Aufgaben zur Differentialrechnung

C 1. Berechne **(i)** die Steigung der Sekante, **(ii)** die Gleichung der Sekante durch die Kurve $f(x)$ an den Stellen x_0 und $x_0 + \Delta x$! **(iii)** Berechne die Steigung der Tangente an die Kurve $f(x)$ an der Stelle x_0 durch Grenzwertbildung!

(a) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $\Delta x = 2$

(b) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $\Delta x = 1$

(c) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $\Delta x = 0.1$

(d) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $\Delta x = 0.01$

(e) $f(x) = \sqrt{4x+1}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 2$

(f) $f(x) = \sqrt{4x+1}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 1$

(g) $f(x) = \sqrt{4x+1}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.1$

(h) $f(x) = \sqrt{4x+1}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.01$

C 2. Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen durch Grenzwertbildung und mit Ableitungsregeln!

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

(b) $f(x) = \frac{2}{3x-5}$

(c) $f(x) = \sqrt{3x+2}$

(d) $f(x) = 6x - 5$

(e) $f(x) = x^2 - 12$

(f) $f(x) = \frac{1}{x}$

(g) $f(x) = \sqrt{x-5}$

(h) $f(x) = 2x^2 + 2x$

(i) $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$

C 3. Berechne die Ableitungsfunktion **(i)** indem Du zuerst ausmultiplizierst und dann ableitest, **(ii)** unter Anwendung der Produktregel!

(a) $y = \left(x^2 - 3\right) \cdot \left(x^3 - 2x + 5\right)$

(b) $y = (3x - 5) \cdot (8x + 9)$

(c) $y = \left(x^3 - 1\right) \cdot \left(x^2 + 1\right)$

(d) $y = \left(x^5\right) \cdot \left(x^2 + x\right)$

C 4. Berechne die Ableitungsfunktion **(i)** indem Du vorher auspotenzierst, **(ii)** unter Verwendung der Kettenregel!

(a) $f(x) = (x-2)^3$

(b) $f(x) = \left(x^2 + 2x - 4\right)^2$

(c) $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^4$

C 5. Berechne die erste Ableitung!

(a) $y = \frac{3}{x^2}$

(b) $y = \frac{5}{3x^2-1}$

(c) $y = \frac{x^2-x+2}{3x^2+2}$

(d) $y = \frac{x^2+x-1}{3+2x^2}$

(e) $y = \frac{(4x+2)^2}{(3x-1)^2}$

(f) $y = \frac{(2x-4)^2}{(2x+3)^2}$

(g) $y = \frac{x}{\left(x^3-4x\right)^4}$

(h) $y = \frac{\left(x^2-2x+1\right)^2}{\left(x^3-1\right)^3}$

C 6. Bestimme die Gleichung der Tangente an die Funktion f an der Stelle x_0!

(a) $f(x) = \sqrt{5x+1}$, $\quad x_0 = 3$

(b) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$, $\quad x_0 = 0$

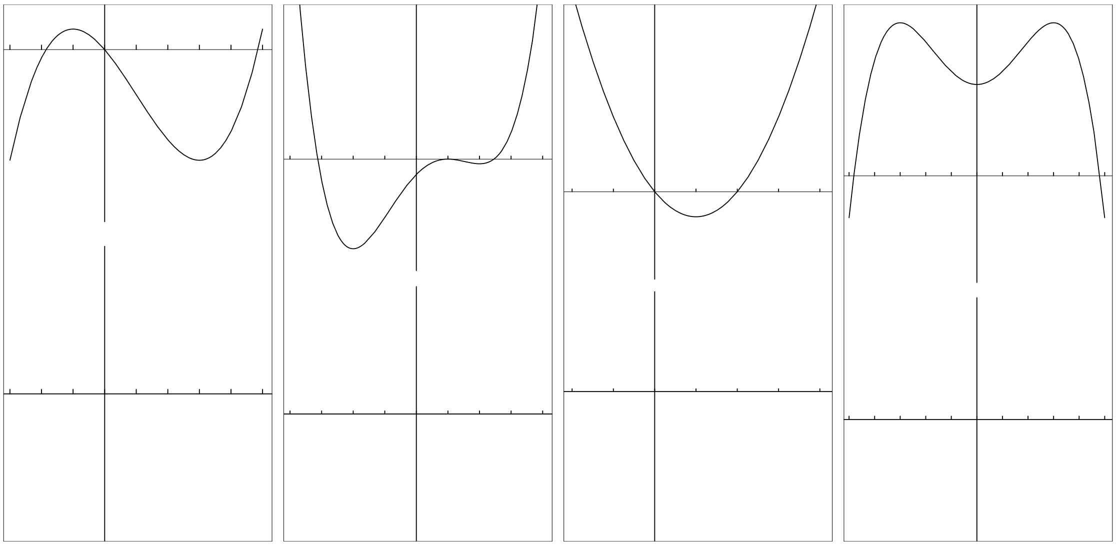
(c) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $\quad x_0 = -1$

(d) $f(x) = 2x - 1$, $\quad x_0 = -2$

C 7. Berechne die erste Ableitung:

(a) $y=\sqrt{3x-1}$
(b) $y=\sqrt{3x}-\sqrt[3]{x^2}$
(c) $y=\sqrt[4]{3x^3}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt{2x^3}$
(d) $y=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}x+\sqrt[4]{x}$
(e) $y=\sqrt{5x^2+3x-4}$
(f) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$
(g) $y=\sqrt{(x-3)^5}$
(h) $y=\left(2x^2+1\right)\cdot\sqrt{7-3x}$
(i) $y=\sqrt{3x-4}\cdot\sqrt{5x+1}$
(j) $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt[3]{1-x^2}$
(k) $y=\frac{\sqrt{5x-2}}{1-4x}$
(l) $y=\frac{4x^2}{\sqrt{2x+3}}$
(m) $y=\sqrt{\frac{6x}{7-2x}}$
(n) $y=\sqrt{\frac{4x^2-5}{x^2+3x}}$

C 8. Skizziere jeweils den Graphen der Ableitungsfunktion im Koordinatensystem unterhalb des Funktionsgraphen:



C 9. Berechne jeweils die erste Ableitung!

(a) $y=\sin 2x$
(b) $y=\sqrt{\cos x}$
(c) $y=\sin\frac{1}{x}$
(d) $y=\frac{\tan x}{x}$
(e) $y=\cos x^3$
(f) $y=\cos^3 x$
(g) $y=\frac{x^3}{\tan x}$
(h) $y=\sin\sqrt{x}$
(i) $y=\frac{\cos x}{3}$
(j) $y=\cos\frac{x}{3}$
(k) $y=\frac{\cot x}{x}$
(l) $y=\sqrt[3]{5\cos x}$
(m) $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$
(n) $y=\tan 2x-\cot x^2$
(o) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}$
(p) $y=\frac{1}{\sin x}$
(q) $y=\cot(3x)+\tan x^2$
(r) $y=\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x-\cos x}$
(s) $y=\frac{\sin 2x}{\sin x}$
(t) $y=\frac{1}{3}\cos(3x)-4\cdot\sin x$
(u) $y=\sqrt{\cot(2x+1)}$

C 10. Differenziere!

(a) $y=\ln(5x)$
(b) $y=(\ln(2x))^3$
(c) $y=\ln\sqrt{5x-4}$
(d) $y=\ln\left(2x^3\right)$
(e) $y=\ln\left(\frac{x^3}{3}\right)$
(f) $y=x^n\cdot\ln x$
(h) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
(i) $y=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
(j) $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
(k) $y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{x}}$
(l) $y=\ln(\cos x)$
(n) $y=\ln(\tan(2x))$
(o) $y={}^3\log x$
(p) $y=\lg x^3$
(q) $y={}^7\log\sqrt{x}$
(r) $y=(x^2-1)\ln x$
(s) $y=\frac{x}{\ln x}$

C 11. Berechne die erste Ableitung!

(a) $y = e^{ax}$
(b) $y = x \cdot e^x$
(c) $y = e^{-x}$
(d) $y = x \cdot e^{-x}$
(e) $y = \sqrt{e^x}$
(f) $y = x^2 \cdot e^{-3x}$
(g) $y = \sqrt[3]{e^{2x}}$
(h) $y = x^3 \cdot e^{-2x}$
(i) $y = e^{\sin x}$
(j) $y = e^x \cdot \cos x$
(k) $y = \frac{e^x}{\cos x}$
(l) $y = e^{\sqrt{x}}$
(m) $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$
(n) $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$
(o) $y = 3^x$
(p) $y = (x^2 - 1) \cdot e^{-2x}$
(q) $y = (e^{ax} - e^{-ax})^2$
(r) $y = x \cdot e^{-x^2}$
(s) $y = x \cdot 5^{-x}$
(t) $y = 4^{\cos x}$

C 12. Finde die erste Ableitung y' durch implizites Differenzieren!

(a) $3y - 2x^2 = 0$
(b) $3x^2 - 2y^2 = 5$
(c) $3y^3 - 5y - 3x = 4$
(d) $y^3 + y^2 - xy + 3x^2 = 1$
(e) $x^2 + y^2 = 25$
(f) $x^2y^3 + x - y = 36$

C 13. An welchen Stellen hat die Tangente der folgenden Funktionen jeweils die Steigung **(i)** $k = 0$, **(ii)** $k = 2$?

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 2$
(b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 4$
(c) $f(x) = \sqrt{16x - 8}$

C 14. Differenziere die folgenden Funktionen jeweils nach den angegebenen Variablen! (Berechne die partielle Ableitung nach der angegebenen Variablen!)

(a) $Q = C \cdot U, \quad \frac{\partial Q}{\partial U} =$
(b) $V = r^2 \pi h, \quad \frac{\partial V}{\partial r} =$
(c) $F = \sqrt{2hr - h^2} \cdot h, \quad \frac{\partial F}{\partial h} =$
(d) $Q = C \cdot U, \quad \frac{\partial Q}{\partial C} =$
(e) $V = r^2 \pi h, \quad \frac{\partial V}{\partial h} =$
(f) $F = \sqrt{2hr - h^2} \cdot h, \quad \frac{\partial F}{\partial r} =$
(g) $O = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c), \quad \frac{\partial O}{\partial b} =$
(h) $G = \ell\sqrt{7s^2 - \ell^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial \ell} =$
(i) $F = \frac{m \cdot v^2}{r}, \quad \frac{\partial F}{\partial r} =$
(j) $O = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c), \quad \frac{\partial O}{\partial c} =$
(k) $G = \ell\sqrt{7s^2 - \ell^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial s} =$
(l) $F = \frac{m \cdot v^2}{r}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} =$