfall ist die

Seidel-Identität

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g_{n+j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} (-1)^k G_{2n-2k} = 0. \tag{37}$$

Ein direkter Beweis von $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} (-1)^k G_{2n-2k} = 0$ ergibt sich durch Anwendung von L auf die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} F_{2n-k}(s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} F_{n+k}(s) = 0. \tag{38}$$

Diese ergibt sich als Spezialfall von (32) für $k = n$.

Eine weitere nützliche Formel ist

$$H_{2n+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g_{n+k} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} G_{2n-2k} \tag{39}$$

für $n > 1$.

Wenn wir das lineare Funktional L auf die erzeugende Funktion

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+1}(s) z^n = \frac{1}{1-z-sz^2} = \frac{1}{1-z} \sum_{n\geq 0} s^n \left(\frac{z^2}{1-z}\right)^n$$

der Fibonacci-Polynome anwenden, ergibt sich

$$1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} G_{2n} z^{2n-1} = \frac{1}{1-z} \sum_{n\geq 0} (-1)^n H_{2n+1} \left(\frac{z^2}{1-z}\right)^n. \tag{40}$$

Multipliziert man beide Seiten mit z^2 und ersetzt dann $z \to -z$, dann erhält man

$$z^2 + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} G_{2n} z^{2n+1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n H_{2n+1}\left(\frac{z^2}{1-z}\right)^{n+1}.$$

Dieser Zusammenhang wurde in [4], Theorem 1, bewiesen.

7.

Nachdem ich diesen Sachverhalt verstanden hatte, habe ich mir noch einmal die Koeffizienten der Entwicklung (3) angesehen.

Dabei ergab sich der Reihe nach

$$a(n,n-1) = n = \binom{2n}{1}\frac{1}{2}$$

$$a(n,n-2) = \binom{2n}{3}\frac{1}{4}(-1)$$

$$a(n,n-3) = \binom{2n}{5}\frac{1}{6}\cdot 3$$

$$a(n,n-4) = \binom{2n}{7}\frac{1}{8}\cdot(-17)$$

Das führte zur Vermutung, dass allgemein

$$a(n,n-k) = -g_{2k}\binom{2n}{2k-1}\frac{1}{2k} \tag{41}$$

ist.

Das bedeutet

$$F_{2n}(s) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1} G_{2n-2k}\binom{2n}{2k+1}\frac{1}{2(n-k)} F_{2k+1}(s) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{1}{2k+1}\binom{2n}{2k} G_{2n-2k} F_{2k+1}(s). \tag{42}$$

Um (42) zu beweisen, schreibe ich es in der folgenden Gestalt

$$\frac{F_{2n}(s)}{(2n)!} = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{G_{2n-2k}}{(2n-2k)!}\frac{F_{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Das ist äquivalent mit

$$\sum_{n\geq 0}\frac{F_{2n}(s)}{(2n)!}z^{2n} = -\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n G_{2n}}{(2n)!}z^{2n}\sum_{n\geq 0}\frac{F_{2n+1}(s)}{(2n+1)!}z^{2n} = -z\frac{1-e^z}{1+e^z}\sum_{n\geq 0}\frac{F_{2n+1}(s)}{(2n+1)!}z^{2n}$$

oder mit

$$(1+e^z)\sum_{n\geq 0}\frac{F_{2n}(s)}{(2n)!}z^{2n} = (e^z-1)\sum_{n\geq 0}\frac{F_{2n+1}(s)}{(2n+1)!}z^{2n+1}. \tag{43}$$

Auch diese Identität folgt wieder sehr einfach aus den Binet-Formeln.

Sie lässt sich nämlich folgendermaßen schreiben:

$$(1+e^z)\left(e^{\alpha z} - e^{\beta z} + e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right) = \left(e^z - 1\right)\left(e^{\alpha z} - e^{\beta z} - e^{-\alpha z} + e^{-\beta z}\right)$$

Beachtet man, dass $\alpha+\beta=1$ ist, so reduziert sich diese Identität auf
$e^{\alpha z}-e^{\beta z}+e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}+e^{(\alpha+1)z}-e^{(\beta+1)z}+e^{(1-\alpha)z}-e^{(1-\beta)z}$
$=e^{(1+\alpha)z}-e^{(1+\beta)z}-e^{(1-\alpha)z}+e^{(1-\beta)z}-\left(e^{\alpha z}-e^{\beta z}-e^{-\alpha z}+e^{-\beta z}\right)$
und diese stimmt trivialerweise.

Damit war mein Ausgangsproblem, die Koeffizienten von (3) zu finden, vollständig gelöst. Gleichzeitig hatte ich aber auch einen neuen Zugang zu meinen bisherigen Resultaten gefunden:
Man gehe von (43) aus und definiere das lineare Funktional L durch (7). Dann ergibt (43)
$(1+e^z)\sum_{n\geq 0}\frac{L\left(F_{2n}(s)\right)}{(2n)!}z^{2n}=z(e^z-1)$
oder anders ausgedrückt

$$\sum_{n\geq 0}\frac{L\left(F_{2n}(s)\right)}{(2n)!}z^{2n}=-z\frac{1-e^z}{1+e^z}=z-\frac{2z}{1+e^z}=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}G_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Man erhält also sofort (8). Jetzt hatte ich verstanden, wie die Fibonacci-Polynome mit den Genocchi-Zahlen zusammenhängen. Das ist wieder ein Beispiel dafür, wie Dinge, die anfänglich undurchschaubar sind, nach und nach ziemlich trivial werden.

Auch der Beweis von (43) lässt sich noch vereinfachen. Diese Identität ist nämlich äquivalent mit

$$\sum_{n\geq 0}\frac{F_n(s)}{n!}z^n=-e^z\sum_{n\geq 0}\frac{F_n(s)}{n!}(-z)^n, \tag{44}$$

weil
$e^{\alpha z}-e^{\beta z}=-e^z\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right)$ ist. Koeffizientenvergleich liefert wieder (30).

Das ist eine Identität, die so einfach ist, dass sie sicher einige Male gefunden wurde. Darum wundert es mich wirklich, dass der Zusammenhang mit den Genocchi-Zahlen nicht früher entdeckt wurde.

Man sieht also, wie mein ursprüngliches Problem im Laufe dieser Überlegungen durch die Frage nach den Eigenschaften des linearen Funktionals L und seines $q-$Analogons ersetzt wurde.

8.
Dann habe ich geschaut, was passiert, wenn ich ein lineares Funktional M durch $M\left(F_{2n}\right)=[n=1]$ definiere.
Dabei ergibt sich

$$M\left(F_{2n+1}(s)\right)=(2n+1)B_{2n}, \tag{45}$$

wobei $\left(B_n\right)$ die Folge der Bernoulli-Zahlen ist, die wir durch

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k=B_n \tag{46}$$

für $n>1$ und $B_0=1$ definieren.
Das folgt aus (43) und der wohlbekannten Identität

$$\frac{z^2}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}=\sum_{n\geq 0}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n+1}.$$

Dann ergibt sich wie oben

$$F_{2n+1}(s)=\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}\frac{B_{2n-2j}}{j+1}F_{2j+2}(s). \tag{47}$$

Dieses Resultat hat mich zunächst nicht sehr interessiert, weil hier keine ganzen Zahlen als Koeffizienten auftreten. Bei der Suche nach Arbeiten über Genocchi-Zahlen stieß ich dann jedoch auf die Arbeit von I.M. Gessel [5], in der ein einfacher Beweis für das folgende Resultat von M. Kaneko [6] gegeben wird:

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(n+i+1)B_{n+i}=0. \tag{48}$$

Mit Hilfe des linearen Funktionals M ergibt sich ein noch einfacherer Beweis:

Aus (38) folgt

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{2i}F_{2n+2-2i}(s)=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{2i+1}F_{2n+1-2i}(s).$$

Wendet man darauf das lineare Funktional M an, so ergibt sich

$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{2i+1}\left(2n-2i+1\right)B_{2n-2i}=0$ für $n>1$ und wegen $B_{2i+1}=0$ für $i>0$ auch

$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(n+i+1)B_{n+i}=0$ für $n>1$. Man rechnet leicht nach, dass auch für $n=0$ und $n=1$ (48) erfüllt ist.

Dann erhielt ich endlich die Arbeit von Seidel [7]. Zu meiner Überraschung sah ich, dass dort bereits die Identität (48) vorkam. Das scheint niemand gesehen zu haben, der sich später mit dieser Identität beschäftigte. Aufgrund dieser Tatsache sollte man sie besser Seidel-Kaneko Identität nennen.

Seidel's Beweis kann in moderner Terminologie folgendermaßen formuliert werden.

Sei $v(1)=\frac{1}{2}$ und $v(n)=B_n$ für $n\neq 1$.

Wir definieren ein lineares Funktional V auf den Polynomen durch $V(x^n)=v(n)$ für $n\in\mathbb{N}$.

Dann ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}V(x^k)=V\left((x-1)^n\right)=B_n.$$

Das impliziert

$V\left((x-1)^n\right)=V(x^n)$ für $n>1$ und wegen $B_{2n+1}=0$ für $n>0$ auch

$V\left((1-x)^n\right)=V(x^n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wegen der Linearität ergibt sich

$$V\left(f(1-x)\right)=V\left(f(x)\right) \tag{49}$$

für jedes Polynom $f(x)$.
Seidel betrachtete die Matrix $\left(c_{n,k}\right)_{n,k\geq 0}$ aller Differenzen

$$c_{n,k} = \Delta^k v(n-k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} v(n-j) = V\left(x^{n-k}(x-1)^k\right), \tag{50}$$

wobei $c_{n,k} = 0$ for $k > n$ gesetzt werde.
Diese Matrix beginnt mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & \frac{1}{42} & -\frac{1}{105} & -\frac{8}{105} & -\frac{1}{105} & \frac{1}{42} & \frac{1}{42} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{42} & -\frac{1}{21} & -\frac{4}{105} & \frac{4}{105} & \frac{1}{21} & \frac{1}{42} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{105} & \frac{4}{105} & \frac{8}{105} & \frac{4}{105} & -\frac{1}{105} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

Hier gilt

$$c_{n,r} + c_{n,r+1} + \cdots + c_{n,s-1} = c_{n+1,r} - c_{n+1,s}. \tag{51}$$

Das folgt sofort aus
$x^{n-r}\left(x-1\right)^r + x^{n-r-1}\left(x-1\right)^{r+1} + \cdots + x^{n-s+1}\left(x-1\right)^{s-1} = x^{n+1-r}\left(x-1\right)^r - x^{n+1-s}\left(x-1\right)^s.$

Da $c_{n,0} = B_n = V\left((x-1)^n\right) = c_{n,n}$ für $n \geq 2$ gilt,
ist

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = 0 \tag{52}$$

für $n \geq 1$.

Außerdem haben wir

$$c_{2n+1,k} = -c_{2n+1,2n+1-k}. \tag{53}$$

Denn $c_{2n+1,k} = V\left(x^{2n+1-k}(x-1)^k\right) = V\left((1-x)^{2n+1-k}(-x)^k\right) = -c_{2n+1,2n+1-k}$.
In gleicher Weise erhält man

$$c_{2n,k} = c_{2n,2n-k}. \tag{54}$$

Die Symmetrierelation (53) zusammen mit (51) impliziert dass $a_{2n,n} = 2a_{2n+1,n}$.
Anders ausgedrückt gilt
$V\left(x^n(x-1)^n\right) = 2V\left(x^{n+1}(x-1)^n\right)$.
Rechnet man das aus, so erhält man
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k V\left(x^{2n-k}\right) = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k V\left(x^{2n+1-k}\right)$

oder

$$\sum(-1)^k\left(\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}\right)V\left(x^{2n-k}\right)=0.$$

Wegen $\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\frac{2n-k+1}{n+1}$

ergibt sich

$$\sum_k(-1)^k\binom{n+1}{k+1}(2n-k+1)V\left(x^{2n-k}\right)=0.$$

Für $n>1$ ist das dasselbe wie

$$\sum_k\binom{n+1}{2k+1}(2n-2k+1)V\left(x^{2n-2k}\right)=\sum_k\binom{n+1}{2k+1}(2n-2k+1)B_{2n-2k}=\sum_k\binom{n+1}{k+1}(2n-k+1)B_{2n-k}=0.$$

Setzt man $n-k=i$, so ergibt sich (48).

Bemerkung 1

Ein anderer Beweis, der als einfachere Version des obigen Beweises angesehen werden kann, wurde von I.M. Gessel [5] gefunden.

Wenn man (49) auf $f(x)=x^{n+1}(x-1)^n$ anwendet, ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}B_{n+i}=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_{n+1+j}.$$

Daraus folgt alles, wenn man beachtet, dass

$$\binom{n+1}{i}(n+i+1)B_{n+i}=(n+1)\left(\binom{n+1}{i}+\binom{n}{i-1}\right)B_{n+i}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 2

Im Mittelpunkt der Seidel'schen Überlegungen stand die Tatsache, dass die Matrix $\left(c_{n,k}\right)_{n,k\geq 0}$ der sukzessiven Differenzen $c_{n,k}=\Delta^k v(n-k)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}v(n-j)=V\left(x^{n-k}(x-1)^k\right)$, welche $v(0)=1$ und $\Delta^n v(0)=v(n)$ für $n\geq 2$ erfüllt, die Zahlen $v(n)$ eindeutig festlegt.

Man beachte, dass hier $v(1)=\frac{1}{2}$ ist. Bis auf diesen Wert gilt jedoch $v(n)=B_n$.

Auf ähnliche Weise hat Seidel die Matrix der Genocchi-Zahlen $G_{2n}=(-1)^n 2(1-2^{2n})B_{2n}$, die er „Bernoulli'sche Zähler" nannte, eingeführt. Er betrachtete hier die Matrix $c_{n,k}=\Delta^k v(n-k)$ mit $v(0)=0, v(1)=1$ und $\Delta^n v(0)=-v(n)$ für $n\geq 2$.

Dadurch sind die $v(n)$ wieder eindeutig festgelegt und es gilt wegen (6) $v(n)=-g_n$ für $n\geq 2$.

Wenn man $v(n)=g_n$ und statt der Differenzen Summen nimmt, gelangt man im wesentlichen zur Euler-Seidel Matrix, die wir früher betrachteten. Die Zeilen sind dort die Diagonalen $i+j=const.$

9.
Nun wollte ich wissen, ob es von der Formel (44) ein schönes $q-$Analogon gibt. Wenn ja, dann muss der Beweis ganz anders geführt werden, da es ja kein Analogon der Binet-Formel gibt.
Nach ein bisschen Probieren habe ich das folgende $q-$Analogon gefunden:

$$\sum_{n\geq 0} F_n(s,q)\frac{z^n}{[n]!} = -\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{[k]!}\sum_{\ell\geq 0}(-1)^\ell q^{\binom{\ell}{2}} F_\ell\left(\frac{s}{q^\ell},q\right)\frac{z^\ell}{[\ell]!} \tag{55}$$

Koeffizientenvergleich liefert das folgende $q-$Analogon von (30)

$$F_n(s,q) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} F_k\left(\frac{s}{q^k},q\right). \tag{56}$$

Diese Formel ist wieder so schön, dass sie stimmen muss, falls sie für die ersten paar Werte von n richtig ist.
Ich versuchte einen Induktionsbeweis, hatte jedoch keinen Erfolg. Dann habe gesehen, dass sich (44) zu

$$\sum_{n\geq 0}\frac{F_{n+m}(s)}{n!}z^n = e^z\sum_{k\geq 0}\frac{s^k F_{m-k}(s)}{k!}z^k \tag{57}$$

verallgemeinern lässt.
Der Beweis ergibt sich wegen $\alpha\beta = -s$ aus

$$\alpha^m e^{\alpha z} - \beta^m e^{\beta z} = -e^z\left(\beta^m e^{-\alpha z} - \alpha^m e^{-\beta z}\right).$$

Denn

$$\frac{\beta^m e^{-\alpha z} - \alpha^m e^{-\beta z}}{\alpha-\beta} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{\beta^m\alpha^k - \alpha^m\beta^k}{\alpha-\beta}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k\geq 0}s^k\frac{\beta^{m-k}-\alpha^{m-k}}{\alpha-\beta}\frac{z^k}{k!} = -\sum_{k\geq 0}\frac{s^k F_{m-k}(s)}{k!}z^k$$

Koeffizientenvergleich zeigt, dass das äquivalent mit

$$F_{n+m}(s) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s^k F_{m-k}(s) \tag{58}$$

ist.

Nun ist

$$F_{-n}(s,q) = (-1)^{n-1}q^{\binom{n+2}{2}-1}\frac{F_n\left(\frac{s}{q^n},s\right)}{s^n} \tag{59}$$

und daher ist (56) identisch mit

$$F_n(s,q) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-2k}s^k F_{-k}(s,q). \tag{60}$$

gilt.
Als $q-$Analogon von (58) ergab sich

$$F_{n+m}(s,q) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(m-2)}s^k F_{m-k}(s,q). \tag{61}$$

Das ist äquivalent mit

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+m}(s,q)\frac{z^n}{[n]!}=\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{[k]!}\sum_{k\geq 0} q^{k(m-2)}s^k F_{m-k}(s,q)\frac{z^k}{[k]!}. \tag{62}$$

Die Formel (61) konnte ich mit Induktion beweisen.
Sie stimmt für $n=0$ und $n=1$ und alle $m\in\mathbb{Z}$.
Mit Induktion ergibt sich daraus

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix} q^{k(m-2)}s^k F_{m-k}(s,q)=\sum_{k=0}^{n}\left(q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1\end{bmatrix}\right)q^{k(m-2)}s^k F_{m-k}(s,q)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix} q^{k(m-2)}q^k s^k F_{m-k}(s,q)+\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1\end{bmatrix} q^{k(m-2)}s^k F_{m-k}(s,q)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix} q^{k(m-2)}s^k\left(q^k F_{m-k}(s,q)+q^{m-2}sF_{m-k-1}(s,q)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix} q^{k(m+1-2)}s^k F_{m+1-k}(s,q)=F_{n+m}(s,q).$$

Das ist wieder ein Beispiel für die wohlbekannte Erfahrungstatsache, dass Beweise für allgemeinere Formeln manchmal leichter zu finden sind.

10.

Nun habe ich mich wieder mit der Frage nach einem $q-$Analogon des Zusammenhangs der Fibonacci-Polynome mit den Genocchi-Zahlen beschäftigt. Die Vermutung (13) legt es nahe, statt $F_n(s,q)$ die Polynome

$$F_n\left(s,\frac{1}{q}\right)=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} q^{2\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-1-k \\ k\end{bmatrix}\left(\frac{s}{q^{n-3}}\right)^k=F_n\left(\frac{s}{q^{n-3}},q\right) \tag{63}$$

zu betrachten und ein lineares Funktional L durch

$$L\left(F_{2n+1}\left(s,\frac{1}{q}\right)\right)=[n=0] \tag{64}$$

zu definieren.

Diese $q-$Fibonacci-Polynome erfüllen die Rekurrenz

$$F_n\left(s,\frac{1}{q}\right)=F_{n-1}\left(s,\frac{1}{q}\right)+\frac{s}{q^{n-3}}F_{n-2}\left(s,\frac{1}{q}\right) \tag{65}$$

und lassen sich ebenfalls eindeutig auf negative Indizes erweitern, wobei gilt

$$F_{-n}\left(s,\frac{1}{q}\right)=(-1)^{n-1}\frac{F_n\left(q^n s,\frac{1}{q}\right)}{q^{\binom{n+2}{2}-1}s^n}. \tag{66}$$

Nun habe ich ein $q-$Analogon der Euler-Seidel-Matrix (17) gesucht.
Wenn man

$$a_{n,k}=(-1)^{n-k-1}q^{\binom{k+1}{2}}s^kF_{n-k}\left(s,\frac{1}{q}\right) \tag{67}$$

setzt, dann ist

$$a_{n,k}=q^{n-1}\left(a_{n,k-1}+a_{n+1,k-1}\right). \tag{68}$$

Daraus folgt

$$a_{n,k}=q^{k(n-1)}\sum_{j=0}^{k}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}a_{n+j,0}. \tag{69}$$

Denn das stimmt für $k=1$.
Allgemein ergibt sich

$$a_{n,k+1}=q^{n-1}\left(a_{n,k}+a_{n+1,k}\right)=q^{n-1}\left(q^{k(n-1)}\sum_{j=0}^{k}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}a_{n+j,0}+q^{kn}\sum_{j=0}^{k}q^{\binom{j-1}{2}}\begin{bmatrix}k\\j-1\end{bmatrix}a_{n+j,0}\right)$$

$$=q^{n-1+kn-k}\sum_{j}q^{\binom{j}{2}}a_{n+j,0}\left(\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}+q^{k-j+1}\begin{bmatrix}k\\j-1\end{bmatrix}\right)=q^{(k+1)(n-1)}\sum_{j}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}k+1\\j\end{bmatrix}a_{n+j,0}.$$

Aus (67) ergibt sich $a_{n,n-2k}=-q^{\binom{k+1}{2}}s^{n-2k}F_{2k}\left(s,\frac{1}{q}\right)$ und (66) liefert

$$a_{n-2k,n}=-s^nF_{-2k}\left(s,\frac{1}{q}\right)=s^{n-2k}q^{\binom{n+1}{2}-2k^2-3k}F_{2k}\left(q^{2k}s,\frac{1}{q}\right).$$

Zeng und Zhou haben ein $q-$Seidel Dreieick $g_{n,k}(q)$ definiert, das für $q=1$ mit dem oben betrachteten übereinstimmt. Ich versuchte, auch dieses durch die $q-$Fibonacci-Polynome beschreiben. Ein bisschen Probieren führte zu den folgenden Definitionen:

$$g_{2n,k}(q)=(-1)^nq^{2\binom{k-1}{2}}L\left(s^{n+1-k}F_{2k-1}\left(s,\frac{1}{q}\right)\right) \tag{70}$$

und

$$g_{2n+1,k}(q)=(-1)^nq^{(k-1)^2}L\left(s^{n+1-k}F_{2k}\left(s,\frac{1}{q}\right)\right) \tag{71}$$

für $1\le k\le n+1$.
Alle anderen Werte seien gleich 0.

Dann ist $g_{0,1}(q)=g_{1,1}(q)=1$

und

$$g_{2n,k}(q) = (-1)^n q^{2\binom{k-1}{2}} L\left(s^{n+1-k} F_{2k-1}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) = (-1)^n q^{2\binom{k-1}{2}} L\left(q^{2(k-1)} \left(s^{n-k} F_{2k+1}\left(s, \frac{1}{q} \right) - s^{n-k} F_{2k}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) \right)$$
$$= (-1)^n q^{2\binom{k}{2}} L\left(s^{n-k} F_{2k+1}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) + (-1)^{n-1} q^{(k-1)^2+(k-1)} L\left(s^{n-k} F_{2k}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) = g_{2n,k+1} + q^{k-1} g_{2n-1,k}$$

sowie

$$\begin{aligned} g_{2n+1,k}(q) &= (-1)^n q^{(k-1)^2} L\left(s^{n+1-k} F_{2k}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) \\ &= (-1)^n q^{(k-1)^2} L\left(s^{n+1-k} F_{2k-1}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) + (-1)^n q^{(k-1)^2-2k+3} L\left(s^{n+2-k} F_{2k-2}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) \\ &= q^{k-1} g_{2n,k}(q) + g_{2n+1,k-1}(q). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$g_{2n,k}(q) = g_{2n,k+1} + q^{k-1} g_{2n-1,k} \tag{72}$$

und

$$g_{2n+1,k}(q) = q^{k-1} g_{2n,k}(q) + g_{2n+1,k-1}(q). \tag{73}$$

Das stimmt mit der Definition in [4] überein. Damit sind die dort definierten Polynome mit Hilfe der $q-$Fibonacci-Polynome charakterisiert.

Nun übernahm ich die Definitionen von [4] und setzte

$$G_{2n}(q) = g_{2n-1,n}(q) \tag{74}$$

und

$$H_{2n-1}(q) = q^{n-2} g_{2n-1,1}(q). \tag{75}$$

Dann ergibt sich

$$L\left(sF_{2n}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) = (-1)^n g_{2n+1,n}(q) q^{-(n-1)^2} = (-1)^n q^{-(n-1)^2} G_{2n+2}(q), \tag{76}$$

$$L\left(F_{2n}\left(s, \frac{1}{q} \right) \right) = (-1)^{n-1} q^{-(n-1)^2} G_{2n}(q) \tag{77}$$

und

$$L(s^n) = (-1)^n g_{2n+1,1}(q) = (-1)^n \frac{H_{2n+1}(q)}{q^{n-1}}. \tag{78}$$

Als nächstes wollte ich ein $q-$Analogon der Seidelidentität (37) finden.
Ich habe dazu ein $q-$Analogon der Identität (38) gesucht.

Das ergab sich zu

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} F_{2n-k}(s,q) = 0. \tag{79}$$

Zum Beweis habe ich wieder die allgemeinere Identität

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} F_{2n+m-k}(s,q) = q^{n^2+n(m-2)} s^n F_m\left(s,q\right) \tag{80}$$

bewiesen.

Für $n=0$ ist das trivial.
Für $n=1$ reduziert sich (80) auf die Rekursion

$$F_{m+2}(s,q) - F_{m+1}(s,q) = q^{m-1} s F_m\left(s\right), \tag{81}$$

die für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt.

Nehmen wir an, dass (80) für $i < n$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist.
Dann ergibt sich

$$\sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} F_{2n+m-k}(s,q) = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} F_{2n+m-k}(s,q) + \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} F_{2n+m-k}(s,q)$$

$$= \sum_k (-1)^{k-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} F_{2n+m-k+1}(s,q) + \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} F_{2n+m-k}(s,q)$$

$$= \sum_k (-1)^{k-1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \left(F_{2n+m-k+1}(s,q) - F_{2n+m-k}(s,q)\right)$$

$$= \sum_k (-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} q^{2n+m-k-3} s F_{2n+m-k-2}\left(s,q\right) = q^{2n+m-3} s \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} F_{2(n-1)+m-k}\left(s,q\right)$$

$$= q^{2n+m-3} q^{(n-1)^2-2(n-1)+m(n-1)} s s^{n-1} F_m\left(s,q\right) = q^{n^2-2n+mn} s^n F_m\left(s,q\right).$$

Beim Übergang $q \to \frac{1}{q}$ reduziert sich (79) auf

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}-kn} F_{2n-k}\left(s,\frac{1}{q}\right) = 0.$$

Wenn wir das lineare Funktional L darauf anwenden, erhalten wir mit (77)

$$(-1)^{2n-1}\begin{bmatrix} n \\ 2n-1 \end{bmatrix} q^{\binom{2n}{2}-(2n-1)n} F_1(s,\frac{1}{q}) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k-1}\begin{bmatrix} n \\ 2k \end{bmatrix} q^{\binom{2k+1}{2}-2kn-(n-k-1)^2} G_{2n-2k}\left(q\right) = 0.$$

Das impliziert

Theorem 2.1 (q-Seidel- Identität)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ 2k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} G_{2n-2k}\left(q\right) = [n=1]. \tag{82}$$

Wir hätten das auch aus (69) ableiten können. Denn für $k=n$ gibt das

$$0=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}a_{n+k,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{n-k}{2}}a_{2n-k,0}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\2k\end{bmatrix}q^{\binom{n-2k}{2}}a_{2n-2k,0}.$$

Für $n>1$ ist die rechte Seite

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\2k\end{bmatrix}q^{\binom{n-2k}{2}}(-1)L\left(F_{2n-2k}\left(s,\frac{1}{q}\right)\right)=-\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\2k\end{bmatrix}q^{\binom{n-2k}{2}}(-1)^{n-k}q^{-(n-k-1)^2}G_{2n-2k}(q)$$

$$=-q^{-\binom{n-1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\2k\end{bmatrix}q^{2\binom{k}{2}}G_{2n-2k}(q).$$

Ein $q-$ Analogon von (39) ist

$$H_{2n+1}(q)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix}n+1\\2k+1\end{bmatrix}q^{k^2-k+n-2}G_{2n-2k}(q) \tag{83}$$

for $n\geq 2$.

Denn wenn wir in (80) $m=-1$ wählen und n durch $n+1$ ersetzen, ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}F_{2(n+1)-1-k}(s,q)=q^{2\binom{n+1}{2}+(-1-1)(n+1)}s^{n+1}F_{-1}(s,q)$$

$$=q^{n^2-n-2}s^{n+1}\frac{q^2}{s}=q^{2\binom{n}{2}}s^n.$$

Wenn wir noch $q\to\frac{1}{q}$ übergehen lassen, erhalten wir

$$s^n=q^{2\binom{n}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-kn}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}F_{2n+1-k}\left(s,\frac{1}{q}\right).$$

Wenn wir darauf das lineare Funktional L anwenden, ergibt sich

$$H_{2n+1}(q)=(-1)^n q^{n-1}L(s^n)=(-1)^n q^{n-1}q^{2\binom{n}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-kn}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}L\left(F_{2n+1-k}\left(s,\frac{1}{q}\right)\right)$$

$$=(-1)^{n-1}q^{n-1}q^{2\binom{n}{2}}\sum_{k=0}^{n}q^{\binom{2k+1}{2}-(2k+1)n}\begin{bmatrix}n+1\\2k+1\end{bmatrix}L\left(F_{2n+1-2k-1}\left(s,\frac{1}{q}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{k^2-k+n-2}\begin{bmatrix}n+1\\2k+1\end{bmatrix}G_{2n-2k}(q).$$

Es gibt auch ein $q-$ Analogon von (40):

Wir gehen von der erzeugenden Funktion

$$\sum_n F_{n+1}(s,q)z^n=\sum_n z^n\sum_{k=0}^{n}q^{2\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}s^k=\sum_k q^{2\binom{k}{2}}s^k z^{2k}\sum_j\begin{bmatrix}k+j\\k\end{bmatrix}z^j=\sum_k q^{2\binom{k}{2}}\frac{s^k z^{2k}}{(1-z)\cdots(1-q^k z)}$$

aus und ersetzen q durch $\frac{1}{q}$. Es ergibt sich

$$\sum_n F_{n+1}\left(s,\frac{1}{q}\right)z^n = \sum_k (-1)^{k+1} q^{-2\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}} \frac{s^k z^{2k}}{(z-1)\cdots(z-q^k)}.$$

Darauf wenden wir das lineare Funktional L an und erhalten

$$\begin{aligned} 1+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}q^{-(n-1)^2}G_{2n}(q)z^{2n-1} &= -\sum_k q^{1-\binom{k}{2}} \frac{z^{2k}}{(z-1)\cdots(z-q^k)}H_{2k+1}(q) \\ &= \sum_k q^{k-\binom{k}{2}}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(1-z)\cdots(q^k-z)} g_{2k+1,1}(q). \end{aligned} \tag{84}$$

11.

Das war im Wesentlichen, was ich über den Zusammenhang zwischen Fibonacci-Polynomen und Genocchi-Zahlen und ihren $q-$Analoga herausgefunden hatte. Ich habe das dann in einer den heutigen Publikationsnormen entsprechenden Weise formuliert und ins arXiv gestellt ([2]).

Das Interessante für mich war die Tatsache, dass einfache lineare Funktionale, die mit Hilfe von Fibonacci-Polynomen bzw. deren $q-$Analoga definiert werden können, neues Licht auf Begriffe werfen, die man aus ganz anderen Gründen gefunden hat. Dadurch wurde auch die verwendete Terminologie weitgehend bestimmt.

Wenn noch nichts über Genocchi-Zahlen und deren $q-$Analoga bekannt gewesen wäre, hätten sich für die erhaltenen Resultate etwas andere Formulierungen ergeben.

So wäre wegen

$$\sum_{n\geq 0}\frac{L(F_n(s))}{n!}z^n = \frac{2z}{1+e^{-z}} \tag{85}$$

wie bei Seidel [7] die Reihenentwicklung von $\frac{2z}{1+e^{-z}}$ statt der von $\frac{2z}{1+e^{z}}$ im Mittelpunkt gestanden. Weiters hätte sich aus

$$\sum_{n\geq 0}\frac{M(F_n(s))}{n!}z^n = \frac{z^2e^z}{e^z-1} \tag{86}$$

die Identität $M(F_n(s)) = nv(n-1)$ ergeben. Zur Erinnerung, die Folge $(v(n))$ stimmt mit der Folge der Bernoulli-Zahlen überall außer für $n=1$ überein, wo $v(1)=\frac{1}{2}=-B_1$ ist.

Analog hätte ich statt des linearen Funktionals (64) das Funktional $L(F_{2n+1}(s,q)) = [n=0]$ betrachtet und wahrscheinlich nur wenig Resultate über dieses $q-$Analogon abgeleitet, da ich nicht gewusst hätte, ob es der Mühe wert ist, diese Polynome zu untersuchen.

Zum Schluss möchte ich noch ein paar negative Resultate erwähnen. Da ist zunächst einmal die Frage nach einem $q-$Analogon meines ursprünglichen Problems, also von (42) bzw. (41). Hier ist bei den entsprechenden $a(n,n-k)$ keine offensichtliche Gesetzmäßigkeit zu erkennen. Wie man aus (55) sieht, gibt es auch kein vernünftiges Analogon zu (43). Somit ist auch kein schönes $q-$Analogon der erzeugenden Funktion (4) zu erwarten.

Literatur

[1] J. Cigler, q-Fibonacci polynomials, Fibonacci Quarterly 41 (2003), 31-40

[2] J. Cigler, q-Fibonacci polynomials and q-Genocchi numbers, arXiv:0908.1219

[3] D. Dumont, Matrices d'Euler-Seidel, Séminaire Lothar. Comb. B05c, 1981

[4] D. Dumont and J. Zeng, Further results on the Euler and Genocchi numbers, Aequat. Math. 47 (1994), 31-42

[5] I. M. Gessel, Applications of the classical umbral calculus, Algebra univers. 49 (2003), 397-434

[6] M. Kaneko, A recurrence formula for the Bernoulli numbers, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 71 (1995), 192–193.

[7] L. Seidel, Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, Sitzungsber. Münch. Akad. Math. Phys. Classe 1877, 157-187

[8] J. Zeng and J. Zhou, A q-analog of the Seidel generation of Genocchi numbers, European Journal of Combinatorics 27 (2006), 364-381

Addendum (November 2010)

Der obige Text wurde im Juli 2009 geschrieben. Vor kurzem bin ich durch eine Reihe von Zufällen darauf gestoßen, dass die Formel von Kaneko schon 50 Jahre vor Seidel im Buch "Vorlesungen über die höhere Mathematik" [A1], p. 284-285, des Wiener Mathematikers Andreas von Ettingshausen enthalten ist. Ich fand im Internetforum mathoverflow (http://mathoverflow.net/) einen Link auf eine unveröffentlichte Arbeit von Gottfried Helms [A2]. Er schreibt dort, dass auch er diese Formel gefunden hat, aber nach Fertigstellung seines Artikels aus dem Vortragsmanuskript [A3] erfahren hat, dass sie bereits bekannt war. In diesem heißt es: "In a book of von Ettingshausen published in 1827, the author obtained that we can compute B_{2n} in terms of $B_n, B_{n+1}, \cdots, B_{2n-1}$ by the recursion
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0$.
With the help of continued fractions, in 1995 M. Kaneko [Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 71(1995), 192-193] rediscovered this. (The speaker thanks Prof. T. Agoh for his informing me that Kaneko repeated von Ettingshausen's discovery.)"

Ich habe nun versucht, herauszufinden, um welches Buch es sich handelt und wurde im Internet fündig, wo sogar das Buch selbst heruntergeladen werden kann.

Andreas von Ettingshausen geht von der definierenden Relation

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} B_k = B_r \tag{87}$$

für $r \geq 2$ mit $B_0 = 1$ für die Bernoullizahlen aus.

Er betrachtet dann die $w-$ten Differenzen

$$\sum_{i=0}^{w}(-1)^{w-i}\binom{w}{i}B_{r+i}=\Delta^w B_r=\sum_{k=0}^{r}B_k\Delta^w\binom{r}{k}=\sum_{k=0}^{r}B_k\binom{r}{k-w}=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}B_{w+j}.$$

Für $r=w=n$ ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}B_{n+i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_{n+i}$$

oder

$$\sum_{i}\binom{n}{2i+1}B_{2n-2i-1}=0. \tag{88}$$

Für $n=2$ folgt daraus $B_3=0$ und allgemein ergibt sich $B_{2i+1}=0$ für $i\geq 1$.

Für $w=n, r=n+1$ erhält man

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}B_{n+1+i}=\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}B_{n+j}=B_n+\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}B_{n+i+1}$$

Für $n+i\equiv 0 \pmod 2$ ist $B_{n+1+i}=0$, daher ist diese Identität gleichbedeutend mit

$$-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_{n+1+i}=B_n+\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}B_{n+i+1}$$ oder wegen $\binom{n+1}{i+1}+\binom{n}{i}=\frac{n+i+2}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$
mit (48).

Vergleicht man diesen Beweis mit den Beweisen von Seidel und Gessel, so sieht man, dass sie im Grunde identisch sind und sich nur in der Formulierung unterscheiden.

Ich habe in der Literatur noch zwei weitere einfache Beweise gefunden, die ich der Vollständigkeit halber hier reproduzieren möchte.
Der erste stammt von Don Zagier und findet sich in der Arbeit von Kaneko [6].
Zagier definiert eine Involution auf der Menge aller Folgen $(b_0, b_1, b_2, \cdots)$ durch

$B^*(z)=e^{-z}B(-z),$ wobei $B(z)=\sum_{n\geq 0}b_n\frac{z^n}{(n+1)!}$ sei. Koeffizientenvergleich liefert

$$b_n^*=(-1)^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}b_i. \tag{89}$$

Dann gilt für $n>0$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_{n+i-1}^*=-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_{n+i-1}. \tag{90}$$

Für $b_n:=\tilde{B}_n:=(n+1)B_n$ ist $B(z)=\sum_{n\geq 0}B_n\frac{z^n}{n!}=\frac{z}{e^z-1}$ die erzeugende Funktion der Bernoulli-Zahlen und erfüllt $B^*(z)=B(z)$. Daher folgt aus (90) sofort (48).

Für $b_n = x^n$ ergibt sich (90) unmittelbar aus dem binomischen Lehrsatz. Im allgemeinen Fall wende man das lineare Funktional L an, das durch $L(x^n) = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

Ein weiterer Beweis für (48) wurde von Junya Satoh [A4] angegeben.
Aus der erzeugenden Funktion der Bernoullizahlen ergibt sich $e^z B(z) = B(-z) = B(z) + z$, woraus durch Koeffizientenvergleich die übliche Rekursionsformel (46) folgt.

Sei nun $A(z) = zB(z)$. Dann ist $e^z A(z) = A(z) + z^2$ und mit $\tilde{B}_n := (n+1)B_n$

$$A(z)' = \left(\frac{z^2}{e^z - 1}\right)' = \sum_{n\geq 0}(n+1)B_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\tilde{B}_n \frac{z^n}{n!}. \tag{91}$$

Wegen $A(z) = \left(A(z)e^z\right)e^{-z}$ folgt aus der Leibnizformel

$$A^{(n+1)}(z)e^z = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\left(A(z)e^z\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\left(A(z)+z^2\right)^{(k)}.$$

Vergleicht man die Koeffizienten von $\frac{z^m}{m!}$ für $m > 2$, so ergibt sich daraus

$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\tilde{B}_{n+k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\tilde{B}_{m+k-1}$. Für $m = n+1$ erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\tilde{B}_{n+k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\tilde{B}_{n+k}. \tag{92}$$

Nun ist $\tilde{B}_{n+k} = 0$ für ungerades $n+k$. Daher ist die rechte Seite $= -\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\tilde{B}_{n+k}$ und somit

$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\tilde{B}_{n+k} = 0,$ wie behauptet.

Zusätzliche Literaturhinweise

[A1] A. v. Ettingshausen, Vorlesungen über die höhere Mathematik, 1. Band, Verlag Carl Gerold, Wien 1827, http://books.google.at/

[A2] G. Helms, A generalized Bernoulli recursion/-identity, http://go.helms-net.de/math/binomial_new/02_2_GeneralizedBernoulliRecursion.pdf

[A3] Zhi-Wei Sun, Some curious results on Bernoulli and Euler polynomials, 2005, http://math.nju.edu.cn/~zwsun/BerEuler.pdf

[A4] J. Satoh, A recurrence formula for $q-$Bernoulli numbers attached to formal group, Nagoya Math. J. 157 (2000), 93-101