# SEMINAR: DIE WEIL'SCHE VERMUTUNG, WS 2010

H. Hauser & C. Krattenthaler

Sei $f(x_1, ..., x_n)$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Für eine Primzahl $p$ und eine natürliche Zahl $k$ betrachte den endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^k$ Elementen. Sei $n_k$ die Anzahl der Lösungen von $f(x) = 0$ in $\mathbb{F}_q$. Die exponentielle erzeugende Funktion der $n_k$,

$$\zeta(X, p) = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{k} T^k),$$

heisst die Weil'sche Zeta-Funktion der durch $f = 0$ definierten algebraischen Menge $X$. Sie beschreibt das Wachstum der Anzahl der Lösungen von $f = 0$ in $\mathbb{F}_q$ für zunehmendes $k$.

1949 formulierte André Weil mehrere Vermutungen über die Zeta-Funktion; er selbst bewies einige der Aussagen in Spezialfällen (z.B. für Kurven). Die erste dieser Vermutungen behauptet die Rationalität von $\zeta(X, p)$, also, dass sich $\zeta(X, p)$ als Quotient von zwei Polynomen in $T$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ schreiben lässt. Dies ist bemerkenswert, als dass damit die Werte von $n_k$ schon durch endlich viele Werte festgelegt sind, das Wachstum von $n_k$ also "vorprogrammiert" ist.

Diese Vermutung wurde von Bernhard Dwork Anfang der sechziger Jahre in einer Reihe von spektakulären Arbeiten bewiesen. Auffallend ist, dass sein Beweis Techniken der $p$-adischen Analysis verwendet (das ist das Analogon der reellen Analysis in der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich einer nicht-archimedischen Norm), um ein algebraisches Problem (die Lösbarkeit einer polynomialen Gleichung) zu behandeln.

Im Seminar werden wir diesen Beweis verstehen versuchen. Grundlage ist ein (sehr gutes) Buch von Neal Koblitz: *$p$-adic Numbers, $p$-adic Analysis, and Zeta-Functions*. Die ersten Vorträge entwickeln die notwendigen Grundlagen aus der $p$-adischen Analysis. Im wesentlichen ist das die Analysis des ersten Semesters, aber über dem Körper $\mathbb{Q}_p$ der $p$-adischen Zahlen. Daran schliesst sich die Theorie der $p$-adischen Potenzreihen an, mit deren Hilfe wir dann schliesslich den Beweis durchführen werden.

Die Voraussetzungen an die Studierenden sind relativ gering, die Grundvorlesungen der ersten vier Semester genügen für den Besuch des Seminars. Interesse an erzeugenden Funktionen (Kombinatorik), diophantischen Gleichungen (Arithmetik und algebraische Geometrie), formalen und konvergenten Potenzreihen (Algebra und Analysis) wird erwartet.

Vorbesprechung: Montag, 4. Oktober, 11.00 Uhr, C 207.

Voraussichtlicher Termin: Donnerstag, 15:30 – 17:00, SR S1 (Althanstrasse).

Rückfragen und Anmeldungen bei C. Krattenthaler und H. Hauser.