

# VO Grundlagen der Algebraischen Geometrie, WS 2010

H. Hauser

Die Algebraische Geometrie ist gekennzeichnet durch ihre starke Interferenz mit anderen Gebieten der Mathematik: Der *Linearen Algebra* durch den Übergang von linearen Gleichungen zu quadratischen, kubischen und allgemeiner polynomialen Gleichungssystemen. Der *Differentialgeometrie* durch die Betrachtung geometrischer Konzepte wie Kurven, Flächen, Tangentialraum, Dimension oder Zusammenhangskomponenten. Der *Algebra* durch die Idealtheorie in Polynomringen und Konstruktionen der *Kommutativen Algebra* wie Quotientenbildung, Lokalisierung und Kompletterung von Ringen und Algebren. Der *Zahlentheorie* durch die Betrachtung der Lösungen diophantischer Gleichungen als geometrische Gebilde. Der *Funktionentheorie* durch den Übergang von polynomialen zu holomorphen Funktionen und zu formalen Potenzreihen. Der *Kombinatorik* und der *Diskreten Geometrie* durch den Zusammenhang der konvexen Hüllen der Exponenten eines Polynoms, sogenannter *Newton Polytope*, mit seiner Nullstellenmenge. Der *Darstellenden Geometrie* durch die computermässige Visualisierung der Lösungen algebraischer Gleichungen.

Die Vorlesung setzt nur Grundkenntnisse aus Algebra und Geometrie voraus, ist also für Studierende ab dem 5. Semester zugänglich. Sie wird im Sommersemester 2011 mit ausgewählten Fragestellungen fortgesetzt. Damit soll ein solider Einstieg in das selbständige wissenschaftliche Arbeiten in diesem Gebiet ermöglicht werden. Das Verwenden von Techniken der Algebraischen Geometrie und Kommutativen Algebra in den oben erwähnten Gebieten wird ein weiteres Ziel der Lehrveranstaltung sein.

Im Aufbau werden wir axiomatisch vorgehen, die vorgestellten abstrakten Konzepte aber immer sofort in realen Situationen und an Beispielen studieren. Daraus resultiert eine durchgehende Dialektik zwischen dem Studium allgemeiner Strukturen und von konkreten geometrischen Fragestellungen.

Wir beginnen die Vorlesung mit dem Begriff des *affinen Schemas*. Algebraisch gesehen ist dies ein beliebiger kommutativer Ring mit Einselement. Geometrisch gesehen wird dies die Lösungsmenge eines polynomialen Gleichungssystems sein. Die Übersetzung erfolgt über den Begriff des *Spektrums* eines Rings. Motiviert wird diese Dualität durch den *Nullstellensatz* von Hilbert.

Nach der Diskussion von weiteren algebraischen Sätzen und Konzepten (Noether Normalisierungslemma, Lokalisierung, Primärzerlegung, Ring der regulären Funktionen, ...) folgt ein stark geometrisch geprägtes Kapitel. Anschauliche Begriffe wie Glattheit, Dimension, irreduzible Komponente, Transversalität oder Tangentialraum werden algebraisch präzise entwickelt. Dies führt wieder zur Erweiterung der axiomatischen Grundlagen und zu grundlegenden Sätzen der Algebraischen Geometrie. Es wird sich zeigen, dass viele geometrische Phänomene durch die Methoden der Algebra tiefgehend verstanden und im weiteren auch abstrahiert und konzeptualisiert werden können. Die unzähligen Anwendungen der Algebraischen Geometrie in anderen Gebieten der Mathematik (und auch ausserhalb) belegen die Effizienz dieses Wechselspiels zwischen Geometrie und Algebra.

Zeiten: VO 4 Mittwoch, 11–13 Uhr, Donnerstag 13–15 Uhr, D101.

PS 2, Mittwoch 13–15 Uhr, S1.

Beginn: Mittwoch, 6. Oktober 2010.

Rückfragen: herwig.hauser@univie.ac.at.