

Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 :

Punkte: $A(x_a|y_a)$

Vektoren: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

Vektor zwischen zwei Punkten A und B: $A(x_a|y_a), B(x_b|y_b): \vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$

Länge eines Vektors: $|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl: $c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_v \\ c \cdot y_v \end{pmatrix}$

Der Vektor $c \cdot \vec{v}$ hat dieselbe Richtung wie \vec{v} aber die c -fache Länge von \vec{v} .

Addition bzw. Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Vektoraddition und Multiplikation mit einer Zahl:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Normierter Vektor \vec{a}_0 : $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

\vec{a}_0 hat die Richtung von \vec{a} aber die Länge 1.

Normalvektoren: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$,

Linksgekippter Normalvektor: $\vec{n}_{\vec{v}}^{\ell} = \begin{pmatrix} -y_v \\ x_v \end{pmatrix}$

Rechtsgekippter Normalvektor: $\vec{n}_{\vec{v}}^r = \begin{pmatrix} y_v \\ -x_v \end{pmatrix}$

Skalares (inneres) Produkt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$

Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Rechenregeln für das Rechnen mit dem skalaren Produkt:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} : $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Mittelpunkt (Halbierungspunkt) von zwei Punkten:

$$A(x_a|y_a), B(x_b|y_b): H_{AB} \left(\frac{x_a + x_b}{2} \mid \frac{y_a + y_b}{2} \right) \quad \text{oder} \quad H_{AB} = \frac{1}{2}(A + B)$$

Schwerpunkt eines Dreiecks $\triangle ABC$:

$$A(x_a|y_a), \quad B(x_b|y_b), \quad C(x_c|y_c): \quad S_{\triangle ABC} \left(\frac{x_a+x_b+x_c}{3} \mid \frac{y_a+y_b+y_c}{3} \right) \quad \text{oder} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}(A+B+C)$$

Richtungsvektor der Winkelsymmetrale w_α zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\vec{r}_{w_\alpha} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0$$

Darstellung von Geraden:

- Parameterform: $g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$
 P ... Ein Punkt der Geraden g
 \vec{v} ... Ein Richtungsvektor der Geraden g
- Normalvektorform: $g: \vec{n} \cdot (\vec{X} - P) = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot P = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot P$
 P ... Ein Punkt der Geraden g
 \vec{n} ... Ein Normalvektor der Geraden g
- Allgemeine Form: $g: a \cdot x + b \cdot y = c, \quad \text{Es gilt: } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Man erhält die allgemeine Form aus dem Ansatz $\vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot P$
- Hauptform: $g: y = k \cdot x + d$
 k ... Steigung der Gerade
 d ... Abschnitt auf der y-Achse

Lage zweier Geraden g und h :

- Schneidend: $g \cap h = S$ Man kann Schnittpunkt S und Schnittwinkel α angeben
- Parallel: $g \cap h = \emptyset$ Man kann den Abstand der beiden Geraden angeben
- Identisch: $g \cap h = g = h$

Normalabstand d eines Punktes $A(x_a|y_a)$ von einer Geraden g (Hessesche Normalform im \mathbb{R}^2):

- $d(A, g) = \frac{1}{|\vec{n}|} \left| \vec{n} \cdot \vec{PA} \right|$ P ... ein Punkt von g , \vec{n} ... ein Normalvektor von g
- $d(A, g) = \left| \frac{a \cdot x_a + b \cdot y_a - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ mit $g: a \cdot x + b \cdot y = c$

Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ aufgespannten Dreiecks bzw. Parallelogramms:

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}, \quad A_\# = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

bzw.

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a|, \quad A_\# = \left| \det \begin{pmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{pmatrix} \right| = |x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a|$$

Vektorrechnung im \mathbb{R}^3 :

Punkte: $A(x_a|y_a|z_a)$

Vektoren: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$

Vektor zwischen zwei Punkten A und B: $A(x_a|y_a|z_a), B(x_b|y_b|z_b): \vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$

Länge eines Vektors: $|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl: $c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_v \\ c \cdot y_v \\ c \cdot z_v \end{pmatrix}$

Der Vektor $c \cdot \vec{v}$ hat dieselbe Richtung wie \vec{v} aber die c -fache Länge von \vec{v} .

Addition bzw. Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Vektoraddition und Multiplikation mit einer Zahl: Wie im \mathbb{R}^2 !

Normierter Vektor \vec{a}_0 : $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

\vec{a}_0 hat die Richtung von \vec{a} aber die Länge 1.

Skalares (inneres) Produkt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Rechenregeln für das Rechnen mit dem skalaren Produkt: Wie im \mathbb{R}^2

Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} : $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} y_a & y_b \\ z_a & z_b \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_a & x_b \\ z_a & z_b \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a \cdot z_b - y_b \cdot z_a \\ -(x_a \cdot z_b - x_b \cdot z_a) \\ x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a \end{pmatrix}$

Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Mittelpunkt (Halbierungspunkt) von zwei Punkten:

$$A(x_a|y_a|z_a), B(x_b|y_b|z_b): H_{AB} \left(\frac{x_a+x_b}{2} \mid \frac{y_a+y_b}{2} \mid \frac{z_a+z_b}{2} \right) \quad \text{oder} \quad H_{AB} = \frac{1}{2}(A+B)$$

Schwerpunkt eines Dreiecks $\triangle ABC$:

$$A(x_a|y_a|z_a), B(x_b|y_b|z_b), C(x_c|y_c|z_c): S_{\triangle ABC} \left(\frac{x_a+x_b+x_c}{3} \mid \frac{y_a+y_b+y_c}{3} \mid \frac{z_a+z_b+z_c}{3} \right)$$

oder $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}(A+B+C)$

Richtungsvektor der Winkelsymmetrale w_α zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\vec{r}_{w_\alpha} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0$$

Darstellung von Geraden: Parameterform: $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$

P ... Ein Punkt der Geraden g

\vec{v} ... Ein Richtungsvektor der Geraden g

Normalabstand eines Punktes A von einer Geraden g : $d(A, g) = \frac{1}{|\vec{v}|} \left| \vec{PA} \times \vec{v} \right|$

P ... Ein Punkt der Geraden g

\vec{v} ... Ein Richtungsvektor der Geraden g

Darstellungen von Ebenen:

- Parameterform: $\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + t \cdot \vec{v}_1 + s \cdot \vec{v}_2, \quad t, s \in \mathbb{R}$

P Ein Punkt der Ebene ε

\vec{v}_1, \vec{v}_2 ... Zwei Richtungsvektoren der Ebene ε

- Normalvektorform: $\varepsilon: \vec{n} \cdot (\vec{X} - P) = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{X} - \vec{n} \cdot P = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot P$

P ... Ein Punkt der Ebene ε

\vec{n} ... Ein Normalvektor der Ebene ε

- Allgemeine Form: $\varepsilon: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d, \quad \text{Es gilt: } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Man erhält die allgemeine Form aus dem Ansatz $\vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot P$

Normalabstand d eines Punktes $A(x_a|y_a|z_a)$ von einer Ebene ε (Hessesche Normalform im \mathbb{R}^3):

- $d(A, \varepsilon) = \frac{1}{|\vec{n}|} \left| \vec{n} \cdot \vec{PA} \right|$ P ... ein Punkt von $\varepsilon, \quad \vec{n}$... ein Normalvektor von ε

- $d(A, \varepsilon) = \left| \frac{a \cdot x_a + b \cdot y_a + c \cdot z_a - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ mit $\varepsilon: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$

Flächeninhalt des von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Dreiecks bzw. Parallelogramms:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}, \quad A_{\triangle} = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|, \quad A_{\#} = 2 \cdot A_{\triangle}$$