Mathematische Randbemerkungen 9.

Die Binomialidentität von N.H. Abel und einige q-Analoga.

Johann Cigler

0. Einleitung

N.H. Abel hat in [1] folgende schöne Formel bewiesen:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}. \qquad (0.1)$$

Die dabei auftretenden Polynome $1, x, x(x-2a), x(x-3a)^2, \cdots,$ also

$$a_n(x,a) = x(x-na)^{n-1} \qquad (0.2)$$

für $n \in \mathbb{N}$, werden seither Abelpolynome genannt.

Er gab allerdings keinen Hinweis darauf, wie er sie gefunden hat, sondern ließ sie sozusagen vom Himmel fallen und verifizierte sie dann mittels vollständiger Induktion.
Derartige Situationen trifft man in der Mathematik immer wieder an: Schöne Resultate tauchen plötzlich auf und man erkennt erst im Nachhinein, was da eigentlich dahinter steckt.
Ich möchte im Folgenden versuchen, einige einfache Resultate über die Abel'schen Polynome und ihre $q-$Analoga aus den Arbeiten [1] - [10] so darzustellen, dass ihre Struktur deutlich erkennbar wird. Für nützliche Hinweise möchte ich mich bei Michael Schlosser bedanken.

Mit Hilfe der Abel'schen Polynome schreibt sich die Abel'sche Identität in der Gestalt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k(x,a)(y+ka)^{n-k}. \qquad (0.3)$$

Für $a=0$ reduziert sie sich auf den binomischen Lehrsatz und für $y=-x$ auf die Tatsache, dass die $n-$te Differenz eines Polynoms $(n-1)-$ten Grades identisch 0 ist.

1. Beweis der Abel'schen Identität

Ein möglicher Weg, die Formel zu beweisen, besteht darin, dass man die linke Seite bei festem x als Polynom $n-$ten Grades in y auffasst und versucht, dieses Polynom durch die Polynome $(y+ka)^{n-k}$, $0 \le k \le n$, die eine Basis für den Vektorraum aller Polynome vom Grad $\le n$ bilden, darzustellen.

Es gibt dann Koeffizienten $b(n,k,a,x)$, so dass
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} b(n,k,a,x)(y+ka)^{n-k}$ gilt.

Berechnet man diese für kleine n, so sieht man sofort, dass $b(n,k,a,x) = \binom{n}{k} c(n,k,a,x)$ ist, wobei $c(n,k,a,x)$ unabhängig von n ist und mit $a_k(x,a)$ übereinstimmt.
Um diese Tatsache zu beweisen, machen wir den Ansatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c(n,k,a,x)(y+ka)^{n-k}. \tag{1.1}$$

Durch Differentiation nach y ergibt sich
$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)c(n,k,a,x)(y+ka)^{n-k-1}.$$
Andererseits ist
$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} c(n-1,k,a,x)(y+ka)^{n-k-1}.$$
Vergleicht man die Koeffizienten, so ergibt sich
$c(n,k,a,x) = c(n-1,k,a,x)$. Die Koeffizienten sind also wirklich unabhängig von n.
Es muss also (0.3) mit gewissen Polynomen $a_k(x,a)$ gelten. Um diese zu berechnen, gehen wir folgendermaßen vor. Wir betrachten die Formel für den Wert $n-1$, multiplizieren mit cn, wobei c eine noch zu bestimmende Konstante sei,

$$\begin{aligned} cn(y+x)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-k-1} \frac{n}{n-k} a_k(x,a)(y+ka)^{n-k} \frac{c(n-k)}{y+ka} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k(x,a)(y+ka)^{n-k} \frac{c(n-k)}{y+ka}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

und vergleichen mit der Formel für den Wert n

$$(y+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k(x,a)(y+ka)^{n-k}. \tag{1.3}$$

Wenn wir y und c so wählen können, dass $\frac{c(n-k)}{y+ka} = 1$ ist, dann ergibt sich
$a_n(x,a) = (y+x)^n - cn(y+x)^{n-1} = (y+x-cn)(y+x)^{n-1}$.
Die Gleichung $y+ka = c(n-k)$ hat die Lösung $c = -a, y = -an.$
Daher erhalten wir

$$a_n(x,a) = (x-na)^n + na(x-na)^{n-1} = x(x-na)^{n-1}.$$

Das ist im wesentlichen der ursprüngliche Beweis von N.H. Abel.

2. Eine Verallgemeinerung

Allerdings gibt dieser Beweis keine Antwort auf die Frage, warum man gerade nach den Polynomen $(y+ka)^{n-k}$ entwickeln soll.
Was passiert, wenn man stattdessen Polynome $(y+a_k)^{n-k}$ für eine beliebig vorgegebene Folge $\left(a_k\right)$ betrachtet?
Sei also

$$(y+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_k(x;a_0,\cdots,a_{k-1})(y+a_k)^{n-k}. \tag{2.1}$$

Hier liefert dieselbe Überlegung, dass g_k unabhängig von n ist.
Diese Polynome heißen Gontscharoff-Polynome (vgl. z.B. [8]).

Die Folge beginnt mit $g_0(x)=1, g_1(x;a_0)=x-a_0, g_2(x;a_0,a_1)=(x-a_0)(x+a_0-2a_1),\cdots.$
Um diese Polynome explizit zu berechnen, setze man in (2.1) $y=0.$ Dann ergibt sich

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_k(x;a_0,\cdots,a_{k-1})a_k^{\;n-k}. \tag{2.2}$$

Daraus folgt

$$g_n(x;a_0,\cdots,a_{n-1})=x^n-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}g_k(x;a_0,\cdots,a_{k-1})a_k^{\;n-k}.$$

Wir imitieren den obigen Beweis und fragen, ob die Gleichung $y+a_k=c(n-k)$ eine Lösung besitzt. Dann muss also a_k+ck unabhängig von k, also eine Konstante sein. Wir sehen daher, dass der obige Beweis nur für $a_k=ak+b$ mit Konstanten a,b funktioniert. Wir erhalten in diesem Fall

$$g_n(x;a_0,\cdots,a_{k-1})=(x-na-b)^n+na(x-na-b)^{n-1}=(x-b)(x-na-b)^{n-1}=a_n(x-b,a).$$

Das ergibt die Formel

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k(x-b,a)(y+b+ka)^{n-k}. \tag{2.3}$$

Diese folgt natürlich auch sofort aus (0.1), wenn man $x\to x-b, y\to y+b$ setzt.

Das scheint übrigens der einzige Fall zu sein, wo die Gontscharoff-Polynome eine Produktdarstellung besitzen.

3. Entwicklung nach Abel'schen Polynomen

Für $y=0$ ergibt sich aus der Abel'schen Formel

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k(x,a)(ka)^{n-k}. \tag{3.1}$$

Das kann man auch folgendermaßen formulieren:

$x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(x,a)}{k!}\left(\frac{d}{dz}\right)^k z^n\,\Big|_{z=ka}$.

Durch Linearkombination ergibt sich für jedes Polynom

$$p(x)=\sum_k\frac{p^{(k)}(ka)}{k!}a_k(x,a). \tag{3.2}$$

Das ergibt eine nützliche Interpretation der Abel'schen Formel: Sie gibt die Entwicklung von Polynomen nach den Abel'schen Polynomen an.

Wählt man $p(y)=(x+y-an)^n$, so erhält man

$$(x+y-an)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k(x,a)(y-(n-k)a)^{n-k}. \tag{3.3}$$

Diese Sichtweise führt zu einem weiteren Beweis der Abel'schen Formel: Wir gehen von $a_n(x,a)=x(x-na)^{n-1}$ aus und untersuchen Entwicklungen nach diesen Polynomen.

Sei $\partial=\partial_x=\frac{d}{dx}$ der Differentiationsoperator und E^a der Verschiebungsoperator $E^a x^n=(x+a)^n$ auf dem Vektorraum der Polynome. Der binomische Lehrsatz besagt, dass $E^a x^n=(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{n-k}=\sum_{k\geq 0}\frac{a^k}{k!}\partial^k x^n=e^{a\partial}x^n$,

d.h. $E^a=e^{a\partial}$ ist.

Man verifiziert sehr leicht, dass

$\partial\left(x(x-na)^{n-1}\right)=n(x-a)(x-na)^{n-2}$ ist.

Das lässt sich auch in der Gestalt $\partial\left(x(x-na)^{n-1}\right)=E^{-a}nx(x-(n-1)a)^{n-2}$

oder

$$\partial e^{a\partial}a_n(x,a)=na_{n-1}(x,a) \tag{3.4}$$

schreiben.

Daher ist $\left(\partial e^{a\partial}\right)^k a_n(x,a)=n(n-1)\cdots(n-k+1)a_{n-k}(x,a)=(n)_k\,a_{n-k}(x,a)$

oder

$\partial^k\left(x(x-na)^{n-1}\right)=(n)_k e^{-ka\partial}x(x-(n-k)a)^{n-k-1}=(n)_k(x-ka)(x-na)^{n-k-1}.$

Speziell gilt also

$$A_n^{(k)}(ka,a)=n!\left[k=n\right]. \tag{3.5}$$

Ist also $f(x)$ ein beliebiges Polynom und entwickelt man
$f(x)=\sum_k c(k,a)a_k(x,a),$
dann ist $f^{(n)}(x)=\sum_k c(k,a)a_k^{(n)}(x,a)$ und daher $f^{(n)}(na)=\sum_k c(k,a)a_k^{(n)}(na,a)=n!c(n,a)$.

Man erhält also wieder $f(x)=\sum_k \frac{f^{(k)}(ka)}{k!}a_k(x,a)$ und damit auch wieder die Abel'sche Formel.
Diese lässt sich auch in der Gestalt

$$e^{x\partial_y}p(y)=\sum_k \frac{a_k(x,a)}{k!}e^{ak\partial_y}\left(\partial_y\right)^k p(y)$$

für alle Polynome $p(y)$ schreiben oder, was auf dasselbe hinausläuft, als die Identität für formale Potenzreihen

$$e^{xz}=\sum_k \frac{a_k(x,a)}{k!}\left(e^{az}z\right)^k. \tag{3.6}$$

Denn jede formale Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ kann mit dem linearen Operator $\sum_{k\geq 0} a_k\partial^k$ auf dem Vektorraum der Polynome identifiziert werden. Diese Zuordnung ist ein Algebraisomorphismus, führt also die algebraischen Operationen ineinander über.

Vergleicht man die Koeffizienten auf beiden Seiten von (3.6), so ergibt sich
$$\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^n \frac{a_k(x,a)}{k!}\frac{(ak)^{n-k}}{(n-k)!},$$
also wieder (3.1).

4. Die Binomialeigenschaft

Aus (3.6) ergibt sich wegen $e^{(x+y)z}=e^{xz}e^{yz}$ durch Koeffizientenvergleich die Binomialeigenschaft

$$a_n(x+y,a)=\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k(x,a)a_{n-k}(y,a). \tag{4.1}$$

Gian-Carlo Rota [9] hat gezeigt, dass sich die Binomialeigenschaft durch eine Reihe anderer Eigenschaften charakterisieren lässt.
Eine Folge $\left(p_n(x)\right)$ von Polynomen mit $\deg p_n=n$ heißt Polynomfolge vom Binomialtyp, wenn für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt
$$p_n(x+y)=\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y).$$

Das ist gleichbedeutend damit, dass es eine formale Potenzreihe $\varphi(z)$ mit $\varphi(0) \neq 0$ gibt, so dass gilt

$$e^{xz} = \sum_{k \geq 0} \frac{p_k(x)}{k!} \left(z\varphi(z) \right)^k . \tag{4.2}$$

Und das bedeutet wieder, dass

$$p_n(0) = [n = 0] \tag{4.3}$$

und

$$Qp_n(x) = np_{n-1}(x) \tag{4.4}$$

gilt, wobei $Q = \partial\varphi(\partial)$ ist.

Der Prototyp einer Folge vom Binomialtyp ist $p_n(x) = x^n$. Hier ist $e^{xz} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} z^k$ und $Q = \partial$.
Im Fall der Abelpolynome $p_n(x) = a_n(x,a)$ ist $Q = \partial e^{a\partial}$.

Bei diesem Zugang kann man also die Abel-Polynome als die Folge vom Binomialtyp charakterisieren, die dem Abel-Operator $Q = \partial e^{a\partial}$ entsprechen.

Rota hat einige konkrete Formeln für die zu einem Operator Q gehörigen Polynome vom Binomialtyp angegeben. Schreibt man $Q = \partial f(\partial)$, dann gilt
$p_n(x) = xf(\partial)^{-n} x^{n-1} = f(\partial)^{-n} x^n - \left(f(\partial)^{-n} \right)' x^{n-1} = \left(\partial f(\partial) \right)' f(\partial)^{-n-1} x^n$. Das liefert für die Abelpolynome
$x(x-na)^{n-1} = (x-na)^n + na(x-na)^{n-1} = (1+a\partial)(x-na)^n$.
Es ist also

$$a_n(x,a) = (1+a\partial)(x-na)^n \tag{4.5}$$

oder

$$(x-na)^n = \frac{1}{1+a\partial} a_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^k a_n^{(k)}(x,a) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^k (n)_k a_{n-k}(x-ka,a). \tag{4.6}$$

Die Folge der Polynome $p_n(x) = a_n(x,a)$ ist die eindeutig bestimmte Folge von Polynomen, welche $p_0(x) = 1$, $p_n(0) = 0$ für $n > 0$ und $Qp_n(x) = np_{n-1}(x)$ erfüllt, wobei Q der lineare Operator ist, der durch $Q = \partial e^{a\partial}$ definiert ist.
Daraus ergibt sich nach (3.4) die rekursive Definition

$$a_n(x,a) = n\int_0^x a_{n-1}(t-a)dt \tag{4.7}$$

mit Anfangswert $A_0(x,a) = 1$.

5. Zusammenhang mit der Formel von Lagrange

Aus Formel (3.6) lässt sich bekanntlich sofort die zu ze^{-az} bezüglich der Komposition inverse formale Potenzreihe $g(z)$ berechnen. Denn es gilt

$$e^{xg(z)} = \sum_k \frac{a_k(x,-a)}{k!} z^k.$$

Differenziert man nach x und setzt dann $x=0$, ergibt sich

$$g(z) = \sum_k \frac{a_k'(0,-a)}{k!} z^k = \sum_k \frac{(ka)^{k-1}}{k!} z^k. \tag{5.1}$$

Eine andere damit zusammenhängende Formel ist

$$\frac{e^{xz}}{1-az} = \sum_{k\geq 0} \frac{(x+ak)^k}{k!} \left(ze^{-az}\right)^k. \tag{5.2}$$

Sie kann folgendermaßen erhalten werden: Aus (4.6) ergibt sich

$$\frac{e^{-b\partial}}{1+a\partial} a_n(x,a) = (x-na-b)^n.$$

Wenn man in (0.1) $y=-na-b$ setzt, erhält man

$$(x-na-b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k(x,a)(-a(n-k)-b)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-ak-b)^k a_{n-k}(x,a)$$

oder damit äquivalent

$$(x-na-b)^n = \left(\sum_k \frac{(-ak-b)^k}{k!} Q^k \right) a_n(x,a).$$

Ein Vergleich der beiden Formeln ergibt (5.2).

Oder man setzt in (0.1) $y \to x-na$ und $x \to y+na$. Dann ergibt sich

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-a(n-k))^{n-k} (y+(n-k)a)^{k-1} (y+na).$$

Mit $k \to n-k$ und $a \to -a$ schreibt sie sich

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+ak)^k (y-ka)^{n-1-k} (y-na) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+ak)^k (1-a\partial_y)(y-ka)^{n-k}.$$

Das bedeutet

$$e^{x\partial_y} y^n = (1-a\partial_y) \sum_{k\geq 0} \frac{(x+ak)^k}{k!} \left(\partial_y e^{-a\partial_y}\right)^k y^n$$

oder

$$e^{xz} = (1-az) \sum_{k\geq 0} \frac{(x+ak)^k}{k!} \left(ze^{-az}\right)^k,$$

d.h. (5.2).

Man kann (5.2) auch folgendermaßen formulieren

$$\frac{1}{1-az}=\sum_{k\geq 0}\frac{(x+ak)^k}{k!}z^k e^{-(ak+x)z}. \tag{5.3}$$

Wenn man $e^{-(ak+x)z}$ in eine Potenzreihe entwickelt und Koeffizienten von z vergleicht, sieht man, dass das äquivalent mit

$$n!a^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(x+ak)^n$$

ist.

Führt man den Differenzenoperator $\Delta=e^{\partial}-1$ ein, so gilt $\Delta^k=\sum_{k=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}e^{j\partial}$. Nun ist klar, dass

$$\Delta^k x^m=k![k=m] \tag{5.4}$$

für $k\geq m$ gilt. Denn $\Delta x^m=(x+1)^m-x^m=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}$ ist ein Polynom vom Grad $m-1$ mit höchstem Koeffizienten m.

Daher ist $\Delta^n(x+ak)^n=\Delta^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(ak)^{n-k}=n!a^n$.

Formel (5.3) ist also mit (5.4) für $k\geq m$ äquivalent.

Man kann (5.3) aber auch folgendermaßen beweisen: Sei $f(x,a,z)=\sum_{k\geq 0}\frac{(x+ak)^k}{k!}z^k e^{-(ak+x)z}$.

Dann ist wegen (3.6)

$$f(x,a,z)=\sum_{k\geq 0}\frac{x(x+ak)^{k-1}}{k!}z^k e^{-(ak+x)z}+a\sum_{k\geq 0}\frac{(x+ak)^{k-1}}{(k-1)!}z^k e^{-(ak+x)z}$$

$$=e^{-xz}\sum_{k\geq 0}\frac{A_k(x,-a)}{k!}z^k e^{-akz}+az\sum_{k\geq 0}\frac{(x+a(k+1))^k}{k!}z^k e^{-(a(k+1)+x)z}=1+azf(x+a,a,z).$$

Iteriert man das, so erhält man

$$f(x,a,z)=1+az+a^2z^2+\cdots+a^{n-1}z^{n-1}+a^nz^nf(x+na,a,z).$$

Das impliziert $f(x,a,z)=\frac{1}{1-az}$.

Die Formeln (5.1) und (5.2) werden üblicherweise mit der Formel von Lagrange bzw. der Formel von Lagrange-Bürmann bewiesen.

Im Spezialfall der Abel'schen Polynome reduziert sich das auf das folgende Problem: Sei $f(z)$ eine formale Potenzreihe. Man bestimme die Koeffizienten in der Entwicklung

$$f(z)=\sum_k\frac{c_k}{k!}\left(ze^{az}\right)^k.$$

Wenn wir wieder den Isomorphismus $z\to\partial$ betrachten, ergibt sich

$$f(\partial)a_n(x,a)=\sum_k\frac{c_k}{k!}\left(\partial e^{a\partial}\right)^k a_n(x,a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_k a_{n-k}(x,a).$$

Sei nun L das lineare Funktional auf den Polynomen, das durch $Lp = p(0)$ definiert ist.
Dann ergibt sich wegen $La_n(x,a) = [n = 0]$
$c_n = Lf(\partial)a_n(x,a) = Lf(\partial)x(x-na)^{n-1}.$
Nun ergibt sich aus $L(\partial^k x^n) = n![k = n] = L(\partial^n x^k)$, dass $L(f(\partial)p(x)) = L(p(\partial)f(x))$ gilt, wenn $p(x)$ ein beliebiges Polynom ist.

Außerdem ergibt die Pincherle-Ableitung (vgl. [9]) $f(\partial)\underline{x} - \underline{x}f(\partial) = f'(\partial)$, wenn $\underline{x}$ der Multiplikationsoperator mit x bedeutet.
Denn wegen $\left(\partial\underline{x} - \underline{x}\partial\right) f(x) = (xf(x))' - xf'(x) = f(x)$ gilt $\partial\underline{x} - \underline{x}\partial = 1$ und daraus mit Induktion $\partial^n\underline{x} - \underline{x}\partial^n = n\partial^{n-1}$. Denn
$\partial^{n+1}\underline{x} - \underline{x}\partial^{n+1} = \partial\left(\partial^n\underline{x} - \underline{x}\partial^n\right) + (\partial\underline{x} - \underline{x}\partial)\partial^n = \partial n\partial^{n-1} + \partial^n = (n+1)\partial^n.$

Insgesamt erhalten wir also

$c_n = Lf(\partial)x(x-na)^{n-1} = L\left(xf(\partial) + f'(\partial)\right)(x-na)^{n-1} = Lf'(\partial)(x-na)^{n-1} = Lf'(\partial)e^{-na\partial}x^{n-1}$
$= L\partial^{n-1}e^{-nax}f'(x).$

Das ist der Spezialfall der Formel von Lagrange für die Entwicklung nach $\left(ze^{az}\right)^k$.

Im Fall $f(z) = e^{uz}$ ergibt sich also $c_n = L\partial^{n-1}e^{-nax}ye^{yx} = y(y-na)^{n-1}.$
Auch das ist ein Zugang, wo die Abel-Polynome auf „natürliche" Weise auftreten.

Den Spezialfall der Formel von Lagrange-Bürmann erhält man, wenn man die Koeffizienten von

$$\frac{f(z)}{1+az} = \sum_k \frac{c_k}{k!}\left(ze^{az}\right)^k$$

berechnet.
Hier ergibt sich aus (4.5) analog wie oben

$$f(\partial)(x-na)^n = \frac{f(\partial)}{1+a\partial}a_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_k a_{n-k}(x,a).$$

Daraus folgt
$c_n = Lf(\partial)(x-na)^n = Lf(\partial)e^{-na\partial}x^n = L\partial^n e^{-nax}f(x).$

6. Gontscharoff-Polynome

Eine direkte Verallgemeinerung der Abel'schen Polynome bilden, wie bereits erwähnt, die Gontscharoff-Polynome (vgl. z.B. [8]). Zu jeder Folge reeller Zahlen $a_0, a_1, a_2, \cdots$ definiert man Polynome $g_n(x; a_0, \cdots, a_{n-1})$ durch (2.2). Sie sind daher die Koeffizienten in der formalen Potenzreihe

$$e^{xz} = \sum_n \frac{g_n(x; a_0, \cdots, a_{n-1})}{n!} z^n e^{a_n z}. \tag{6.1}$$

Für $a_n = na$ reduziert sich das auf (3.6).
Aus

$$e^{a_0 z} = \sum_n \frac{g_n(a_0; a_0, \cdots, a_{n-1})}{n!} z^n e^{a_n z}$$

folgt

$$0 = \sum_{n \geq 1} \frac{g_n(a_0; a_0, \cdots, a_{n-1})}{n!} z^n e^{a_n z}$$

und durch Vergleich der Koeffizienten von z^n, dass $g_n(a_0; a_0, \cdots, a_{n-1}) = [n = 0]$ ist.
Das entspricht im Fall $a_n = na$ der Eigenschaft (4.3).

Koeffizientenvergleich liefert

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k(x; a_0, \cdots, a_{k-1}) a_k^{n-k}. \tag{6.2}$$

Das ist das Analogon von (3.1).
Diese Formel ist wieder äquivalent mit dem Analogon von (3.2)

$$p(x) = \sum_k \frac{p^{(k)}(a_k)}{k!} g_k(x; a_0, \cdots, a_{k-1}). \tag{6.3}$$

Hier sieht man also, wie $p(x)$ aus den Ableitungen $p^{(k)}(a_k)$ rekonstruiert werden kann.

Differenziert man (6.1) nach x und dividiert dann durch z, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\partial g_n(x; a_0, \cdots, a_{n-1}) = n g_{n-1}(x; a_1, \cdots, a_{n-1}). \tag{6.4}$$

Daraus ergibt sich die Rekursionsformel

$$g_n(x; a_0, \cdots, a_{n-1}) = n \int_{a_0}^{x} g_{n-1}(t; a_1, \cdots, a_{n-1}) \tag{6.5}$$

mit $g_0(x) = 1$.

Weiters folgt aus (6.4) die Biorthogonalitätsrelation

$$\partial^k g_n(a_k; a_0, \cdots, a_{n-1}) = n! [n = k]. \tag{6.6}$$

Der einzige Fall, wo eine geschlossene Formel für die Gontscharoff-Polynome bekannt ist, entspricht den arithmetischen Folgen $y, y+a, y+2a, y+3a, \cdots$.

Hier ergibt sich aus $e^{(x+y)z} = \sum_k \frac{a_k(x,a)}{k!} z^k e^{(y+ka)z}$, wenn man $x \to x-y$ setzt,

$e^{xz} = \sum_k \frac{a_k(x-y,a)}{k!} z^k e^{(y+ka)z}$ und daher

$$g_n(x; y, y+a, y+2a, \cdots, y+(n-1)a) = (x-y)(x-y-na)^{n-1} = a_n(x-y,a). \tag{6.7}$$

Die Formel (6.2) lautet in diesem Fall

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+ka)^{n-k} (x-y)(x-y-ka)^{k-1}.$$

Aus (6.4) ergibt sich sofort

$$a_n^{(k)}(x,a) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-ka)(x-na)^{n-k-1}.$$

7. q-Analoga der Abel'schen Identität

Im Folgenden sei D oder D_x immer der $q-$Differentiationsoperator, definiert durch

$$Df(x) = \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}.$$

Weiters verwenden wir die üblichen Notationen der $q-$Analysis, wie sie in meinem Skriptum „Elementare $q-$Identitäten“ definiert sind, wir setzen also speziell

$[n] = \frac{1-q^n}{1-q}, [n]! = \prod_{j=1}^{n} [j]$ und $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$ für $0 \le k \le n.$ Die beiden $q-$Analoga der Exponentialfunktion seien $e(x) = \sum_{k \ge 0} \frac{x^k}{[k]!}$ und $E(x) = \sum_{k\ge 0} q^{\binom{k}{2}} \frac{x^k}{[k]!}.$ Sie erfüllen

$e(x)E(-x) = 1.$

Um die folgenden Formeln übersichtlicher zu gestalten, setze ich $(y \dotplus x)^n := \prod_{j=0}^{n-1} (y + q^j x)$ und analog $(y \dot{-} x)^n := \prod_{j=0}^{n-1}(y - q^j x)$. Es gilt dann bekanntlich

$$\sum_{k\ge 0} \frac{(x \dot{-} y)^k}{[k]!} z^k = \frac{e(xz)}{e(yz)} \quad \text{und} \quad E(aD)y^n = (y+a)\cdots(y+q^{n-1}a).$$

Wir suchen nun ein $q-$Analogon der Abel'schen Identität.
Wir suchen also eine Formel der Gestalt

$$f_n(y,x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} G_k(x; a_0, \cdots, a_{k-1}) f_{n-k}(y, a_k),$$

wobei alle vorkommenden Polynome eine schöne Produktdarstellung besitzen sollen.

Dabei soll $f_n(y,x)$ die Eigenschaft $D_y f_n(y,x) = [n] f_{n-1}(y,x)$ besitzen, damit dabei die $q-$Binomialkoeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ auftreten und G_k unabhängig von n ist. Die einzige derartige Funktion, die eine explizite Produktentwicklung besitzt, ist $f_n(y,x) = \prod_{j=0}^{n-1}(y+q^j x)$.

Um sich von der Unabhängigkeit von n zu überzeugen, wendet man auf beide Seiten den $q-$Differentiationsoperator $D = D_y$ an. Es ergibt sich
wegen $D(y \dotplus x)^n = [n](y \dotplus x)^{n-1}$

$$[n](y \dotplus x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} G_k(x)[n-k](y \dotplus a_k)^{n-k-1}.$$

Daher ist
$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} G_k(x)(y \dotplus a_k)^{n-k-1} = (y \dotplus x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[n-k]}{[n]} G_k(x)(y \dotplus a_k)^{n-k-1},$$
woraus die Unabhängigkeit von n ersichtlich ist.
Wir suchen also Polynome $G_k(x) = G_k(x; a_0, \cdots, a_{k-1})$, welche
$$(y \dotplus x)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} G_k(x; a_0, \cdots, a_{k-1})(y \dotplus a_k)^{n-k} \tag{7.1}$$

erfüllen. Diese Polynome sind ein $q-$Analogon der Gontscharoff-Polynome.

Nun gehen wir analog zum Fall $q = 1$ vor: Wir multiplizieren die Formel (7.1) für den Wert $n-1$ mit $c[n]$ mit einer geeignet zu wählenden Konstanten c. Das ergibt

$$c[n]\prod_{j=0}^{n-2}(y+q^j x) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1-k \end{bmatrix} \frac{[n]}{[n-k]} G_k(x) \prod_{j=0}^{n-k-1}(y+q^j a_k) \frac{c[n-k]}{y+q^{n-k-1}a_k}.$$

Nun vergleichen wir mit Formel (7.1) und sehen, dass die ersten $n-1$ Terme übereinstimmen, falls $\dfrac{c[n-k]}{y+q^{n-k-1}a_k} = 1$ ist.

Nun versuchen wir wieder die Gleichung $\dfrac{c[n-k]}{y+q^{n-k-1}a_k} = 1$ zu lösen. Dabei muss sich a_k für $q \to 1$ auf $ak+b$ reduzieren. Eine naheliegende Wahl ist $a_k = a[k] + q^k b$.

Das ergibt $y = c[n-k] - q^{n-1-k}a[k] - q^{n-1}b = \dfrac{c(1-q^{n-k}) - q^{n-1-k}(1-q^k)a}{1-q} - q^{n-1}b$.
Damit das unabhängig von k ist, muss $q^{n-k}c + q^{n-1-k}a = 0$ sein, d.h.
$c = -\dfrac{a}{q}$.

Mit dieser Wahl von c ergibt sich

$$y=-\frac{a}{q}\frac{(1-q^{n-k})+q^{n-k}(1-q^k)}{1-q}-q^{n-1}b=-\frac{a}{q}[n]-q^{n-1}b.$$

Insgesamt erhalten wir also beim Vergleich mit (7.1)
$G_n(x)=\prod_{j=0}^{n-1}(y+q^jx)-c[n]\prod_{j=0}^{n-2}(y+q^jx)=q^{n-1}(x-b)\prod_{j=0}^{n-2}(y+q^jx)$ für diese Werte $y,c.$ Das ergibt schließlich, wenn wir nun $A_n(x,a,b)$ an Stelle von $G_n(x)$ schreiben,

$$A_n(x,a,b)=q^{n-1}(x-b)\prod_{j=0}^{n-2}\left(q^jx-\frac{a}{q}[n]-q^{n-1}b\right)=(x-b)\prod_{j=1}^{n-1}\left(q^jx-a[n]-q^nb\right) \tag{7.2}$$

für $n>0$ und $A_0(x,a,b)=1.$
Für $b=0$ ergibt sich als $q-$Analogon der Abel-Polynome $a_n(x,a)$

$$A_n(x,a)=A_n(x,a,0)=x\prod_{j=1}^{n-1}\left(q^jx-[n]a\right) \tag{7.3}$$

für $n>0$ und $A_0(x,a)=1.$

Es gilt also die von F.H. Jackson [5] gefundene Identität

$$\prod_{j=0}^{n-1}(y+q^jx)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}A_k(x,a)\prod_{j=0}^{n-k-1}(y+q^j[k]a). \tag{7.4}$$

Für beliebiges b ergibt sich

$$\prod_{j=0}^{n-1}(y+q^jx)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}A_k(x,a,b)\prod_{j=0}^{n-k-1}(y+q^j[k]a+q^{k+j}b). \tag{7.5}$$

Wenn man $a\to a+(1-q)b$ überführt, erhält man

$$G_n(x,a,b)=H_n(x,a+(1-q)b,b)=(x-b)\prod_{j=1}^{n-1}(q^jx-[n]a-b). \tag{7.6}$$

Im Folgenden werden wir im Fall $b\neq 0$ immer jene Polynome $A_n(x,a,b)$ oder $G_n(x,a,b)$ verwenden, welche die einfachsten Formeln liefern.

Die (7.5) entsprechende Identität für $G_n(x,a,b)$ lautet

$$\prod_{j=0}^{n-1}(y+q^jx)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}G_k(x,a,b)\prod_{j=0}^{n-k-1}(y+q^j[k]a+q^jb). \tag{7.7}$$

Als Analogon von (4.5) erhält man

$$G_n(x,a,b)=(1+aD)\prod_{j=0}^{n-1}\left(q^jx-[n]a-b\right). \tag{7.8}$$

Die Polynome $G_n(x,a,b)$ wurden zuerst von J. Hofbauer in [4] betrachtet, sie sind auch der Spezialfall $h=0$ der Polynome $a_n(x;b,h,w,q)$, die W.P. Johnson in [6] betrachtet hat.
Die Formel (7.7) ist auch implizit in [7] (8.4) enthalten. Die dortige Formel lautet

$$(c;q)_n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}c^k\,\frac{1-(a+b)}{1-(q^{-k}a+b)}\left(q^{-k}a+b;q\right)_k\left(c(q^k a+b);q\right)_{n-k}.$$

Dabei bedeutet $(x;q)_n=(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x)$.

Wenn man hier $a\to\frac{b(1-q)-a}{(1-q)x},b\to\frac{a}{(1-q)x}$ übergehen lässt, ergibt sich

$$q^{\binom{k}{2}}\frac{1-(a+b)}{1-(q^{-k}a+b)}\left(q^{-k}a+b;q\right)_k\to q^{\binom{k}{2}}\frac{1-\frac{b}{x}}{1-\frac{q^{-k}(b+[k]a)}{x}}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{q^{j-k}(b+[k]a)}{x}\right)$$

Setzt man jetzt
$c\to-\frac{x}{y}$, so ergibt sich

$$(-1)^k c^k q^{\binom{k}{2}}\frac{1-(a+b)}{1-(q^{-k}a+b)}\left(q^{-k}a+b;q\right)_k\to\frac{1}{y^k}(x-b)\prod_{j=1}^{k-1}\left(q^j x-(b+[k]a)\right)=\frac{1}{y^k}G_k(x,a,b)$$

und

$$\left(c(q^k a+b);q\right)_{n-k}\to\frac{1}{y^{n-k}}\prod_{j=0}^{n-k-1}\left(y+xq^j(b+[k]a\right).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\prod_{j=0}^{n-1}(y+q^j x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}G_k(x,a,b)\prod_{j=0}^{n-k-1}(y+q^j[k]a+q^j b).$$

Wie J. Hofbauer ([4]) bemerkt hat, ergibt sich daraus für
$x\to x+\frac{1}{1-q},y\to y-\frac{1}{1-q},b\to\frac{1}{1-q}$ ein $q-$Analogon der Gould-Rothe-Identität

$$\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{y+ka}{n-k}\frac{x}{x-ka}\binom{x-ak}{k}.$$

Für $y=0$ ergibt sich aus (7.4)

$$q^{\binom{n}{2}}x^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}A_k(x,a)q^{\binom{n-k}{2}}\left([k]a\right)^{n-k}. \tag{7.9}$$

Die Formel (7.4) ist wieder mit einer Identität für formale Potenzreihen äquivalent.
Aus $E(aD)y^n=(y+a)\cdots(y+q^{n-1}a)$ ergibt sich

$$E(xD_y)y^n=\sum_k\frac{A_k(x,a)}{[k]!}E([k]aD_y)D_y^k y^n$$

oder damit äquivalent

$$E(xz)=\sum_k \frac{A_k(x,a)}{[k]!}E([k]az)z^k. \tag{7.10}$$

Genauso ist (7.5) äquivalent mit

$$E(xz)=\sum_k \frac{A_k(x,a,b)}{[k]!}E(([k]a+q^k b)z)z^k \tag{7.11}$$

und (7.6) mit

$$E(xz)=\sum_k \frac{G_k(x,a,b)}{[k]!}E(([k]a+b)z)z^k. \tag{7.12}$$

Diese Formel wurde in [4] bewiesen und ist auch äquivalent mit Formel (7.4) aus [7]. Denn wenn (7.12) für $x=1$ gilt, dann ersetze man $z \to xz, a \to \frac{a}{x}, b \to \frac{b}{x}$ und erhält die Formel für beliebige x.

8. Entwicklung nach q-Abel-Polynomen

Durch $q-$Differentiation von (7.12) ergibt sich

$$zE(qxz)=DE(xz)=\sum_{n\geq 1}\frac{DG_n(x,a,b)}{[n]!}z^n E((b+[n]a)z).$$

oder

$$E(qxz)=\sum_{n\geq 0}\frac{DG_{n+1}(x,a,b)}{[n+1]!}z^n E((b+[n+1]a)z)).$$

Ein Vergleich mit (7.12) liefert

$$E(qxz)=\sum_{n\geq 0}\frac{G_n(qx,qa,b+a)}{[n]!}z^n E((b+[n+1]a)z)),$$

woraus sich

$$DG_{n+1}(x,a,b)=[n+1]G_n(qx,qa,b+a)$$

ergibt.

Daraus folgt mit Induktion $D^n G_n(x,a,b)=q^{\binom{n}{2}}[n]!$ und für $k<n$

$$D^k G_n(x,a,b)=q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]!}{[n-k]!}G_{n-k}(q^k x,q^k a,b+[k]a)=q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]!}{[n-k]!}\left(q^k x-[k]a-b\right)\prod_{j=k+1}^{n-1}\left(q^j x-[n]a-b\right).$$

Als Analogon von (4.6) ergibt sich aus (7.8)

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(q^j x-[n]a-b\right)=\sum_{k=0}^{n}(-a)^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}[k]!q^{\binom{k}{2}}G_{n-k}(q^k x,q^k a,b+[k]a). \tag{8.1}$$

Weiters ist

$$G_n^{(k)}(\frac{b+[k]a}{q^k},a,b)=q^{\binom{k}{2}}[k]![k=n]. \tag{8.2}$$

Ist also $f(x)$ ein beliebiges Polynom, so ergibt sich

$$f(x)=\sum_k\frac{f^{(k)}(q^{-k}(b+[k]a))}{[k]!}q^{-\binom{k}{2}}G_k(x,a,b). \tag{8.3}$$

Für $f(x)=\prod_{j=0}^{n-1}(y+q^j x)$ ergibt sich wieder (7.7).

Wenn man $f(x)=G_n(x,-a,-y-b)$ wählt, ergibt sich

$$G_n(x,-a,-y-b)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}G_k(x,-a,-b)y\prod_{j=1}^{n-k-1}\left(y+(1-q^j)b+([n]-q^j[k])a\right). \tag{8.4}$$

Das ist der Spezialfall $h=0$ von Theorem 4 in [6].

9. q - Lagrange Formeln

Sei V der lineare Operator, der durch $V\left(q^{\binom{n}{2}}x^n\right)=x^n$ definiert ist.

Dann ist

$$VA_n(x,a)=V\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\j\end{bmatrix}(-1)^j\left([n]a\right)^j q^{\binom{n-j}{2}}x^{n-j}=B_n(x,a) \tag{9.1}$$

mit

$$B_n(x,a)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\begin{bmatrix}n-1\\j\end{bmatrix}a^j x^{n-j}[n]^j \tag{9.2}$$

mit $B_0(x,a)=1.$

Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}y^{n-k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}B_k(x,a)\prod_{j=0}^{n-k-1}(y+q^j a[k]). \tag{9.3}$$

Setzt man wie oben $e(z)=\sum_k\frac{z^k}{[k]!}$, dann ist (9.3) mit

$$e(xz)=\sum_k\frac{B_k(x,a)}{[k]!}z^k E([k]az) \tag{9.4}$$

äquivalent.

Die Polynome

$$B_n(x,a) = x\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} a^j x^{n-1-j}[n]^j = xe(-[n]aD)x^{n-1} \tag{9.5}$$

wurden in [3] betrachtet und sind das naheliegendste $q-$Analogon von $a_n(x,a) = xe^{-na\partial}x^{n-1}$.
Ein Nachteil ist allerdings, dass sie keine einfache Produktdarstellung besitzen.
Aus

$$B_n(x,a) = L_y e(xD_y)B_n(y,a) = \sum_{k=0}^{n}\frac{B_k(x,a)}{[k]!}LE([k]aD)D^k B_n(y,a)$$

ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit der $B_k(y,a)$

$$LE([k]aD)D^k B_n(y,a) = [n]![k=n]. \tag{9.6}$$

Daraus ergibt sich die folgende $q-$**Lagrangeformel**:

Die Koeffizienten c_n *in der Reihenentwicklung*

$$f(x) = \sum_n \frac{c_n}{[n]!}x^n E([n]ax) \tag{9.7}$$

sind gegeben durch

$$c_n = Lf'(D)e(-[n]aD)x^{n-1} = LD^{n-1}e(-[n]ax)f'(x). \tag{9.8}$$

Denn nach (9.6) ist $c_n = Lf(D)B_n(x,a) = Lf(D)xe(-[n]aD)x^{n-1}$.

Das kann genau so wie oben begründet werden: Aus $L(D^k x^n) = [n]![k=n] = L(D^n x^k)$ ergibt sich, dass $L(f(D)p(x)) = L(p(D)f(x))$ gilt, wenn $p(x)$ ein beliebiges Polynom ist.
Außerdem gilt das $q-$Analogon der Pincherle-Ableitung

$$f(D)\underline{x} - \underline{x}f(qD) = f'(D). \tag{9.9}$$

Denn wegen $\left(D\underline{x} - q\underline{x}D\right)x^n = Dx^{n+1} - qxDx^n = \left([n+1] - q[n]\right)x^n = x^n$ gilt $D\underline{x} - \underline{x}qD = 1$ und daraus mit Induktion $D^n\underline{x} - \underline{x}q^n D^n = nD^{n-1}$. Denn

$$D^{n+1}\underline{x} - \underline{x}q^{n+1}D^{n+1} = D\left(D^n\underline{x} - \underline{x}q^n D^n\right) + (D\underline{x} - \underline{x}qD)q^n D^n = D[n]D^{n-1} + q^n D^n = [n+1]D^n.$$

Zur Probe berechnen wir die Koeffizienten in der Entwicklung
$E(xt) = \sum_n \frac{c_n}{[n]!}x^n E([n]ax).$ Es ergibt sich

$$c_n = tLD^{n-1}e(-[n]ax)E(qtx) = tLD^{n-1}\frac{e(-[n]ax)}{e(-qtx)} = tLD^{n-1}\sum_k \frac{(-[n]a \dotplus qt)^k}{[k]!}x^k$$

$$= t(-[n]a \dotplus qt)^{n-1} = A_n(t).$$

Diese Überlegungen können auch auf den Fall $b \neq 0$ erweitert werden.

Sei $B_n(x,a,b) = VA_n(x,a,b)$. *Dann sind die Koeffizienten der Entwicklung*

$$f(z) = \sum_n \frac{c_n}{[n]!} z^n E\left(\left([n]a + q^n b\right) z\right) \tag{9.10}$$

gegeben durch

$$c_n = Lf(D)B_n(x,a,b) = Lf(D)xe\left(-\left([n]a+q^n b\right)D\right)x^{n-1} - q^{n-1}bLf(D)e\left(-\left(\frac{[n]a+q^n b}{q}\right)D\right)x^{n-1}$$

$$= LD^{n-1}e\left(-\left([n]a+q^n b\right)x\right)f'(x) - q^{n-1}bLD^{n-1}e\left(-\left(\frac{[n]a+q^n b}{q}\right)x\right)f(x).$$

Zum Beweis bemerken wir, dass wie oben

$$LE\left(\left(q^k b + [k]a\right)D\right)D^k B_n(x,a,b) = [n]![k=n] \tag{9.11}$$

gilt und dass

$$B_n(x,a,b) = VA_n(x,a,b) = V(x-b)\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \left([n]a+q^n b\right)^k q^{\binom{n-k}{2}} x^{n-1-k}$$

$$= V\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \left([n]a+q^n b\right)^k q^{\binom{n-k}{2}} x^{n-k} - bV\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \left([n]a+q^n b\right)^k q^{\binom{n-1-k}{2}} q^{n-1-k} x^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \left([n]a+q^n b\right)^k x^{n-k} - q^{n-1}b\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^k \left(\frac{[n]a+q^n b}{q}\right)^k x^{n-1-k}$$

$$= xe\left(-\left([n]a+q^n b\right)D\right)x^{n-1} - q^{n-1}be\left(-\left(\frac{[n]a+q^n b}{q}\right)D\right)x^{n-1}$$

gilt.
$B_n(x,a,b)$ kann auch in der Gestalt

$$B_n(x,a,b) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q^n b + [n]a)^{k-1}(q^{n-k}b + [n-k]a)$$

geschrieben werden.
Analog ist

$$A_n(x,a,b) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{\binom{n-k}{2}} x^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q^n b + [n]a)^{k-1}(q^{n-k}b + [n-k]a). \tag{9.12}$$

Aus (9.11) ergibt sich die folgende Determinantendarstellung von $B_n(x,a,b)$:
Sei $\beta_n(i,j,x)$ folgendermaßen definiert: Für $i<n$ sei $\beta_n(i,j,x)=0$ für $j<i$ und

$\beta_n(i,j,x) = \dfrac{q^{\binom{j-i}{2}}\left(q^i b + [i]a\right)^{j-i}}{[j-i]!}$. Für $i=n$ sei $\beta_n(n,j,x) = \dfrac{x^j}{[j]!}$.

Dann gilt
$B_n(x,a,b)=[n]!\det\left(\beta_n(i,j,x)\right)_{i,j=0}^{n}$.
Denn wendet man $LE\left(\left(q^k b+[k]a\right)D\right)D^k$ auf die $(n+1)-$te Zeile der Matrix $\left(\beta_n(i,j,x)\right)_{i,j=0}^{n}$

an, so ergibt sich die $(k+1)-$Zeile und daher verschwindet die Determinante. Wendet man $LE\left(\left(q^n b+[n]a\right)D\right)D^n$ an, so ergibt sich $[n]!$ als Wert der Determinante.

Daraus ergibt sich auch eine Determinantendarstellung von $A_n(x,a,b)$:

$$A_n(x,a,b)=[n]!\det\left(\alpha_n(i,j,x)\right)_{i,j=0}^{n}, \tag{9.13}$$

wenn man für $i<n$ $\alpha_n(i,j,x)=\beta_n(i,j,x)$ und $\alpha_n(n,j,x)=\beta_n(n,j,x)q^{\binom{j}{2}}$ setzt.

Z. B. ergibt sich

$$A_4(x,a,b)=[4]!\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & b & \frac{b^2 q}{1+q} & \frac{b^3 q^3}{(1+q)\left(1+q+q^2\right)} & \frac{b^4 q^6}{(1+q)^2\left(1+q^2\right)\left(1+q+q^2\right)} \\ 0 & 1 & a+bq & \frac{q\,(a+bq)^2}{1+q} & \frac{q^3\,(a+bq)^3}{(1+q)\left(1+q+q^2\right)} \\ 0 & 0 & 1 & bq^2+a\,(1+q) & \frac{q\left(bq^2+a\,(1+q)\right)^2}{1+q} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & bq^3+a\left(1+q+q^2\right) \\ 1 & x & \frac{q x^2}{1+q} & \frac{q^3 x^3}{(1+q)\left(1+q+q^2\right)} & \frac{q^6 x^4}{(1+q)^2\left(1+q^2\right)\left(1+q+q^2\right)} \end{pmatrix}$$

Aus der Determinantendarstellung ist klar, dass $DA_n(x,a,b)=[n]A_{n-1}(qx,a,a+qb)$ gilt.
Nun prüft man leicht nach, dass $G_n(x,qa,b+a)=A_n(x,a+(1-q)b,b+a)$ gilt.
Daher ergibt sich wieder
$DG_n(x,a,b)=DA_n(x,a+(1-q)b,b)=[n]A_{n-1}(qx,a+(1-q)b,a+(1-q)b+qb)$
$=[n]G_{n-1}(qx,qa,a+b).$

Um ein Analogon der Formel von Lagrange-Bürmann zu finden, betrachten wir

$$R_n(x,a)=r_n(x,-\frac{[n]a}{q})=e(-\frac{[n]a}{q}D)x^n. \tag{9.14}$$

Dann gilt wieder in Analogie zu (4.5)

$$\left(1+\frac{a}{q}D\right)R_n(x,a)=B_n(x,a). \tag{9.15}$$

Denn das bedeutet

$$\left(1+\frac{a}{q}D\right)e\left(-\frac{[n]a}{q}D\right)x^n = xe\left(-[n]aD\right)x^{n-1}$$

oder

$$\left(e\left(-\frac{[n]a}{q}D\right)\underline{x}-\underline{x}e(-[n]aD\right)x^{n-1} = -\frac{[n]a}{q}e\left(-\frac{[n]a}{q}D\right)x^{n-1},$$

was nach (9.9) klar ist.

Für die Koeffizienten von

$$\frac{f(z)}{1+\frac{az}{q}} = \sum_k \frac{c_k}{[k]!}z^k E([k]az) \tag{9.16}$$

ergibt sich

$$c_n = LD^n e(-\frac{[n]a}{q}x)f(x). \tag{9.17}$$

Denn es ist

$$c_n = Lf(D)\frac{1}{1+\frac{aD}{q}}B_n(x,a,q) = Lf(D)R_n(x,a,q) = Lf(D)e(-\frac{[n]a}{q}D)x^n = LD^n e(-\frac{[n]a}{q}x)f(x).$$

Für $f(z)=E(-xz)$ ergibt sich

$$\frac{E(-xz)}{1+azq^{-1}} = \sum_k \frac{(-[k]aq^{-1}\underset{\cdot}{-}x)^k}{[k]!}z^k E([k]az).$$

Das ist äquivalent mit

$$\frac{E(xz)}{1-az} = \sum_k \frac{([k]a\underset{\cdot}{+}x)^k}{[k]!}z^k E(-[k]qaz). \tag{9.18}$$

Das ist ein $q-$Analogon von (5.2).

Wenn man wieder $z \to D_y$ überführt und die Identität auf y^n anwendet, ergibt sich

$$(y\underset{\cdot}{+}x)^n = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}([k]a\underset{\cdot}{+}x)^k v(n,k,a,y),$$

wobei

$v(n,k,a,y) = \left(y\underset{\cdot}{-}q[k]a\right)^{n-k-1}(y-[n]a)$ für $k<n$ und $v(n,n,a,y)=1$ ist.

Auch dieses Resultat kann auf den Fall $b \neq 0$ erweitert werden. Als Verallgemeinerung von (9.15) ergibt sich

$$\left(1+\frac{a}{q}D\right)e\left(-\frac{q^n b+[n]a}{q}D\right)x^n = xe\left(-\left([n]a+q^n b\right)D\right)x^{n-1}-q^{n-1}be\left(-\left(\frac{[n]a+q^n b}{q}\right)D\right)x^{n-1} \tag{9.19}$$
$= B_n(x,a,b)$.

Das folgt wieder aus der $q-$Pincherle Ableitung

$$\left(e\left(-\frac{q^n b+[n]a}{q}D\right)\underline{x}-\underline{x}e(-(q^n b+[n]a)D)\right)x^{n-1} = -\frac{q^n b+[n]a}{q}e\left(-\frac{q^n b+[n]a}{q}D\right)x^{n-1}.$$

Somit ergibt sich die folgende Formel vom q - Lagrange - Bürmann Typ:

Die Koeffizienten von

$$\frac{f(z)}{1+\frac{az}{q}} = \sum_k \frac{c_k}{[k]!}z^k E\left(\left(q^k b+[k]a\right)z\right) \tag{9.20}$$

sind gegeben durch

$$c_n = LD^n e\left(-\frac{q^n b+[n]a}{q}x\right)f(x). \tag{9.21}$$

Das folgt aus

$$c_n = Lf(D)\frac{1}{1+\frac{aD}{q}}B_n(x,a,b) = Lf(D)e\left(-\frac{q^n b+[n]a}{q}D\right)x^n = LD^n e\left(-\frac{q^n b+[n]a}{q}x\right)f(x).$$

Für $f(z)=E(-yz)$ erhalten wir

$$c_n = LD^n e\left(-\frac{q^n b+[n]a}{q}x\right)E(-xy) = LD^n\frac{e\left(-\frac{q^n b+[n]a}{q}x\right)}{e(xy)} = \left(-\frac{q^n b+[n]a}{q} \dot{-} y\right)^n$$

Das ist äquivalent mit

$$\frac{E(xz)}{1-az} = \sum_k \frac{(q^k b+[k]a \dot{+} x)^k}{[k]!}z^k E(-q(q^k b+[k]a)z). \tag{9.22}$$

Dieses $q-$Analogon von (5.2) wurde von C. Krattenthaler and M. Schlosser (vgl. [7] und [9], (5.4)) in anderem Zusammenhang gefunden.

10. Andere Beweismethoden

Wir wollen nun noch zwei andere Beweismethoden für Formel (9.22) angeben.

Wir betrachten zuerst den Spezialfall $x=0$

$$\frac{1}{1-az}=\sum_{k\geq 0}\frac{(q^k b+[k]a)^k}{[k]!}z^k E(-q(q^k b+[k]a)z). \tag{10.1}$$

Das ist im wesentlichen Formel (3.4)) aus [10].

Wenn wir in (7.11) $x=0$ setzen und $a\to -a$ überführen, ergibt sich

$$1=\sum_k \frac{b(q^k b+[k]a)^{k-1}}{[k]!}z^k E(-(q^k b+[k]a)z). \tag{10.2}$$

Das ist ein $q-$Analogon von (3.6).
Ein einfacher Beweis von (10.1) unter Verwendung von (10.2) wurde mir von M. Schlosser mitgeteilt: Sei $g(a,b,z)=\sum_{k\geq 0}\frac{(q^k b+[k]a)^k}{[k]!}z^k E(-q(q^k b+[k]a)z).$ Dann gilt

$$g(a,b,z)==\sum_{k\geq 0}\frac{q^k b(q^k b+[k]a)^{k-1}}{[k]!}z^k E(-q(q^k b+[k]a)z)$$

$$+\sum_{k\geq 0}\frac{[k]a(q^k b+[k]a)^{k-1}}{[k]!}z^k E(-q(q^k b+[k]a)z)$$

$$=\sum_{k\geq 0}\frac{b(q^k b+[k]a)^{k-1}}{[k]!}(qz)^k E(-(q^k b+[k]a)(qz))$$

$$+az\sum_{k\geq 0}\frac{(q^{k+1}b+[k+1]a)^k}{[k]!}z^k E(-q(q^{k+1}b+[k+1]a)z)$$

$$=1+az\sum_{k\geq 0}\frac{(q^k(qb+a)+[k]a)^k}{[k]!}z^k E(-q(q^k(qb+a)+[k]a)z)=1+azg(a,qb+a,z).$$

Es ist also

$$g(a,b,z)=1+azg(a,qb+a,z)=1+az\left(1+azg(a,q^2b+qa+a,z)\right)=\cdots$$

$$=1+az+a^2z^2+\cdots+a^{n-1}z^{n-1}+a^nz^n g(a,q^n b+[n]a,z)=\frac{1}{1-az}.$$

Zum Beweis des allgemeinen Falles (9.22) bezeichnen wir die rechte Seite mit $f(a,b,x,z)$, also

$$f(a,b,x,z)=\sum_k \frac{(q^k b+[k]a\dotplus x)^k}{[k]!}z^k E(-q(q^k b+[k]a)z).$$

Dann ist

$$D_x f(a,b,x,z)=\sum_k \frac{[k](q^k b+[k]a\dot{+}qx)^{k-1}}{[k]!}z^k E(-q(q^k b+[k]a)z)$$
$$=z\sum_k \frac{(q^{k+1}b+[k+1]a\dot{+}qx)^k}{[k]!}z^k E(-q(q^{k+1}b+[k+1]a)z)=zf(a,b+a,qx,z).$$

Schreibt man
$f(a,b,x,z)=\sum_k c_k(a,b,x)z^k$,
dann gilt also für die Polynome $c_k(a,b,x)$

$D_x c_k(a,b,x)=c_{k-1}(a,b+a,qx)$

und daher $D_x^j c_k(a,b,x)=q^{\binom{j}{2}}c_{k-j}(a,b+ja,x)$.
Nach dem q – Taylor'schen Lehrsatz ergibt sich daraus
$$c_n(a,b,x)=\sum_{k=0}^n \frac{c_n^{(k)}(a,b,0)}{[k]!}x^k=\sum_{k=0}^n \frac{c_{n-k}(a,b+ka,0)}{[k]!}q^{\binom{k}{2}}x^k.$$
Nun ist aber nach (10.1)

$f(a,b,0,z)=g(a,b,z)=\frac{1}{1-az}$, also $c_k(a,b,0)=a^k$.

Daraus folgt

$$f(a,b,x,z)=\sum_n c_n(a,b,x)z^n=\sum_n z^n\sum_{k=0}^n \frac{q^{\binom{k}{2}}}{[k]!}x^k a^{n-k}=\sum_k \frac{q^{\binom{k}{2}}}{[k]!}x^k z^k\sum_j a^j z^j=\frac{E(xz)}{1-az}.$$

Ersetzt man in (9.22) $a\to a+(1-q)b$ so erhält man

$$\frac{E(xz)}{1-\left(a+(1-q)b\right)z}=\sum_k \frac{(b+[k]a\dot{+}x)^k}{[k]!}z^k E(-q(b+[k]a)z). \tag{10.3}$$

Setzt man in (7.7) $y=0, x\to x+b$, so erhält man
$$\prod_{j=0}^{n-1}(q^j(x+b))=\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} G_k(x+b,a,b)\prod_{j=0}^{n-k-1}(q^j[k]a+q^j b).$$

Wenn wir wieder $b\to y$ setzen, so erhalten wir Identitäten, die mit Formel (4.3) in der Arbeit von M. Schlosser [10] äquivalent sind:

$$q^{\binom{n}{2}}(x+y)^n=\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} C_k(x,y)q^{\binom{n-k}{2}}(y+[k]a)^{n-k} \tag{10.4}$$

mit

$$C_n(x,y)=x\prod_{j=1}^{n-1}\left((q^j-1)y+q^jx-a[n]\right). \tag{10.5}$$

Das ist wieder äquivalent mit

$$E((x+y)z)=\sum_k \frac{C_k(x,y)}{[k]!}z^k E((y+[k]a)z). \tag{10.6}$$

Abschließend geben wir noch einen weiteren Beweis von (9.22), der den in Anschluss an (5.3) betrachteten Sachverhalt verallgemeinert.
Dazu betrachten wir das folgende $q-$Analogon des Differenzenoperators.
Sei U der lineare Operator auf den Polynomen in q^n, definiert durch

$$Uq^{in}=q^{i(n-1)} \tag{10.7}$$

für alle $i\in\mathbb{N}.$ Dann ist speziell $U[n]^m=[n-1]^m.$
Sei weiters

$$\Delta^k=(1-qU)\cdots(1-q^kU) \tag{10.8}$$

ein $q-$Analogon des $k-$fachen Differenzenoperators.

Dann ist

$$\Delta^k q^{in}=0 \tag{10.9}$$

für $k\ge i>0$ und

$$\Delta^k 1=(1-q)^k[k]!. \tag{10.10}$$

Denn für $i>0$ ist $(1-q^iU)q^{in}=q^{in}-q^iq^{i(n-1)}=0.$

Wir behaupten, dass als $q-$Analogon von (5.4)

$$\Delta^k[n]^m=[k]!(1-q)^{k-m} \tag{10.11}$$

für $k\ge m$ und

$$\Delta^k q^{in}[n]^m=0 \tag{10.12}$$

für $k\ge m+i$ gilt, falls $i>0$ ist.
Die zweite Aussage folgt sofort aus (10.9)
und (10.11) ergibt sich aus

$$\Delta^k[n]^m=\frac{1}{(1-q)^m}\Delta^k(1-q^n)^m=\frac{1}{(1-q)^m}\sum(-1)^j\binom{m}{j}\Delta^k q^{nj}=\frac{\Delta^k 1}{(1-q)^m}=\frac{(1-q)^k[k]!}{(1-q)^m}.$$

Daraus folgt weiter

$$\Delta^n\left(q^{nj}(q^nx+[n]a)^{n-j}\right)=0 \tag{10.13}$$

für $j>0$ und

$$\Delta^n\left((q^nx+[n]a)^n\right)=[n]!a^n. \tag{10.14}$$

Daraus ergibt sich auch

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(-1)^k\left(q^{n-k}b+[n-k]a\dotplus x\right)^{n-k}\left(x\dotplus q(q^{n-k}b+[n-k]a)\right)^k=[n]!\,a^n. \qquad (10.15)$$

Denn

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(-1)^k\left(q^{n-k}b+a[n-k]\dotplus x\right)^{n-k}\left(x\dotplus q(q^{n-k}b+a[n-k])\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}\left(q^{n-k}b+a[n-k]\dotplus q^{-k}x\right)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}\sum_{j=0}^{n}q^{-kj}x^j q^{\binom{j}{2}}\left(q^{n-k}b+a[n-k]\right)^{n-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}q^{-nj}x^j q^{\binom{j}{2}}\Delta^n\left(q^{nj}\left(q^n b+a[n]\right)^{n-j}\right)=\Delta^n\left(\left(q^n b+a[n]\right)^n\right)=[n]!\,a^n.$$

Durch Koeffizientenvergleich verifiziert man sofort, dass (10.15) äquivalent mit

$$\frac{1}{1-az}=\sum_k\frac{(q^k b+[k]a\dotplus x)^k}{[k]!}z^k\sum_j\frac{\left(x\dotplus q(a[k]+q^k b)\right)^j}{[j]!}(-z)^j$$

$$=\sum_k\frac{(q^k b+[k]a\dotplus x)^k}{[k]!}z^k\,\frac{e(-xz)}{e(q(q^k b+[k]a)z)}$$

ist. Und das ist wieder äquivalent mit (9.22).

11. Schlussbemerkungen

Der Operator $Q=\partial e^{a\partial}$ erfüllt $Qa_n(x,a)=\sum_k\frac{a^k}{k!}\partial^{k+1}a_n(x,a)=na_{n-1}(x,a)$ für alle n.

Das ist äquivalent mit

$$a_n(x,a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k a_{n-k}(x-(k+1)a,a).$$

Im allgemeinen Fall ist der entsprechende Operator von n abhängig.

Der eindeutig bestimmte Operator $Q_n=\sum_{k\geq 0}c_k D^{k+1}$ mit $Q_nG_n(x,a,b)=[n]G_{n-1}(x,a,b)$ ist

$$Q_n=\sum_{k\geq 0}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}\left(([j+1]-q^n[j])a+(1-q^{j+1})b\right)}{[k]!}\left(\frac{D}{q^{n-1}}\right)^{k+1}. \qquad (11.1)$$

Das ist äquivalent mit der Formel

$$G_n(x,a,b)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}-(k+1)n}\prod_{j=0}^{k-1}\left(([j+1]-q^{n+1}[j])a+(1-q^{j+1})b\right)G_{n-k}(q^{k+1}x,q^{k+1}a,b+[k+1]a). \quad (11.2)$$

Zum Beweis schreiben wir

$$G_n(x,a,b)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}c(n,k,a,b)G_{n-k}(q^{k+1}x,q^{k+1}a,b+[k+1]a). \qquad (11.3)$$

Wenden wir darauf den $q-$Differentiationsoperator an, so ergibt sich

$$[n]G_{n-1}(qx,qa,b+a)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}c(n,k,a,b)q^{k+1}[n-k]G_{n-k-1}(q^{k+2}x,q^{k+2}a,b+[k+2]a)$$

oder wenn wir durch $[n]$ dividieren

$$G_{n-1}(qx,qa,b+a)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}q^{k+1}c(n,k,a,b)G_{n-k-1}(q^{k+2}x,q^{k+2}a,b+[k+2]a).$$

Nun setzen wir in (11.3) $n\to n-1, x\to qx, a\to qa, b\to b+a$ und erhalten

$$G_{n-1}(qx,qa,b+a)=\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}c(n-1,k,qa,b+a)G_{n-k-1}(q^{k+2}x,q^{k+2}a,b+[k+2]a).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$c(n,k,a,b)=\frac{c(n-1,k,qa,b+a)}{q^{(k+1)}}. \qquad (11.4)$$

Wir behaupten nun, dass

$$c(n,k,a,b)=\frac{\prod_{j=0}^{k-1}\left(([j+1]-q^{n+1}[j])a+(1-q^{j+1})b\right)}{q^{(k+1)n}} \qquad (11.5)$$

für $n\geq k$ gilt.

Aus $c(0,0,a,b)=1$ folgt also $c(n,0,a,b)=\frac{1}{q^n}.$

Für $n=1$ ergibt sich

$G_1(x,a,b)=(x-b)=\frac{1}{q}G_1(qx,qa,b+a)+qc(1,1,a,b).$

Daher ist $c(1,1,a,b)=\frac{a+(1-q)b}{q^2}$ und somit $c(n,1,a,b)=\frac{a+(1-q)b}{q^{2n}}.$ für $n\geq 1.$

Wenn wir die Formel (11.5) schon für $k-1$ und alle $n\geq k-1$ bewiesen haben, dann setzen wir in (11.3) $n\to k$ und $x=\frac{[k+1]a+b}{q^k}.$

Dann ergibt sich

$G_k(\frac{[k+1]a+b}{q^k},a,b)=q^k a q^{\binom{k}{2}}[k]c(k,k-1,a,b)+q^{\binom{k+1}{2}}c(k,k,a,b).$

Nun ist

$$G_k\left(\frac{[k+1]a+b}{q^k},a,b\right)=\frac{\left([k+1]a+(1-q^k)b\right)}{q^{\binom{k+1}{2}}}\prod_{j=1}^{k-1}\left(([j]-q^{k+1}[j-1])a+(1-q^j)b\right)$$

$$=q^{\binom{k}{2}}\left([k+1]a+(1-q^k)b\right)c(k,k-1,a,b).$$

Denn für $1\leq j\leq k-1$ ist

$$q^{k-j}x-[k]a-b=\frac{[k+1]a+b-q^j[k]a-q^jb}{q^j}=\frac{(1-q^j)b+([j]-q^{k+1}[j-1])a}{q^j}.$$

Weiters enthält

$$G_{k-j}\left(q^{j+1}\frac{[k+1]a+b}{q^k},q^{j+1}a,b+[j+1]a\right)$$

den Faktor

$$q^{k-j-1}q^{j+1}\frac{[k+1]a+b}{q^k}-[k-j]q^{j+1}a-(b+[j+1]a)=[k+1]a+b-[k+1]a-b=0$$

für $0\leq j<k-1$.

Für $j=k-1$ ist $G_1\left(q^k\frac{[k+1]a+b}{q^k},q^ka,b+[k]a\right)=[k+1]a+b-(b+[k]a)=q^ka.$

Somit ist

$$q^{\binom{k+1}{2}}c(k,k,a,b)=q^{\binom{k}{2}}\left([k+1]a+(1-q^k)b-q^ka[k]\right)c(k,k-1,a,b).$$

Das ergibt schließlich $c(k,k,a,b)=\dfrac{\left([k]-q^{k+1}[k-1]\right)a+(1-q^k)b}{q^k}c(k,k-1,a,b).$

Aus (11.4) folgt nun (11.5). Denn (11.5) stimmt für $n=k$. Wenn es für $n-1$ stimmt, dann folgt

$$c(n,k,a,b)=\frac{c(n-1,k,qa,b+a)}{q^{k+1}}=\frac{\prod_{j=0}^{k-1}\left(([j+1]-q^n[j])qa+(1-q^{j+1})(b+a)\right)}{q^{(k+1)n}}$$

$$=\frac{\prod_{j=0}^{k-1}\left(([j+1]-q^{n+1}[j])a+(1-q^{j+1})b\right)}{q^{(k+1)n}}.$$

Die Formel (11.1) lässt sich auch mit Hilfe der $q-$Exponentialfunktion beschreiben. Dazu beachte man, dass

$$[j+1]-q^n[j]=\frac{1-q^{j+1}-q^n(1-q^j)}{1-q}=\frac{(1-q^n)-q^{j+1}(1-q^{n-1})}{1-q}=[n]-q^{j+1}[n-1]$$

und daher

$$([j+1]-q^n[j])a+(1-q^{j+1})b=([n]-q^{j+1}[n-1])a+(1-q^{j+1})b=([n]a+b]-q^{j+1}\left([n-1]a+b\right)$$

ist.

Somit ist

$$\prod_{j=0}^{k-1}\left(([j+1]-q^n[j])a+(1-q^{j+1})b\right)=\left(([n]a+b)\div q([n-1]a+b)\right)^k.$$

Daher ist

$$Q_n=\sum_{k\geq 0}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}\left(([j+1]-q^n[j])a+(1-q^{j+1})b\right)}{[k]!}\left(\frac{D}{q^{n-1}}\right)^{k+1}=\frac{D}{q^{n-1}}\frac{e\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}D\right)}{e\left(\frac{[n-1]a+b}{q^{n-2}}D\right)}. \tag{11.6}$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}Q_nQ_{n-1}\cdots Q_{n-m+1}&=q^{\binom{m}{2}}\left(\frac{D}{q^{n-1}}\right)^m\frac{e\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}D\right)}{e\left(\frac{[n-m]a+b}{q^{n-m-1}}D\right)}\\&=q^{\binom{m}{2}}\sum_{k\geq 0}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}\left(([j+m]-q^n[j])a+(1-q^{j+m}b)\right)}{[k]!}\left(\frac{D}{q^{n-1}}\right)^{k+m}.\end{aligned} \tag{11.7}$$

Aus (11.6) ergibt sich, dass

$$S_n(x,a,b)=q^{-\binom{n}{2}}e\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}D\right)G_n(x,a,b) \tag{11.8}$$

die Identität

$$DS_n(x,a,b)=[n]S_{n-1}(x,a,b) \tag{11.9}$$

erfüllt. Es zeigt sich, dass

$$S_n(x,a,b)=x^n+[n]ax^{n-1} \tag{11.10}$$

gilt.
Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$q^{\binom{n}{2}}\left(x^n+[n]ax^{n-1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}\right)^k G_{n-k}(q^kx,q^ka,b+[k]a) \tag{11.11}$$

ist.

Zum Beweis schreiben wir

$$q^{\binom{n}{2}}\left(x^n+[n]ax^{n-1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}c(n,k,a,b)G_{n-k}(q^kx,q^ka,b+[k]a). \tag{11.12}$$

Wenden wir darauf den $q-$Differentiationsoperator an, so ergibt sich nach Division durch $[n]$

$$q^{\binom{n}{2}}\left(x^{n-1}+[n-1]ax^{n-2}\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}c(n,k,a,b)G_{n-k-1}(q^{k+1}x,q^{k+1}a,b+[k+1]a).$$

Nun setzen wir in (11.3) $n \to n-1, x \to qx, a \to qa, b \to b+a$ und erhalten

$$q^{\binom{n-1}{2}} q^{n-1}\left(x^{n-1}+[n-1]ax^{n-2}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} c(n,k,qa,b+a) G_{n-k-1}(q^{k+1}x, q^{k+1}a, b+[k+1]a).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$c(n,k,a,b)=\frac{c(n-1,k,qa,b+a)}{q^k}. \tag{11.13}$$

Wir behaupten nun, dass

$$c(n,k,a,b)=\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}\right)^k \tag{11.14}$$

für $n \geq k$ gilt.
Aus $c(0,0,a,b)=1$ folgt also $c(n,0,a,b)=1$.
Für $n=1$ ergibt sich
$x+a=(x-b)+c(1,1,a,b)$, d.h. $c(1,1,a,b)=a+b.$
Daher ist $c(n,1,a,b)=\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}$ für $n \geq 1$.
Wenn wir die Formel (11.5) schon für $k-1$ und alle $n \geq k-1$ bewiesen haben, dann setzen wir in (11.3) $n \to k$ und $x=\frac{[k]a+b}{q^{k-1}}$.
Dann ergibt sich wie oben

$$q^{\binom{k}{2}}\left(\frac{[k]a+b}{q^{k-1}}\right)^k+q^{\binom{k}{2}}[k]a\left(\frac{[k]a+b}{q^{k-1}}\right)^{k-1}=aq^{\binom{k}{2}}[k]c(k,k-1,a,b)+q^{\binom{k}{2}}c(k,k,a,b). \tag{11.15}$$

Nun ist $c(k,k-1,a,b)=\left(\frac{[k]a+b}{q^{k-1}}\right)^{k-1}$ nach Induktionsvoraussetzung.
Daher folgt aus (11.15)

$$c(k,k,a,b)=\left(\frac{[k]a+b}{q^{k-1}}\right)^k.$$

Daraus folgt nun (11.5). Denn (11.5) stimmt für $n=k$. Wenn es für $n-1$ stimmt, dann folgt

$$c(n,k,a,b)=\frac{c(n-1,k,qa,b+a)}{q^k}=\frac{1}{q^k}\left(\frac{[n-1]qa+b+a}{q^{n-2}}\right)^k=\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}\right)^k.$$

Damit ist (11.11) bewiesen.

Wenn man schon weiß, was man zeigen soll, dann ergibt sich ein einfacherer Beweis aus (7.8).

Sei

$$w_n(x,a,b)=\prod_{j=0}^{n-1}\left(q^j x-[n]a-b\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{n-k}{2}}\left([n]a+b\right)^k x^{n-k}$$

$$=q^{\binom{n}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}\right)^k x^{n-k}.$$

Dann ist nach (7.8)

$$G_n(x,a,b)=(1+aD)w_n(x,a,b)=q^{\binom{n}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}\right)^k\left(x^{n-k}+[n-k]ax^{n-k-1}\right)$$

$$=q^{\binom{n}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{[k]!}q^{\binom{k}{2}}\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}\right)^k D^k\left(x^n+[n]ax^{n-1}\right)=q^{\binom{n}{2}}E\left(-\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}D\right)\left(x^n+[n]ax^{n-1}\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{D}{q^{n-1}}\frac{e\left(\frac{[n]a+b}{q^{n-1}}D\right)}{e\left(\frac{[n-1]a+b}{q^{n-2}}D\right)}G_n(x,a,b)=\frac{D}{q^{n-1}}E\left(-\frac{[n-1]a+b}{q^{n-2}}D\right)q^{\binom{n}{2}}S_n(x,a,b)$$

$$=q^{\binom{n-1}{2}}E\left(-\frac{[n-1]a+b}{q^{n-2}}D\right)[n]S_{n-1}(x,a,b)=[n]G_{n-1}(x,a,b),$$

d.h. wir erhalten wieder (11.6).

Literatur

[1] N. H. Abel, Beweis eines Ausdruckes, von welchem die Binomialformel ein einzelner Fall ist, Journal für die reine und angewandte Mathematik 1 (1826), 159-160

[2] B. Bhatnagar und St. C. Milne, Generalized bibasic hypergeometric series and their U(n) extensions, Advances in Math. 131 (1997), 188 -252

[3] J. Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten III: Umbrale Inversion und die Lagrangesche Formel, Archiv Math. 35 (1980), 533- 543

[4] J. Hofbauer, A q-analog of the Lagrange expansion, Arch. Math. 42(1984), 536-544

[5] F.H. Jackson, A q-generalization of Abel's series, Rendiconti Palermo 29 (1910), 340-346

[6] W.P. Johnson, q-extensions of identities of Abel-Rothe type, Discr. Math. 159(1996), 161-177

[7] C. Krattenthaler und M. Schlosser, A new multidimensional matrix inverse with applications to multiple $q-$series, Discr. Math. 204 (1999), 249-279

[8] J.P.S. Kung und C. Yan, Gončarov polynomials and parking functions, J. Comb. Th. A 102 (2003), 16 - 37

[9] G.-C. Rota, Finite Operator Calculus, Academic Press 1975

[10] M. Schlosser, Some new applications of matrix inversions in A_r, Ramanujan J. 3(1999), 405-461