Integralrechnung:

I 1. Ermittle von den folgenden Funktionen jeweils Stammfunktionen:

(a) $y=-0,5x$
(b) $y=x+1$
(c) $y=x^5$
(d) $y=\frac{1}{x^3}$
(e) $y=\sqrt{x}$
(f) $y=\frac{1}{x^2}$
(g) $y=\sqrt[3]{x}$
(h) $y=12$
(i) $y=3x^4-4$
(j) $y=6x^2-2x+3$
(k) $y=\frac{1}{x^2}-3x+4\sqrt{x}$
(l) $y=\frac{4}{x^4}+\frac{3x^2}{5}-\frac{7}{\sqrt[3]{x^4}}$
(m) $y=3\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{7x}{8}$
(n) $y=(2x-3)^2\cdot x^2$
(o) $y=0$

I 2. Berechne:

(a) $\int 3\cdot\sin x\,dx$
(b) $\int (a\cdot\sin x+\cos x)\,dx$
(c) $\int \left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos x\right)\,dx$
(d) $\int -4\cos x\,dx$
(e) $\int 3e^x\,dx$
(f) $\int \left(e^x+x^2\right)\,dx$
(g) $\int \left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)\,dx$
(h) $\int \left(\cos\pi-\frac{5}{x^2}+8e^x\right)\,dx$
(i) $\int \left(\frac{12}{x}+8\cos x\right)\,dx$

I 3. Berechne mit der Substitutionsmethode:

(a) $\int (3x-7)^3\,dx$
(b) $\int (8x+4)^2\,dx$
(c) $\int \sqrt{23x-2}\,dx$
(d) $\int x^2\left(x^3-2\right)^2\,dx$
(e) $\int x\left(4x^2+5\right)^3\,dx$
(f) $\int ax^3\left(bx^4-c\right)^n\,dx$
(g) $\int \frac{x}{\left(3x^2+2\right)^2}\,dx$
(h) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$
(i) $\int x\sqrt[5]{\left(3x^2-5\right)^4}\,dx$
(j) $\int \frac{x^3\,dx}{2\sqrt[3]{5x^4-12}}$
(k) $\int \frac{dx}{4x-3}$
(l) $\int \frac{4\,dx}{x-6}$
(m) $\int \frac{dx}{(5x-3)^2}$
(n) $\int \frac{x}{\left(3x^2-2\right)^{13}}\,dx$
(o) $\int \frac{a\cdot x^2}{\left(b\cdot x^3+c\right)^n}\,dx$
(p) $\int \left(8x^4+2\right)^2\left(-2x^3\right)\,dx$
(q) $\int \frac{-3x^3}{\sqrt[4]{\left(x^4-1\right)^5}}\,dx$
(r) $\int (2x-5)\left(x^2-5x+2\right)^3\,dx$
(s) $\int \frac{x^2-1}{\left(x^3-3x+5\right)^2}\,dx$
(t) $\int (3x+1)\sqrt[3]{3x^2+2x}\,dx$
(u) $\int \frac{x+1}{\sqrt{\left(x^2+2x-3\right)^3}}\,dx$
(v) $\int \frac{ax+b}{\left(ax^2+2bx+c\right)^n}\,dx$

I 4. Berechne mit der Substitutionsmethode:

(a) $\int e^{x+4}\,dx$
(b) $\int \sin(3x)\,dx$
(c) $\int 3^x\,dx$
(d) $\int \sqrt{e^x}\,dx$
(e) $\int x\cdot e^{-x^2}\,dx$
(f) $\int \sin(4x-3)\,dx$
(g) $\int \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x-4}\,dx$
(h) $\int x^2\cdot\sin\left(-x^3\right)\,dx$
(i) $\int \frac{x^3}{4}\cdot e^{2-x^4}\,dx$
(j) $\int 5^{4x+9}\,dx$
(k) $\int \cos\left(e^x\right)\cdot e^x\,dx$
(l) $\int \sin x\cdot\cos x\,dx$
(m) $\int \sin^2 x\cdot\cos x\,dx$
(n) $\int x^3\cdot\cos\left(\frac{2-x^4}{5}\right)\,dx$
(o) $\int \sin(2x)\cdot(\cos(2x))^4\,dx$
(p) $\int \frac{x^2}{6^{2-x^3}}\,dx$
(q) $\int x^4\sin\left(\pi-3x^5\right)\,dx$
(r) $\int \sin^5 x\cos x\,dx$

I5. Berechne mit partieller Integration:

(a) $\int x\cdot e^x\,dx$
(b) $\int x^2\cdot e^x\,dx$
(c) $\int \ln x\,dx$
(d) $\int x\cdot\ln x\,dx$
(e) $\int x\cdot 2^x\,dx$
(f) $\int x^2\cdot e^{-3x}\,dx$
(g) $\int x\cdot\cos x\,dx$
(h) $\int \cos^2 x\,dx$
(i) $\int \sin^2 x\,dx$
(j) $\int x^5\cdot\ln x\,dx$
(k) $\int x^2\cdot 10^{-x}\,dx$
(l) $\int x\cdot\lg x\,dx$
(m) $\int x^2\cdot\sin x\,dx$
(n) $\int e^x\cdot\sin x\,dx$
(o) $\int \cos x\cdot e^x\,dx$

I6. Löse die folgenden Integrale mit Partialbruchzerlegung

(a) $\int \frac{1}{1-x^2}dx$
(b) $\int \frac{5+x}{x+x^2}dx$
(c) $\int \frac{1}{-4+x^2}dx$
(d) $\int \frac{-8+5x}{-8-2x+x^2}dx$
(e) $\int \frac{-20-25x+7x^2}{-4x+x^2}dx$
(f) $\int \frac{-11+2x^2}{-12-x+x^2}dx$
(g) $\int \frac{22-7x-8x^2+3x^3}{-6-x+x^2}dx$
(h) $\int \frac{7-10x-7x^2+16x^3+12x^4}{-6+5x+6x^2}dx$
(i) $\int \frac{-1-4x+2x^2}{-x+x^3}dx$
(j) $\int \frac{-8+3x^2}{-4x+x^3}dx$
(k) $\int \frac{1+5x}{-2-x+2x^2+x^3}dx$
(l) $\int \frac{-8+3x}{3-x-3x^2+x^3}dx$
(m) $\int \frac{3+15x}{-70-39x+x^3}dx$
(n) $\int \frac{-6+22x+21x^2+4x^3}{6x+5x^2+x^3}dx$
(o) $\int \frac{-1+3x-5x^2-2x^3+5x^4}{12-4x-3x^2+x^3}dx$
(p) $\int \frac{x}{1-2x+x^2}dx$
(q) $\int \frac{4+9x+4x^2}{4x+4x^2+x^3}dx$
(r) $\int \frac{-8+x}{-16-12x+x^3}dx$
(s) $\int -\frac{x}{1+2x+x^2}dx$
(t) $\int \frac{3-8x+3x^2}{9x-6x^2+x^3}dx$
(u) $\int \frac{-6+x}{32-6x^2+x^3}dx$
(v) $\int \frac{28-9x+x^2}{20-16x+x^2+x^3}dx$
(w) $\int \frac{43+74x-27x^2-5x^3+2x^4}{36-15x-2x^2+x^3}dx$
(x) $\int \frac{1}{5+4x+x^2}dx$
(y) $\int \frac{1}{13+4x+x^2}dx$
(z) $\int \frac{1}{40+8x+2x^2}dx$
(z1) $\int \frac{3}{136+24x+4x^2}dx$
(z2) $\int \frac{2}{4+2x^2}dx$

I7. Berechne:

(a) $\int x\left[e^{x^2}+\sin\left(2x^2-1\right)\right]\,dx$
(b) $\int\left(x^2+\sin\left(3x^2-1\right)\right)x\,dx$
(c) $\int\left(\sqrt{5x-1}+\cos(4x)\right)\,dx$
(d) $\int\left(\frac{5x^3}{\sqrt[5]{2x^4+3}}+e^{-x}\right)\,dx$
(e) $\int \frac{x^2-3x}{\left(x^3-3x^2\right)\ln^3 x}\,dx$
(f) $\int x\left(\cos(x-\pi)-e^{-x^2+1}\right)\,dx$
(h) $\int x\left(\sqrt{x^2+3}+\cos(x)\right)\,dx$
(i) $\int \sinh x\,dx$
(j) $\int \cosh x\,dx$
(k) $\int \frac{\ln x+2}{x}\,dx$
(l) $\int x\cdot\left(\sin\left(x^2-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(2x)\right)\,dx$
(m) $\int\left(e^{-x}-\cos\left(x^3\right)+3\ln x-\sqrt[4]{4x^3-2}\right)x^2\,dx$

I 8. Skizziere das Flächenstück, welches durch das Integral berechnet wird und berechne das Integral!

(a) $\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx$
(b) $\int\limits_{-2}^{1} 3^x\,dx$
(c) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx$
(d) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1}{x}\,dx$
(e) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin 2x\,dx$
(f) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1}{x^2}\,dx$
(g) $\int\limits_{-2}^{2} \left(x^2-4\right)\,dx$
(h) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx$
(i) $\int\limits_{-3}^{0} \sqrt{2x+6}\,dx$
(j) $\int\limits_{0}^{2\pi} 2\cos\frac{x}{2}\,dx$
(k) $\int\limits_{-2}^{2} -\sqrt{6-3x}\,dx$
(l) $\int\limits_{-3}^{1} (-x-1)\,dx$
(m) $\int\limits_{1}^{3} x\cdot\ln\left(x^2\right)\,dx$
(n) $\int\limits_{-2}^{4} -e^{\frac{x}{2}}\,dx$
(o) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

I 9. Berechne die folgenden bestimmten Integrale!

(a) $\int\limits_{0}^{2} x^2 e^{-2x^3}\,dx$
(b) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$
(c) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x+\cos x)\,dx$
(d) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx$
(e) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2-1}{\sqrt[4]{x^3-3x}}\,dx$
(f) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x e^x\,dx$
(g) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 x\,dx$
(h) $\int\limits_{-2}^{2} 1{,}5^{3x+1}\,dx$
(i) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^3-x^2+3x-5}{x^2}\,dx$
(j) $\int\limits_{0}^{4} \frac{x+2}{x^2+4x+4}\,dx$
(k) $\int\limits_{1}^{3} \left(x^3\ln x+\sqrt{x}\right)\,dx$
(l) $\int\limits_{2}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

I 10. Skizziere jenes endlich große Flächenstück, das die Abszisse (x-Achse) von der angegebenen Kurve abschneidet und berechne seinen Flächeninhalt!

(a) $y=2x^2-8$
(b) $y=x^3-6x^2+9x$
(c) $y=x^4-4x^2+4$
(d) $y=-2x^2+x+12$
(e) $y=x^3+4x^2+4x$
(f) $y=x^4-2x^2+1$

I 11. Die beiden folgenden Kurven f und g begrenzen ein endliches Flächenstück. Skizziere das Flächenstück und berechne seinen Flächeninhalt!

(a) $f:\ y=3x-x^2,\quad g:\ y=\frac{x}{2}$
(b) $f:\ y^2=8x,\quad g:\ 3y-2x=8$
(c) $f:\ x=2y-8,\quad g:\ y=8x^2$
(d) $f:\ y=-x^2+3x+5,\quad g:\ y=x+2$
(e) $f:\ y^2=6x,\quad g:\ y=x$
(f) $f:\ y^2=3x,\quad g:\ y^2=\frac{9}{2}(x-1)$
(g) $f:\ y^2=\frac{9}{5}x,\quad g:\ y^2=-3\cdot(x-8)$
(h) $f:\ y=\frac{x^2}{8},\quad g:\ y=\frac{1}{3}\left(x^2-10\right)$
(i) $f:\ y=2x^2,\quad g:\ y=3-x^2$
(j) $f:\ y^2=\frac{9}{4}x,\quad g:\ y=\frac{3}{16}\cdot x^2$
(k) $f:\ y=x^2,\quad g:\ y=2-x^2$
(l) $f:\ y^2=-\frac{9}{2}x,\quad g:\ y=\frac{3}{4}x^2$
(m) $f:\ y=x^3+1,\quad g:\ y=2x+1$
(n) $f:\ y=x^3-2,\quad g:\ y=x-2$

I 12. Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale, skizziere jeweils das zu berechnende Flächenstück:

(a) $\int\limits_0^\infty 2^{-x}\,dx$ (d) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{x^2}$ (g) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ (j) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x-1}$

(b) $\int\limits_{-1}^\infty e^{-x}\,dx$ (e) $\int\limits_1^5 \frac{x}{x^2-1}\,dx$ (h) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ (k) $\int\limits_{-\infty}^0 x\cdot e^{-x^2}\,dx$

(c) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (f) $\int\limits_1^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ (i) $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ (l) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

I 13. Eine Polynomfunktion 3. Grades mit der Gleichung $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Punkt $P(2|3)$ und hat den Tiefpunkt $T(1|-1)$. In ihrem Wendepunkt wird sie von einer Parabel mit der Gleichung $y = px^2 + qx + r$ berührt, deren Scheitelpunkt an der Stelle -1 liegt. Diskutiere beide Kurven und berechne den Flächeninhalt des endlichen Flächenstücks, das von beiden Kurven begrenzt wird! (Fertige eine Skizze an!)

I 14. Eine Polynomfunktion mit der Gleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat im Punkt $P\left(-\frac{3}{2}\middle|y_1\right)$ eine Tangente mit Steigung $-\frac{5}{4}$ und im Wendepunkt $W\left(0\middle|\frac{2}{3}\right)$ eine Tangente mit Steigungswinkel 45°. Eine Parabel mit der Gleichung $y = px^2 + qx + r$ geht durch P und hat in W ihren Scheitelpunkt. Berechne die Flächeninhalte der beiden von den Kurven begrenzten endlichen Flächenstücke! (Skizze!)

I 15. Eine zur $y-$Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Grades geht durch die Punkte $P(0|1,5)$ und $Q(4|-2,5)$. Im Punkt Q hat die Kurve die Steigung 2. Diese Polynomfunktion 4. Grades wird in ihren Wendepunkten von einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ berührt. Diskutiere die beiden Kurven, berechne den Flächeninhalt des zwischen den Kurven liegenden Flächenstücks und fertige eine Zeichnung an!

I 16. Eine Polynomfunktion 4. Grades hat in $O(0|0)$ einen Wendepunkt mit der $x-$Achse als Wendetangente un im Punkt $N(-4|0)$ einen Schnittpunkt mit der $x-$Achse. Die Fläche, welche die Kurve mit der $x-$Achse begrenzt, hat den Flächeninhalt 12,8. Diskutiere die Kurve und fertige eine Zeichnung an!

I 17. Gegeben ist die Funktion $y = \frac{x^3}{x^2-3}$. Diskutiere die Funktion, zeichne ihren kartesischen Graphen und berechne den Flächeninhalt des Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen, der schrägen Asymptote sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = 6$ begrenzt wird!

I 18. Gegeben ist die Funktion $f:\ y = 4\cdot\ln x - 2\cdot(\ln x)^2$. Diskutiere die Funktion, zeichne ihren Graphen und berechne den Flächeninhalt des im 1. Quadranten liegenden Flächenstückes, das vom Funktionsgraphen und der $x-$Achse begrenzt wird!

I 19. Gegeben ist die Funktion

$$f:\; y = -\left(\frac{x}{2}+3\right)\cdot e^{-\frac{x}{6}}$$

Diskutiere die Funktion, zeichne ihren Graphen und berechne den Flächeninhalt des im 3. Quadranten liegenden Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen und den Koordinatenachsen begrenzt wird!

I 20. Berechne den Flächeninhalt des im 3. Quadranten liegenden (uneigentlichen!) Flächenstücks, das der Graph der Funktion $f:\; y = e^{2x} - 2e^{x}$ mit den Koordinatenachsen bildet!

I 21. Diskutiere die Funktion $f:\; y = 4x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$ zeichne ihren Graphen und berechne den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der Kurve, den Geraden $g:\; x = -4$ und $h:\; x = 4$ und der x-Achse begrenzt wird!

I 22. Diskutiere die Funktion $f:\; y = -x \cdot e^{x}$, zeichne den Graphen und berechne den Flächeninhalt des Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen, der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = -1$ begrenzt wird!

I 23. Jenes Flächenstück, das vom Graphen der Funktion f, der x-Achse und den Ordinatenlinien in den Endpunkten des Intervalls $[a;b]$ begrenzt wird, rotiert um die x-Achse. Skizziere das Flächenstück und den Drehkörper und berechne den Rauminhalt des entstehenden Drehkörpers!

(a) $y = \frac{1}{2}\cdot x,\; [0;6]$
(b) $y = \frac{2}{3}x + 3,\; [-3;6]$
(c) $y = e^{x},\; [-1;2]$
(d) $y = \ln x,\; [1;e]$
(e) $y = \sqrt[3]{x},\; [1;8]$
(f) $y = (x-4)\cdot\sqrt{x},\; [0;4]$
(g) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},\; [1;8]$
(h) $y = x\cdot\sqrt{6-x},\; [0;6]$
(i) $y = \sin x,\; [0;\pi]$
(j) $y = \tan x,\; \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$
(k) $y = \cos x,\; \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
(l) $y = \cot x,\; \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

I 24. Das Flächenstück, das vom Graphen der Funktion f, dem Intervall $[c;d]$ auf der y-Achse sowie den Geraden $y = c$ und $y = d$ begrenzt wird, rotiert umd die y-Achse. Skizziere das Flächenstück und den Drehkörper und berechne den Rauminhalt des entstehenden Drehkörpers!

(a) $y = \frac{1}{2}\cdot x,\; [0;6]$
(b) $y = e^{x},\; [1;3]$
(c) $y = \sqrt[3]{x},\; [1;3]$
(d) $y = \frac{2}{3}\cdot x + 3,\; [-3;0]$
(e) $y = \ln x,\; [0;1]$
(f) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},\; [1;3]$

I 25. Das Flächenstück, das von den Kurven k_1 und k_2 begrenzt wird, rotiert **(i)** um die x-Achse, **(ii)** um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers! (Skizze!)

(a) $k_1:\; y^2 = 8x, \quad k_2:\; 3y = 2x + 8$
(b) $k_1:\; y^2 = 16\,(x-4), \quad k_2:\; y^2 = 8x$

I 26. Der Graph der Funktion $f:\ y=\sqrt{6x}$, die Tangente in $P(6|y_1>0)$ und die y-Achse begrenzen ein Flächenstück. Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das Flächenstück um die **(i)** x-Achse, **(ii)** y-Achse rotiert!

I 27. Im Punkt $T(2|4)$ der Parabel $p: y^2=a\cdot x$ wird die Tangente t gelegt. Das Flächenstück, das von der Parabel p, der Tangente t und den Geraden mit den Gleichungen $x=0$ bzw. $x=8$ begrenzt wird, rotiert um die **(i)** x-Achse, **(ii)** y-Achse.
Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

I 28. Im Punkt $P(5|y_1)$ des Graphen der Funktion $f:\ y=\frac{1}{5}\cdot x^2+1$ wird die Tangente t gelegt. Das Flächenstück, das zwischen dem Funktionsgraphen von f, der Tangente t und den Koordinatenachsen liegt, rotiert um die **(i)** x-Achse, **(ii)** y-Achse.
Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

I 29. Der Graph der Funktion $f:\ y=e^{2x}-2\cdot e^x$, die x-Achse und die Gerade $g:\ x=-1$ begrenzen ein Flächenstück. Berechne **(i)** den Flächeninhalt dieses Flächenstücks, **(ii)** das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das Flächenstück um die x-Achse rotiert!

I 30. Der Graph der Funktion $f:\ y=x\cdot e^{-x}$, die x-Achse und die Gerade $g:\ x=2$ begrenzen ein Flächenstück. Berechne **(i)** den Flächeninhalt dieses Flächenstücks, **(ii)** das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das Flächenstück um die x-Achse rotiert!

I 31. Gegeben ist die Kurve $p:\ y=-\frac{1}{4}x^2+4$. Die Kurve f und die Gerade $g:\ y=-5$ begrenzen ein Flächenstück.

(a) Skizziere dieses Flächenstück!

(b) Berechne den Flächeninhalt dieses Flächenstücks!

(c) Das Flächenstück rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

I 32. Die Kurve $f:\ y=\frac{1}{3}\cdot x^2+b$ enthält den Punkt $P(3|4)$. Berechne b!
Die Tangente t_p im Punkt P, die Kurve f und die y-Achse begrenzen ein Flächenstück.

(a) Skizziere das Flächenstück und berechne seinen Flächeninhalt!

(b) Das Flächenstück rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

I 33. Die beiden Kurven $f:\ y=\frac{1}{2}x^2-1$ und $g:\ y=5-x^2$ begrenzen ein endliches Flächenstück.

(a) Skizziere die beiden Kurven und das Flächenstück und berechne den Flächeninhalt des Flächenstücks!

(b) Das Flächenstück rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers!