1. Folgen (Zahlenfolgen)

Allgemeines

Beispiel für eine regelmäßige Folge: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6,.......................

Das *erste* Glied ist	$a_1=1/2$	Das ist das Glied mit dem Index 1
Das *zweite* Glied ist	$a_2=1/3$	Das ist das Glied mit dem Index 2
Das *allgemeine* (erzeugende) Glied	$a_n=1/(n+1)$	Das ist das Glied mit dem Index **n**.

Bei regelmäßigen Folgen ist es meist interessant, das allgemeine Glied zu finden.

Wichtige Folgen

Konstante Folge: 7, 7, 7, 7, 7,...$a_n=7$

Arithmetische Folge: 7, 11, 15, 19, 23, 27,...................................
Zwei Nachbarglieder unterscheiden sich immer um dieselbe *Differenz* d = 4.
Das zweite Glied ist $a_2 = 7 + 4 = a_1+d$, das dritte Glied ist $a_3 = a_1 + 2d$ und so weiter:

Das allgemeine Glied ist: $\mathbf{a_n=a_1+(n-1).d}$

Im Beispiel ist $a_n= 7 + (n-1).\mathbf{4}= 4n+3$, $a_{100} = 403$, $a_{1000} = 4003$

Geometrische Folge: 4, 12, 36, 108, 324, 972,.........................Zwei Nachbarglieder unterscheiden sich immer um denselben Quotienten q = 3: $a_2 = a_1.q$, $a_3 = a_1.q^2$ ....
Das allgemeine Glied ist $\mathbf{a_n = a_1.q^{n-1}}$

Im Beispiel ist $a_n= 4.3^{n-1}$; das Zehnte Glied ist: $a_{10} = 4.3^9 = 4.\ 19683 = 78732$

Alternierende Folgen

(Sie wechseln bei jedem Glied das Vorzeichen)

„Minus-Plus-Folge“: -1, +1, -1, +1, -1, +1,......................z.B.: $a_{100}=+1$, $a_{77}=-1$. $\mathbf{a_n=(-1)^n}$

„Plus-Minus-Folge“: +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1,.............. z.B.: $a_{100}=-1$, $a_{77}=+1$. $\mathbf{a_n=(-1)^{n+1}=(-1)^{n-1}}$

weitere Beispiele:

12, -19, 26, -33, 40, -47,..... alternierend und arithmetisch $a_n=(-1)^{n+1}.(7n+5)$

-3/11, +5/17, -7/23,................alternierend, Zähler und Nenner arithmetisch $a_n=(-1)^n.(2n+1)/(6n+5)$

11, 17, 11, 17, 11,.................Man denkt sich: 14-3, 14+3, 14-3, 14+3,............... $a_n=14+3.(-1)^n$

a, b, a, b, a,.........................(a>b)........................... $a_n=\dfrac{a+b+(a-b).(-1)^{n+1}}{2}$

Aufgaben

R1.1) Gegeben ist jeweils das allgemeine Glied a_n einer Folge. Schreiben Sie jeweils die ersten fünf Glieder, sowie das Glied mit dem Index n=100 an!
a) $a_n= (11-3n)/(n+1)$ b) $a_n= (-1)^n/(n+2)$ c) $a_n=\{n+(-1)^n\} / \{n+2(-1)^n\}$ d) $a_n=(-2)^n / (11- 2^n)$

R.1.2 Gegeben sind jeweils die ersten fünf Glieder einer Folge. Bestimmen Sie das allgemeine Glied!
a) 13, 17, 21, 25, 29, ... b) -11, 14, -17, 20, -23,... c) 1/3, -3/7, 5/11, -7/15, 9/19,.. d) 1,-2, 1,-2, 1, -2,...

e) ½, ¼, 1/8, 1/16, 1/32,.. f) ½ ,3/4, 5/8,7/16, 9/32,.. g) – 1/3, 5/9, -1/3, 13/81,-17/243,..

2. Monotonie und Schranken

Monotonie

Eine Folge heißt **monoton steigend**, wenn das nachfolgende Glied immer größer oder gleich dem voran gegangenen Glied ist.

Genauer gilt monoton steigend: $a_{n+1} \geq a_n$ monoton fallend: $a_{n+1} \leq a_n$
streng monoton steigend $a_{n+1} > a_n$ streng monoton fallend: $a_{n+1} < a_n$ für ***alle*** n€N

Beispiel 2.1:
Zeigen Sie dass die Folge a_n = (n+3)/2n-1) streng monoton fallend ist:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
4,000	1,667	1,200	1,000	0,889	0,818	0,769	0,733	0,706	0,684	0,667	0,652	0,640	0,630

Indirekter Beweis

Viele solche Aussagen zeigt man mit dem sogenannten ***„indirekten Beweis“***:
Man nimmt zuerst das Gegenteil der Aussage an und rechnet damit solange richtig weiter, bis man einen ***Widerspruch*** bekommt. Damit ist gezeigt, dass das Gegenteil der Aussage falsch war und daher die Aussage selbst richtig ist: Nun zurück zu unserer Aufgabe:

Behauptung: Die Folge ist (immer) streng monoton fallend, also $a_{n+1} < a_n$ für **a l l e** $n \in N$

Gegenteil: Die Folge ist „*nicht immer*“ streng monoton fallend.
Die Ungleichung $a_{n+1} < a_n$ ist nicht für **a l l e** $n \in N$ richtig. Es gibt Indizes n mit $a_{n+1} \geq a_n$

$a_{n+1} \geq a_n$

(n+4) / (2n+1) ≥ (n+3)/(2n-1)
Alle Nenner sind positiv, wir können mit Ihnen multiplizieren und das „Relationszeichen“ bleibt gleich gerichtet.

(n+4).(2n-1) ≥(n+3).(2n+1)

$2n^2+7n-4 \geq 2n^2+7n+3$

$\Rightarrow -4 \geq +3$ Dies ist ein ***Widerspruch*** . Die Annahme des Gegenteils ist falsch, die ursprüngliche Behauptung ist daher richtig.

Obere und Untere Schranke

Eine Folge heißt **nach oben beschränkt**, wenn jedes Glied kleiner als eine bestimmte Zahl s ist. s heißt dann obere Schranke.

$$a_n < s$$

Eine Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn jedes Glied größer als eine bestimmte Zahl s ist. s heißt dann untere Schranke.

$$a_n > s$$

Beispiel 2.2: Zeigen Sie, dass die Zahl s = 3 eine obere Schranke für die Folge a_n = (3n-1) / (n+1) ist!

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{100}	a_{1000}	$a_{1000000}$
1,000	1,667	2,000	2,200	2,333	2,429	2,500	2,556	2,600	2,636	2,667	2,960	2,996	2,999996000

Beweis ***indirekt***:
Behauptung: $a_n < 3$ für **a l l e** n € N Gegenteil: Es gibt n, bei welchen gilt: $a_n \geq 3$
$a_n \geq 3 \Rightarrow (3n-1) / (n+1) \geq 3 \Rightarrow$
$3n-1 \geq 3n + 3 \Rightarrow -1 \geq 3$ ***Widerspruch!!***.

Die Annahme des Gegenteils hat zu einem Widerspruch geführt. Das Gegenteil ist falsch, die Behauptung ist richtig: $\Rightarrow$ Jedes Glied der Folge liegt unterhalb der Zahl 3. s = 3 ist eine obere Schranke.

Aufgaben:
R2.1)Zeigen Sie, dass die Folge a_n= 1/n streng monoton fallend ist!
R2.2)Zeigen Sie, dass die Folge a_n=(2n-1)/(n+3) streng monoton steigend ist!
R2.3)Zeigen Sie, dass die Folge a_n=(3n-1) / (5/2 -n) für n>2 streng monoton steigend ist.
R2.4)Ab welchem Glied ist die Folge a_n = R20-3n) / R2n-1) monoton fallend?
R2.5)Zeigen Sie: Die Zahl s=4 ist eine obere Schranke für die Folge a_n=(3n+5)/(n+1)
R2.6)Zeigen Sie: Die Zahl s =1 ist eine untere Schranke für die Folge a_n= $(n^2+1)/n^2$
R2.7)Zeigen Sie: Die Zahl s = ½ ist eine obere Schranke für die Folge a_n= (1-n)/(1-2n)

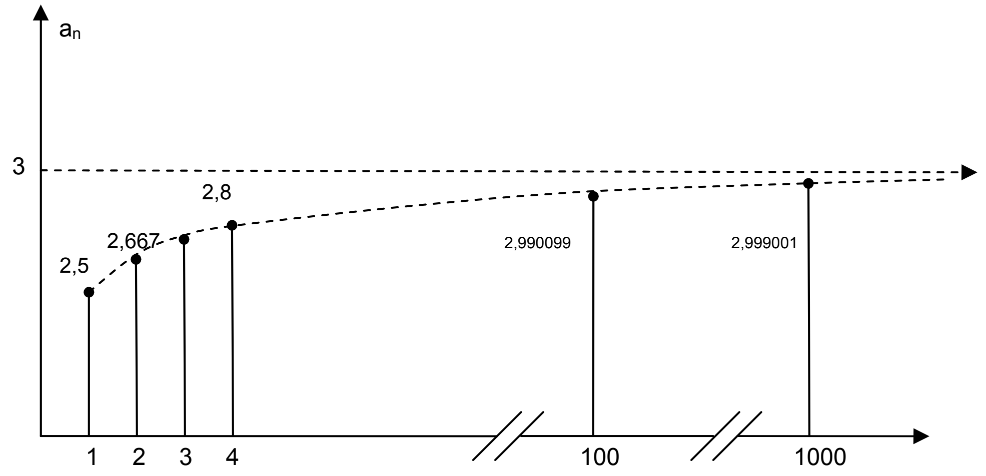
3. Grenzwert von Folgen

Allgemeines

Beispiel 1:
Die Folge a_n = (3n+2) / (n+1) ist monoton steigend. Außerdem ist beispielsweise die Zahl 3 eine obere Schranke: die Glieder der Folge werden niemals größer als 3

Das bedeutet, dass die Glieder der Folge für sehr große Indizes n immer näher an einander liegen, sich also kaum mehr unterscheiden. Die Tabelle zeigt, dass die Glieder der Zahl a= 3 beliebig nahe kommen.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{100}	a_{1000}	$a_{1000000}$
2,500	2,667	2,750	2,800	2,833	2,857	2,875	2,889	2,900	2,909	2,917	2,990099	2,999001	2,999999



Man sagt: „Diese Folge hat den ***Grenzwert a = 3“*** oder
„Die Folge ***„konvergiert gegen 3“*** , sie ist ***„konvergent“***
„Die Folge **„strebt gegen 3“**

Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$ oder $\frac{3n+1}{n+1} \to 3$ für n → ∞

Beispiel 2:
Die Folge a_n = 5n+1 {6 1 16 21 26 .... } hat keinen Grenzwert. Sie wächst ins Unendliche. Man sagt auch: die folge ist ***„divergent“.***

Beispiel 3
Die Folge $a_n = (-1)^n$ {-1, +1, -1, +1, -1 .... } hat auch keinen Grenzwert, da es keine Zahl gibt , der sich die Glieder beliebig annähern, wenn n → ∞ geht. Die Folge ist ***„divergent“.***

Folgen, die genau einen Grenzwert haben, heißen ***konvergent.***

Nullfolgen

Beispiel:
Die Folge $a_n = 1/n$ ist monoton fallend und außerdem nach unten beschränkt. Kein Glied der Folge ist kleiner als Null. Daher müssen die Glieder der Folge für sehr große Indices n sehr nahe an die Zahl Null herankommen, also von der Zahl Null kaum unterscheidbar sein:

Wir sagen:
Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine ***Nullfolge***. Sie hat den Grenzwert Null:

Man schreibt: $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} 1/n = 0$

Oder: $1/n \to 0$ für $n \to \infty$

(Bemerkung: Man soll nicht schreiben: $1/n = 0$ für $n \to \infty$, da die Glieder $a_n = 1/n$ nicht wirklich ***gleich Null*** sein können, sondern nur ***beliebig nahe*** an die Null herankommen)

Weitere Beispiele für Nullfolgen:

Man kann leicht einsehen, dass auch die Folgen $a_n = 1/n^2$, $a_n = 1/\sqrt{n}$ den Grenzwert a = 0 haben. Solche Folgen bezeichnet man als Nullfolge und schreibt abgekürzt:

$1/n \to 0$ $\quad$ $1/n^2 \to 0$ $\quad$ $1/\sqrt{n} \to 0$ $\quad$ $1/2^n \to 0$

Vereinfachte Grenzwertberechnung

Mit Hilfe der Nullfolgen können viele einfache Grenzwerte berechnet werden.

Beispiel: Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = (3n^2+1) / (2n^2 + 5n - 2)$ den Grenzwert a = 1,5 hat, also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+5n-2} = 1{,}5$$

Wenn man für n sofort die Zahl ∞ einsetzt, bekommt man ∞ / ∞ . Das ist eine ***unbestimmte Form***, sie muss durch geeignete Umformung vermieden werden:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+5n-2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2(3+\frac{1}{n^2})}{n^2.(2+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} \frac{(3+\frac{1}{n^2})}{(2+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2})} = \frac{3}{2}$$

Weil die Nullfolgen $1/n^2 \to 0$ und $5/n \to 0$ verschwinden.

Allgemein geht man so vor:

- Man versucht zuerst, für n die Zahl ∞ einzusetzen und beachtet dabei folgende Regeln:

  $\pm \mathbf{k} \cdot \infty \to \pm\infty \quad \pm \mathbf{k} + \infty \to \infty$ (k beliebieg € R, aber beschränkt)

  $\infty . \infty \to \infty \quad \sqrt{\infty} = \infty \quad \mathbf{1/\infty \to 0} \quad \mathbf{1/0} \to \infty \quad \infty^{\mathbf{k}} \to \infty$

- Wenn man damit eine feste, beschränkte Zahl bekommt, so ist diese Zahl der gesuchte Grenzwert.

- Meist bekommt man eine der unbestimmten Formen:

  $\infty / \infty \qquad \infty - \infty \qquad \mathbf{0/0} \qquad \mathbf{0}.\infty$

  Unbestimmte Formen müssen durch geschickte Umformungen vermieden werden.

- Wenn dass allgemeine Glied der Folge aus einem Bruch aus zwei Polynomen besteht, so hilft es meistens, im Zähler und Nenner die höchste Potenz von n herauszuheben. Kann man die unbestimmte Form nicht vermeiden, so muss man besondere Verfahren anwenden, die oft zu großen Problemen führen.

Beispiel 1:
$\lim_{n\to\infty} (3/(n+1) - 1) / (1/n + 2) = ?$ Einsetzen von $n \to \infty$ ergibt $\lim_{n\to\infty} (3/(n+1) - 1) / (1/n + 2) = -1/2$

Beispiel 2:
$\lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = \infty - \infty$ (unbestimmte Form) Umordnung: $\lim_{n\to\infty}(n^2-n) = \lim_{n\to\infty}n^2(1-1/n) = \lim_{n\to\infty}n^2 = \infty$

Beispiel 3:

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)} - \sqrt{(n-1)}) = \infty - \infty$ (unbestimmte Form)

Umordnung: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)} - \sqrt{(n-1)}) = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{(n+1)} - \sqrt{(n-1)}). (\sqrt{(n+1)} + \sqrt{(n-1)}) / (\sqrt{(n+1)} + \sqrt{(n-1)}) =$
$\lim_{n\to\infty} \{ 2 / (\sqrt{(n+1)} + \sqrt{(n-1)}) \} \to 2 / \infty \to 0$

Aufgaben:
Bestimmen Sie die Grenzwerte für $n\to\infty$ für die nachstehenden Folgen mit Hilfe der Grenzwertsätze:

R3.1a) $a_n = (n+1) / n$	b) $a_n = (n+1) / (n-1)$	c) $a_n = (n+1) / n - 1$	d) $a_n = (3n+1) / (2n - 1)$
R3.2a) $a_n = (n^2+1) / n^2$	b) $a_n = (n+1) / (n^2-1)$	c) $a_n = (n^2+1) / n - 1$	d) $a_n = (n+1) / (n-1)$
R3.3a) $a_n = (1/n+1) / (1/n-n)$	b) $a_n = (1/n+1) / (1/(n-1))$	c) $a_n = (n+1) / n^2$	d) $a_n = (n^2+1) / (2n^2-3n +2)$
R3.4a) $a_n = (\sqrt{n}+1) / \sqrt{n}$	b) $a_n = (\sqrt{n}+1) / (\sqrt{n}-1)$	c) $a_n = (\sqrt{n}+1) / \sqrt{n} -2$	d) $a_n = (\sqrt{n}+1) / (n-1)$
R3.5a) $a_n = R3\sqrt{n}+1) / (\sqrt{n}+n)$	b) $a_n = (2\sqrt{n}+n) / (\sqrt{n}-3)$	c) $a_n = (\sqrt{n}+1) / (1/\sqrt{n}-1)$	d) $a_n = (\sqrt{n}+n^2) / (\sqrt{n}-2n^3)$
R3.6a) $a_n = 1/n - 1/(n-1)$	b) $a_n = 1/\sqrt{n} - 1/n$	c) $a_n = n^2 - (2n+1)^2$	d) $a_n = n^2-n^3$
R3.7a) $a_n = \sqrt{n}+1 -\sqrt{n}$	b) $a_n = (\sqrt{n}+1) -2\sqrt{n}$	c) $a_n = \sqrt{(n+1)} - n$	d) $a_n = \sqrt{(n^2+1)} -n$
R3.8a) $a_n = \sqrt{(n^2+1)} -\sqrt{(n^2-1)}$	b) $a_n = \sqrt{(n^2+1)} +\sqrt{(n^2-1)}$	c) $a_n = (\sqrt{n}+1) -\sqrt{(n^2-1)}$	d) $a_n = (\sqrt{n^3}+1) -n\sqrt{n}$

4. Wichtige Folgen mit Grenzwerten

Die Folgen $a_n = a^n$ und ihre Grenzwerte: ($a>0$)

Beispiel 4.1: $\mathbf{a^n = 2^n}$

Man erkennt leicht, dass die Folge keinen Grenzwert hat, sondern gegen ∞ geht:

Beispiel 4.2: $\mathbf{a_n = (1+1/100)^n = 1{,}01^n}$

Hier liegt die Basis a sehr nach bei 1, trotzdem geht die Folge $\to\infty$

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a100	a200	a500	a1000	a1000000
1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,1	2,7	7,32	145		

Beispiel 4.3: $\mathbf{a_n = 1^n}$

Diese Folge hat einen Grenzwert, nämlich 1

Beispiel 4.4: **$a_n = (1-1/100)^n = 0,99^n$**

a1	a2	a3	a4	a	a6	a7	a8	a9	a10	a100	a200	a500	a1000	a1000000
0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9	0,37	0,13	0,01	0	0

Man sieht:

Die Folge $a_n = a^n$ ist für 0<a<1 eine Nullfolge, für a>1 strebt sie gegen ∞ ($n \in N$)

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \left\{ \begin{array}{cc} \infty & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } 0 < a < 1 \end{array} \right\}$$

a = constant !!

Die Euler'sche Zahl e:

Die Folge $a_n = (1 + 1/n)^n$ **n**$\in$N

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a100	a200	a500	a1000	a1000000
2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,52	2,55	2,57	2,58	2,59	2,7	2,71	2,72	2,72	2,71828

Aufgrund der Tabelle vermuten wir, dass diese Folge für $n\to\infty$ einen Grenzwert hat. Dies kann man auch in der höheren Mathematik beweisen. Dieser Grenzwert heißt *Euler'sche Zahl* und hat das Symbol *e.*

$e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = 2{,}7182818281828.....$ (Euler'sche Zahl)

Erste Eigenschaften von e:

(1) Die Eulersche Zahl e ist *irrational*, sie kann nicht als Bruch von zwei ganzen Zahlen geschrieben werden (ohne Beweis)

(2) Weiters gilt: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$

Beweis : $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}.x} = \lim_{n\to\infty}\{(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}\}^x = \lim_{m\to\infty}\{(1+\frac{1}{m})^m\}^x = e^x$

Dabei verwenden wir die Substitution : $\frac{x}{n} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{n}{x}$; das bedeutet : wenn $n\to\infty \Leftrightarrow m\to\infty$

Beispiel 4.5: $\lim_{n\to\infty} \{(n+3)/n\}^{2n}$=? Lösung:: $\lim_{n\to\infty} \{(n+3)/n\}^{2n} = \lim_{n\to\infty} (1 + 3/n\}^{2n} = \lim_{n\to\infty} \{(1 + 3/n)^n\}^2 = (e^3)^2 = e^6$

Beispiel 4.6: $\lim_{a\to 0} (1 + 3a)^{1/a}$ = ? Lösung: Da $a \to 0$ gehen soll, wählen wir statt a eine Nullfolge, am besten die Folge 1/n mit $n\to\infty$.
Wir schreiben also statt a = 1/n:
$\lim_{a\to 0} (1 + 3a)^{1/a} = \lim_{n\to\infty} (1 + 3/n\}^n = e^3$

Aufgaben:
R4.6) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der gegebenen Folge für $n\to\infty$, wenn er existiert!
a) $(1 - x/n)^n$ b) $(1 + 1/xn)^n$ c) $(2 + 1/n)^n$ d) $(2 - 1/n)^n$ e) $(0{,}99 + 1/n)^n$ f) $(1 + 1/n)^{2n}$

g) $\{(n-2)/n\}^n$ h) $\{(2n + x)/2n\}^n$ i)$\{(2n + x)/n\}^n$ j)) $\{(2n + x)/2n\}^{2n}$ k)) $\{(n + 2x)/2n\}^{n/2}$

R4.7) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der angegebenen Folge für $a\to 0$, falls existent!
a) $(1 - a)^{1/a}$ b) $(2 - 2a)^{1/a}$ c) $(1 - a)^{2/a}$ d) $(1 + 2a)^{1/2a}$ e) $(1 - a)^{1/2a}$ f) $(1 - a/3)^{2/a}$

5. Reihen und Teilsummen

Folge: 2,5,11,23,47,95,............. zugehörige Reihe: 2+5+11+23+47+95+.................

Folge: 4,-6, 8,-10, 12,-14,..........zugehörige Reihe: 4+(-6)+8+(-12)+14+...................

1.Teilsumme: $s_1=a_1$ 2.Teilsumme: $s_2=a_1+a_2$ 3.Teilsumme: $s_3=a_1+a_2+a_3$

Allgemeine Teilsumme $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

(k heißt *„Laufindex"*, k läuft von 1 bis n)

Formeln:

Arithmetische Reihe:

$$\boxed{a_n = a + (n-1)d \qquad s_n = \frac{n}{2}/\{\ a_1 + (n-1)d)\ \} = \frac{n}{2}\{a_1 + a_n\}}$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{lllll} s_n = a_1 & +a_1+d & +a_1+2d & +\dots\dots\dots\dots & +a_1+(n-1)d \\ \underline{S_n = +a_1+(n-1)d} & \underline{+a_1+(n-2)d} & \underline{+a_1+(n-3)d+\dots\dots} & & \underline{.+a_1+d} \end{array}\right\} +$$

$2s_n = n[2a_1+(n-1)d]$

Beispiel 5.1 $7 + 11 + 15 + 19 + \dots + 403 = \sum_{k=1}^{100} 4k+3 = [\ 2\ .7 + 10\ .4\ ]\ .\ 101\ /\ 2 = 21\ 109$

Geometrische Reihe

$$\boxed{a_n = a_1.q^{n-1} \qquad s_n = a_1.\frac{1-q^n}{1-q} = a_1.\frac{q^n-1}{q-1}}$$

(Beweis im Unterricht)

Beispiel 5.2 $3 + 15 + 75 + \dots + 9375 = \sum_{k=1}^{6} 3.5^k = 3\frac{5^6-1}{5-1} = 3.\frac{15625}{4}$

Beispiel 5.3
Berechnen Sie die Summe $s_n = 17 - 21 + 25 - 29 + 33$ ....+225 = ? (alternierend arithmetisch)
Lösung:
Zuerst bestimmt man die Anzahl n der Glieder:
Dazu denkt man sich die Folge ohne Alterierung: 17, 21, 25, 29, ...225.
Das allgemeine Glied dieser Folge wäre $a'_n = 225 = 17 + (n-1).4 = 4n + 13 \Leftrightarrow 4n = 212 \Leftrightarrow n = 53$

$\Rightarrow$ auch die gegebene Folge hat 53 Glieder und ihre Summe ist:

$$s_n = \underbrace{\overset{a_1}{17} - \overset{a_2}{21}}_{-4} + \underbrace{\overset{a_3}{25} - \overset{a_4}{29}}_{-4} + \underbrace{\overset{a_5}{33} - \overset{a_6}{37}}_{-4} \dots\dots\dots \underbrace{\overset{a_{52}}{-221}.+\overset{a_{53}}{225}}_{-4} = (-4)\ .\ 52\ /\ 2 + 225 = 121$$

Summe über Quadrate:

Ein wichtige Reihe ist folgende: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2 = \Sigma k^2$ Es gilt die Formel

$$\boldsymbol{\Sigma k^2 = 1+4+9+16+ \quad n^2 = (2n+1).(n+1).n\ /\ 6} \quad \text{(Beweis siehe später)}$$

Beispiel 5.4
Berechnen Sie die Summe: $S = 100^2 + 101^2 + 102^2 + \dots + 199^2 + 200^2 = ?$
Lösung:
$S = (1^2 + 2^2 + \dots *200^2) - (1^2+2^2+\dots+ 99^2) = 401.201.200/6 - 199.100.99/6$

Vollständige Induktion

Formeln, in denen ein Index ($n \in N$) eine Rolle spielt, kann man oft mit einem besonderen Verfahren beweisen. Es heißt: *Beweis durch vollständige Induktion* und wird folgendermaßen geführt:

- Man muss die Formel schon vor dem Beweis kennen oder zumindest vermuten. (Durch diese Beweismethode kann man die Formel nicht finden.)
- *Erster Schritt:* Man überprüft, ob die Formel für den Index n=1 richtig ist
- *Zweiter Schritt:* Man nimmt zunächst an, die Formel sei auch für den Index n richtig. Wenn man ***daraus*** folgern kann, dass die Formel auch für den Index n+1 richtig ist, so hat man die Formel bewiesen

Beispiel 5.4
Man soll die Formel s_n= 1+2+3+4+..............................n = n(n+1)/2 mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen!
Erster Schritt: Wir überprüfen, ob die Formel für n = 1 richtig ist: s_1 = 1(1+1)/2 = 1 ....richtig

Zweiter Schritt: Nun nehmen wir an, dass die Formel für den Index n richtig ist. Wir nehmen also an dass s_n =1+2+3+4+......+n = n(n+1)/2 richtig ist.

Wenn die Formel richtig wäre, würde sie für den Index n+1 folgendermaßen aussehen: $s_{n+1} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$

Nun berechnen wir s_{n+1} und verwenden dabei die Annahme, dass die Formel für den Index n richtig ist

$$s_{n+1} = \underbrace{1+2+3+4+.........n}_{s_n = n(n+1)/2} + n + 1 = \frac{n.(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n.(n+1)+2.(n+1)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

Das ist die Formel, die wir für den Index n+1 erwartet haben. Wir haben also gezeigt: Wenn die Formel für einen beliebigen Index n richtig ist, so ist sie auch für den darauffolgenden Index n+1 richtig

Unsere Formel war für n=1 richtig $\Rightarrow$ sie ist auch für n=2 richtig $\Rightarrow$ sie ist auch für n=3 richtig usw...$\Rightarrow$ sie ist für alle $n \in N$ richtig.

Aufgaben

R5.1) Beweisen Sie die Summenformel für die arithmetische und geometrische Reihe!
R5.2) Bestimmen Sie jeweils das allgemeine Glied und berechnen Sie die Summe:
a) 11+15+19+23+.......................+423= b) 2048+1024+512+.......................+4=
c) $\sqrt{2}$+2+2$\sqrt{2}$+..............................+32= d) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} + ...+125 =$
R5.3) Bestimmen Sie jeweils das allgemeine Glied und berechnen Sie die Summe:
a) 13-16+19-22+...........................-310= b) 5-9+13-17+...............................+149=
c) -3+13-23+33-............................+253= d) -5+11-17+23-............................-197=
R5.4) Das dritte Glied einer arithmetischen Folge ist 11. Die zwölfte Teilsumme ist 216. Bestimmen sie a_1 und d!
R5.5) Das fünfte Glied einer geometrischen Folge ist $\sqrt{32}$, das achte Glied ist 16. Bestimmen Sie s_{10}!
R5.6) Das zweite Glied einer geometrischen Folge ist 3, das Glied ist 9. Bestimmen Sie s_{12}!
R5.7).Das dritte Glied einer geometrischen Folge ist 512, das elfte Glied ist 32. welchen Index hat das Glied a_n=2?
R5.8).Bestimmen Sie das erste negative Glied der Folge: 101,97,93,..!
R5.9).Berechnen Sie die Summe: 3+5+7+11+13+15+19+21+23+27+..................+155+157+159=
R5.10) Schreiben Sie jeweils die Summe ausführlich an:

$a) \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k+1}$ b) $\sum_{k=3}^{10} \frac{k-1}{k+1}$ c) $\sum_{k=1}^{5} \frac{(-2)^k}{k+1}$

R5.11) Berechnen Sie folgende Summen:

$a) \sum_{k=1}^{n} k$ b) $\sum_{k=1}^{n} a$ c) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ d) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$ e) $\sum_{k=1}^{n} k(1-k)$

$f) \sum_{k=n}^{2n} k^2$ g) $\sum_{k=n}^{2n} n^2$ h) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k$ i) $\sum_{k=5}^{2n} (-1)^{k+1}$ j) $\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k .k$

$k) \sum_{k=1}^{n} (5k-1)$ l) $\sum_{k=n}^{2n} (3k+4)$ m) $\sum_{k=1}^{n} n^k$ $n) \sum_{k=n}^{2n} n^k$ o) $\sum_{k=n}^{2n} k^2$ p) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (3k+1)$

R5.12) Berechnen Sie: a) $g^3+g^4+g^5+$.................................g^n= b) (n+1) + (n+2) + (n+3)+............+2n=.
c) 5+2x25+3x125+4x625+................nx5^n=

Anleitung: Schreiben Sie in die erste Zeile: 5 + 25 + 125 + ... 5^n
in die zweite Zeile 25 + 125 + ...5^n und so weiter.
Addieren sie zuerst die Zeilen und dann diese Ergebnisse!

R5.13) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: a)Die Summenformel für arithmetische und geometrische Reihen. b) 1 + 4 + 9 +..........+ n^2 = (2n+1).(n+1).n / 6

Unendliche Summen

Unter der Summe „aller Glieder“ versteht man den *Grenzwert der allgemeinen Teilsumme a_n für $n \to \infty$* :

$$s = s_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Beispiel 5.5

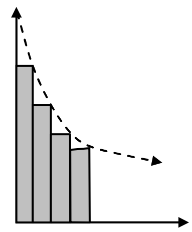
Bestimmen Sie die Summe aller Glieder der Reihe: s = 1 + ½ + ¼ + 1/8, ... !

Lösung: Die Reihe ist geometrisch mit a_1= 1 und q = ½ . $\Rightarrow$ $s_n = 1.\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow s = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Aufgaben

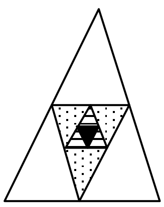
R5.13) Berechnen Sie die allgemeinen Summen:

$a) \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^k$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 0{,}99^k$ d) 1 -0,4 + 0,16 - 0,64 + 0,256 +/-.......



R5.14) Bei einem Spiel soll folgendes gelten: Für den ersten Gewinn erhält man 8€, für den zweiten Gewinn 4€, für den dritten Gewinn 2€ usw. wie viel Geld kann man dabei maximal gewinnen?

R5.15) Gegeben ist eine Folge von Rechtecken. Das erste Rechteck (im Bild links) hat die Fläche A. Die jeweils rechts folgende Fläche beträgt 75% der vorangegangenen Fläche. Berechnen sie die Summer aller dieser Flächen!



R5.16) Gegeben sei ein Dreieck der Fläche A_1. Verbindet man die Mittelpunkte seiner Seiten so erhält man das nächste Dreieck A_2. Wenn man weiter so verfährt, erhält man eine Folge von Dreiecksflächen: A_1, A_2, A_3. .... Berechnen Sie die Summe aller dieser Dreiecksflächen!