

# Funktionalanalysis

Herwig Hauser

23. März 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Motivation</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Topologische Vektorräume</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Stetige lineare Abbildungen</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>Hilberträume</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Der Begriff der Basis in Vektorräumen</b>	<b>73</b>
4.1	Basen in endlich-dimensionalen Vektorräumen . . . . .	73
4.2	Basen in unendlich-dimensionalen Vektorräumen . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Lineare Operatoren</b>	<b>83</b>

# Kapitel 0

## Motivation

### Beispiel 1

Wir betrachten den Bewegungsablauf einer fest eingespannten, schwingenden Saite nach dem Zupfen und Loslassen.

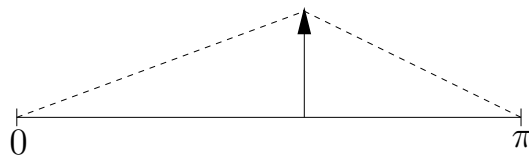


Abbildung 1: Saite zur Zeit  $t = 0$ .

Nach Verstreichen der Zeit  $t$  hat die Saite in etwa folgende Gestalt: Sei  $u(s, t)$

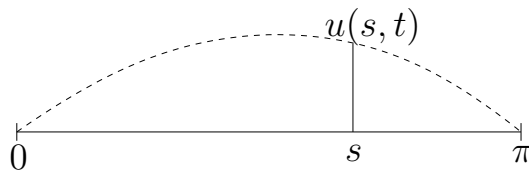


Abbildung 2: Auslenkung der Saite zur Zeit  $t$  am Ort  $s$ .

die zeitliche Auslenkung zum Zeitpunkt  $t$  und zum Ort  $s \in [0, \pi]$ . Als erstes

wollen wir  $u(s, t)$  als Funktion von  $s$  und  $t$  bestimmen. Nach physikalischen Gesetzen gilt die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \alpha^2 \partial_s^2 u$$

für eine positive Konstante  $\alpha^2$ . Ein günstiger Lösungsansatz ist

$$U(s, t) = v(s)w(t)$$

mit Funktionen  $v(s)$  und  $w(t)$ . Einsetzen ergibt

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = \alpha^2 \frac{v''(s)}{v(s)}$$

für alle  $t$  und  $s$ . Also müssen beide Seiten konstant sein, etwa  $\frac{v''}{v}(s) = -\beta$ ,  $\frac{w''}{w}(t) = -\alpha^2\beta$  für ein  $\beta \in \mathbb{R}$ . Dies ergibt zwei gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$v'' + \beta v = 0 \quad \text{und} \quad w'' + \alpha^2\beta w = 0.$$

Lösungen dieser Gleichungen liefern eine Lösung  $u$  der ursprünglichen Differentialgleichung (Einsetzen!). Wegen der Fixierung der Saite in  $s = 0$  und  $s = \pi$  gelten folgende Randbedingungen:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

also  $v(0)w(t) = v(\pi)w(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . O. B. d. A. können wir annehmen  $w(t) \not\equiv 0$  (sonst Ruhelage der Saite), also

$$v(0) = v(\pi) = 0.$$

Das sind zwei Nebenbedingungen. Wir untersuchen für welche  $\beta$  die Differentialgleichung

$$v'' + \beta v = 0, \quad v(0) = v(\pi) \tag{1}$$

eine nicht triviale Lösung hat. Integration von  $v^2$  liefert

$$\beta \int_0^\pi v^2 \, ds \stackrel{\text{DGL}}{=} - \int_0^\pi v v'' \, ds \stackrel{\text{partiell}}{=} -v v'|_0^\pi + \int_0^\pi (v')^2 \, ds = \int_0^\pi (v')^2 \, ds > 0$$

und damit  $\beta > 0$ . Durch Einsetzen sieht man, dass

$$v(s) = c_1 \cos \gamma s + c_2 \sin \gamma s$$

mit  $\gamma = \sqrt{\beta} > 0$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  konstant, eine Lösung der Differentialgleichung in 1 ist. Aus den Randbedingungen  $v(0) = v(\pi) = 0$  folgt, dass  $c_1 = 0$

und  $c_2 \sin \gamma\pi = 0$ . Wegen  $c_2 \neq 0$  (sonst triviale Lösung) ist  $\gamma\pi = k\pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Aber  $\gamma > 0$ , also  $k \in \mathbb{N}$  und  $\beta = k^2$  ist notwendige und dann auch hinreichende Bedingung für Existenz einer nicht trivialen Lösung von (1),

$$v_k(s) = c_2 \sin ks, \quad s \in [0, 2\pi].$$

Wir lösen nun  $w'' + \alpha^2 k^2 w = 0$  und erhalten

$$w_k(t) = a_k \cos \alpha kt + b_k \sin \alpha kt$$

mit  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  konstant. Zusammen ergibt sich also

$$u_k(t) = \sin ks \cdot (a_k \cos \alpha kt + b_k \sin \alpha kt)$$

mit  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  Lösung von

$$\partial_t^2 u = \alpha^2 \partial_s^2 u, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Beachte: a priori könnte es noch andere Lösungen geben, da unser Ansatz restriktiv war.

Wir haben in obigen Überlegungen bis jetzt die Anfangslage  $g(s)$ ,  $s \in [0, \pi]$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $h(s)$ ,  $s \in [0, \pi]$  vernachlässigt. Wir wollten nun diese vorgeben und wieder nach Lösungen  $u(s, t)$  suchen. Damit verlangen wir zusätzlich

$$u(s, 0) = g(s), \quad \partial_t u(s, 0) = h(s) \quad \text{für alle } s \in [0, \pi].$$

Erfüllen die Lösungen  $u_k(s, t)$  diese Bedingungen? Wie Einsetzen zeigt, im allgemeinen nicht. Wir können es aber mit (unendlichen) Linearkombinationen der  $u_k$  versuchen (da ja alle  $u_k$  Lösungen sind), etwa

$$\begin{aligned} u(s, t) &:= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(s, t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \alpha kt + b_k \sin \alpha kt) \sin ks. \end{aligned}$$

Wegen der freien Wahl von  $a_k$  und  $b_k$  genügt es, die Summe der  $u_k$  zu nehmen. Diese Vorgehensweise macht nur dann Sinn, wenn  $u$  zweimal partiell differenzierbar ist (sonst ist Einsetzen unmöglich), also die Reihe genügend gut konvergiert. Diese Voraussetzung wollen wir im folgenden als gegeben

betrachten. Kann man dann die Konstanten  $a_k$  und  $b_k$  so wählen, dass  $u(s, t)$  auch den Anfangsbedingungen

$$u(s, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin ks = g(s),$$

$$\partial_t u(s, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k k b_k \sin ks = h(s).$$

genügt? Das ist nur möglich, wenn die vorgegebenen Funktionen  $g(s)$  und  $h(s)$  in Sinusreihen entwickelbar sind, oder, allgemeiner, in trigonometrische Reihen der Form

$$f(s) := \frac{1}{2}p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (p_k \cos ks + q_k \sin ks).$$

Die Darstellung von (hinreichend glatten) Funktionen als unendliche Linearkombination der Funktionen  $\cos ks$  und  $\sin ks$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ist analog zur Schreibweise von Vektoren in endlich-dimensionalen Vektorräumen als Linearkombination von Basiselementen.

*Annahme:* Die Reihe  $f(s)$  konvergiert auf  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig und ist damit stetig. Kann man dann die Koeffizienten  $p_k$  und  $q_k$  aus  $f(s)$  bestimmen? Aus der linearen Algebra wissen wir, dass sich ein Vektor  $v$  aus einem Vektorraum  $V$  mit Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  bezüglich eines gegebenen Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eindeutig schreiben läßt als

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, v_k \rangle v_k.$$

Beachte, dass  $\langle v_k, v_j \rangle = \delta_{kj}$ , weil  $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$  eine Orthonormalbasis ist. Auf Grund analoger Überlegungen stellt sich die Frage, ob die Funktionen  $\cos ks$  und  $\sin ks$  eine Art "Orthonormalbasis" auf dem Vektorraum  $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  der stetigen Funktionen auf  $[-\pi, \pi]$  sind. Rechnung liefert (Euler):

$$\langle \cos ks, \sin js \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos ks \sin js \, ds = 0, \quad \text{für alle } k, j$$

$$\langle \cos ks, \cos js \rangle = \langle \sin ks, \sin js \rangle = \delta_{kj} \pi.$$

Ist  $f$  von der Form  $f(s) = \frac{1}{2}p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (p_k \cos ks + q_k \sin ks)$ , so liefert Multiplikation mit  $\cos js$  und  $\sin js$  und anschließende gliedweise Integration (erlaubt

wegen gleichmäßiger Konvergenz) die Euler-Fouriersche Formeln (Fourier):

$$p_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ks \, ds = \left\langle f(s), \frac{\cos ks}{\pi} \right\rangle,$$

$$q_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ks \, ds = \left\langle f(s), \frac{\sin ks}{\pi} \right\rangle.$$

Ist  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  umgekehrt stetig (oder Lebesgue-integrierbar), so können mit den obigen Formeln Fourierkoeffizienten  $p_k$  und  $q_k$  berechnet werden. Das zentrale Problem ist die Frage, ob die Fourierreihen gegen  $f$  konvergieren. Dies wiederum führt uns zur Frage, welche Konvergenz hier sinnvoll ist, d. h., mit welcher Topologie  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  versehen werden soll. Möglichkeiten sind z. B. punktweise Konvergenz, Maximumnorm, Quadratnorm, ...

Da das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , das die Fourierkoeffizienten definiert, in natürlicher Weise mit der Quadratnorm  $\|f\|^2 := \langle f, f \rangle$  zusammenhängt, liegt es nahe, diese zu verwenden (die punktweise Konvergenz macht hier große Schwierigkeiten, siehe Heuser [5], p. 136). Also:  $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(s) \, ds$$

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(s)^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Damit sind die Funktionen  $\frac{\cos ks}{\sqrt{\pi}}$  und  $\frac{\sin ks}{\sqrt{\pi}}$  orthonormal bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $k, j \in \mathbb{N}$ ,  $j > 0$ , und die Frage ist, ob für  $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  die Reihe

$$\frac{1}{2}p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \cos ks \rangle \cos ks + \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \sin ks \rangle \sin ks$$

bezüglich  $\|\cdot\|_2$  gegen  $f$  konvergiert. Dies ist richtig, aber nicht trivial (Heuser, [5], p. 141). Damit approximieren die Partialsummen der Fourierreihen die stetige Funktion  $f$  bezüglich  $\|\cdot\|_2$ .

Die Approximation ist sogar optimal, und zwar unter den Linearkombinationen der  $\cos ks$ ,  $\sin ks$  mit  $k \leq n$ , und damit zudem eindeutig bestimmt. Genauer: Sei  $T_n := \mathbb{R} \langle \cos ks, \sin ks : k \leq n \rangle \subseteq \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  (endlich-dimensionaler Untervektorraum), so ist die abgeschnittene Fourierreihe von  $f$  jenes Element von  $T_n$ , das zu  $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  den kleinsten Abstand ("Orthogonalprojektion") hat, und damit eindeutig bestimmt ist.

## Beispiel 2

Vergleiche Heuser [5], p. 650, Werner [6], p. 100, Satz 3, 1.13, und auch p. 131.

Es seien  $a_{ik} \in \mathbb{R}$ ,  $i, k \in \mathbb{N}$ ,  $A = (a_{ik})$  unendliche Matrix,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $c = (c_i)$  unendlicher Vektor. Betrachte dann das unendliche Gleichungssystem in unendlich vielen Unbekannten

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

*Frage:* Gibt es eine Lösung  $x = (x_k)$  von (2), und in welchem Sinn ist die entstehende Reihe konvergent für jedes  $i$ ? Allgemeiner formuliert:

$$A \cdot x = c \quad \text{oder} \\ f_A(x) = c \quad \text{mit } f_A : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ linear, } f_A(x) = A \cdot x.$$

Um die Konvergenz der Reihen diskutieren zu können, betrachten wir statt  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  den Vektorraum  $\ell^2 = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty\}$  mit der Norm  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^2$  und dem Skalarprodukt  $\langle a, b \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k b_k$ . Sei also  $a_i = (a_{ik})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  gegeben für  $i \in \mathbb{N}$ , und  $c_i \in \mathbb{R}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Gibt es dann  $x \in \ell^2$ ,  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , mit  $\langle a_i, x \rangle = c_i$  für alle  $i$ ?

Wir nehmen an, dass die  $a_i$  linear unabhängig sind, dass also keine *endliche* nichttriviale Linearkombination Null wird. Dann gilt:  $\langle a_i, x \rangle = c_i$  hat genau dann eine Lösung  $x \in \ell^2$  mit  $\|x\| \leq b$ , wenn für alle  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\left| \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j \right| \leq b \cdot \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \right\|_2 \quad (3)$$

erfüllt ist ( $b > 0$  fix vorgegeben). Umformulierung: Jedes  $x \in \ell^2$  definiert durch  $y \mapsto \langle y, x \rangle$  eine Abbildung  $\ell_x : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , wohldefiniert und stetig bezüglich  $\|\cdot\|_2$ , da  $|\langle y, x \rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|$ . Sei  $E \subseteq \ell^2$  der von den  $a_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , aufgespannte Untervektorraum,  $E = \mathbb{R} \langle a_i : i \in \mathbb{N} \rangle$  (endliche Linearkombinationen). Die Frage lautet dann: gibt es zu gegebenen  $c_i \in \mathbb{R}$  ein  $x \in \ell^2$  mit  $\ell_x(a_i) = c_i$ . Man kann zeigen, dass jede stetige lineare Abbildung  $f : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$  von der Gestalt  $f = \ell_x$  für ein  $x \in \ell^2$  ist. Durch  $\ell_x(a_i) = c_i$  wird also die Abbildung  $f$  auf  $E$  vorgeschrieben, und die Frage lautet wiederum:

Sei  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und linear,  $E \subseteq \ell^2$  Untervektorraum. Existiert dann ein  $f : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und linear, das  $g$  fortsetzt, also  $f|_E = g$  (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach). Antwort: Ist  $F$  ein normierter Vektorraum,  $E \subseteq F$

ein Untervektorraum und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und linear, so existiert ein  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und linear mit  $f|_E = g$  und  $\|f\| = \|g\|$  (Abbildungsnorm  $\|f\| := \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ ).

*Bemerkung.* (a) Eine Fortsetzung existiert nur für Funktionale  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  und nicht für beliebige (stetige) Operatoren  $g : E \rightarrow G$  ( $G$  normierter Vektorraum).

(b) Die Bedingung (3) von oben entspricht gerade der Stetigkeit von  $g$ .

# Kapitel 1

## Topologische Vektorräume

**Definition.** Sei  $X$  Menge. Eine *Topologie* auf  $X$  ist eine Teilmenge der Potenzmenge  $T \subseteq \text{Pot}(X)$ , die  $\emptyset$  und  $X$  enthält und die abgeschlossen bezüglich beliebiger Vereinigungen und endlichen Durchschnitten ist. Das Paar  $(X, T)$  heißt topologischer Raum, die Teilmengen  $U \subseteq X$  mit  $U \in T$  heißen *offen*, ihre Komplemente *abgeschlossen*. Eine Umgebung von  $a \in X$  ist eine Teilmenge  $V$  von  $X$ , für die  $U$  offen existiert mit  $a \in U \subseteq V$ .  $X$  heißt *Hausdorffsch* oder *separiert*, wenn je zwei Punkte durch Umgebungen getrennt werden können, d. h. für je zwei Punkte gibt es disjunkte Umgebungen. Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *stetig*, wenn  $f^{-1}(V) \subseteq X$  offen für alle  $V \subseteq Y$  offen ist. Eine bijektive stetige Abbildung  $f$  mit  $f^{-1}$  stetig heißt *Homöomorphismus* zwischen  $X$  und  $Y$ . Bilder von Kompakta unter stetigen Abbildungen sind kompakt.

**Definition (Metrik).** Sei  $X$  Menge. Eine Metrik auf  $X$  ist eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit:

$$\begin{aligned}d(x, y) &= d(y, x) && \text{(Symmetrie)} \\d(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y && \text{(Separation)} \\d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) && \text{(Dreiecksungleichung)}\end{aligned}$$

Das Paar  $X = (X, d)$  heißt metrischer Raum.

*Beispiel.* (1) Ein topologischer Raum wird durch eine Metrik wie folgt defi-

niert:  $U \subseteq X$  offen  $\Leftrightarrow$  für alle  $a \in U$  gibt es eine Kugel  $B(a, r)$  mit  $B(a, r) \subseteq U$ . Diese Beziehung definiert eine Topologie auf  $X$ , und  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

Es seien  $X, Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann ist  $f$  stetig  $\Leftrightarrow$  für alle  $a \in X$  und für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $(d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)$ .

$$(2) \quad X = \mathbb{R}^n \ni (a_1, \dots, a_n),$$

$$\begin{aligned} d(a, b) &:= \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i| \\ \text{oder} &= \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|, \\ \text{oder} &= \left( \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

definiert die euklidische Topologie auf  $\mathbb{R}^n$ .

$$(2') \quad d(a, b) := \#\{i : a_i \neq b_i\} \text{ definiert die Hamming-Metrik auf dem } \mathbb{R}^n.$$

(3) Sei  $X$  eine beliebige Menge.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

definiert die diskrete Topologie auf  $X$ .

(4)  $X = \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ beschränkt} \}$  (d. h.  $|f(a)| < r \forall a \in [0, 1]$  für ein  $r \in \mathbb{R}$ ) mit der Metrik

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| =: d_\infty(f, g)$$

definiert die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf  $X = \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ .

(5)  $X$  topologischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt,  $Y = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  mit Metrik  $d(f, g) = \sup |f - g| = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|$ .

(6)  $X = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$  Einheitskreisscheibe, offen, mit der hyperbolischen Metrik  $d(x, y) =$  Bogenlänge zwischen  $x$  und  $y$  des Orthogonalkreises durch  $x$  und  $y$ .

*Bemerkung.* Wegen der Separationseigenschaft ist jeder metrischer Raum Hausdorffsch.

**Definition.** Zwei Metriken auf  $X$  heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Topologie definieren. Zwei Metriken  $d_1, d_2$  heißen *quasi-isometrisch* oder *vergleichbar*, wenn ein  $c \geq 1$  existiert mit

$$\frac{1}{c} \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c \cdot d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

**Definition.**  $X, Y$  metrische Räume.  $f : X \rightarrow Y$  heißt *gleichmäßig stetig*  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , sodass  $\forall x, y \in X$ :

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Beachte:  $\delta$  unabhängig von  $x, y$ .

$f$  heißt *Lipschitz-stetig* der Ordnung  $k > 0 \Leftrightarrow$

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Ist  $k < 1$ , so heißt  $f$  *kontrahierend*.

*Bemerkung.* - Lipschitz-stetig  $\Rightarrow$  gleichmäßig stetig  $\Rightarrow$  stetig.

-  $X$  kompakt: gleichmäßig stetig  $\Leftrightarrow$  stetig.

- Im Allgemeinen: stetig  $\not\Rightarrow$  gleichmäßig stetig  $\not\Rightarrow$  Lipschitz-stetig.

**Definition.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $X$  heißt *konvergent*  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists a \in X \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in X \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ mit } d(x_n, a) < \varepsilon \forall n \geq n_0.$$

Dann heißt  $a$  der *Limes* von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *Cauchyfolge* in  $X \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ mit } d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m \geq n_0.$$

*Bemerkung.* (a)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent  $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge.

- (b) Wenn  $d_1, d_2$  äquivalente Metriken sind, stimmen die Konvergenz und der Begriff der Cauchyfolge bzgl.  $d_1$  bzw.  $d_2$  überein.
- (c) Bilder von Cauchyfolgen unter gleichmäßig stetigen Abbildungen sind wieder Cauchyfolgen.
- (d) Aus  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge folgt im Allgemeinen nicht, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist:
- (i)  $X = ]0, 1[$  mit euklidischer Metrik,  $x_n = \frac{1}{n}$  ist eine Cauchyfolge, die nicht konvergiert.
  - (ii)  $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  mit  $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ . Dann ist  $(f_n : x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchyfolge und nicht konvergent.
  - (iii)  $X$  Menge mit diskreter Metrik,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $X$ . Dann gilt:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent  $\Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge  $\Leftrightarrow$  es gibt ein  $n_0$  mit  $x_n = c$  konstant  $\forall n \geq n_0$ .
  - (iv)  $X = \mathbb{Q}^n$  mit euklidischer Metrik. Jede Folge in  $X$ , die in  $\mathbb{R}^n$  gegen  $(\sqrt{2}, \dots, \sqrt{2})$  konvergiert, ist Cauchyfolge in  $X$ , die aber nicht konvergent in  $X$  ist.

**Definition.** Ein metrischer Raum  $X$  heißt *vollständig*  $\Leftrightarrow$  jede Cauchyfolge in  $X$  ist konvergent.  $A \subseteq X$  ist *vollständig*  $\Leftrightarrow A$  ist bezüglich der induzierten Metrik *vollständig*.

*Beispiel.*  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$  sind vollständig,  $\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig.

*Bemerkung.* (a)  $A \subseteq X$  vollständig  $\Rightarrow A$  abgeschlossen.

(b)  $A \subseteq X$  abgeschlossen,  $X$  beliebiger metrischer Raum  $\not\Rightarrow A$  vollständig.

(c)  $X$  vollständig,  $A \subseteq X$  abgeschlossen  $\Rightarrow A$  vollständig.

**Definition.**  $X, Y$  metrische Räume.  $f : X \rightarrow Y$  heißt *Isometrie* oder *abstandserhaltend*  $\Leftrightarrow$

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in X.$$

Ist  $f$  eine Isometrie, so ist  $f$  stetig und injektiv.

**Satz.** Jeder metrische Raum  $E$  besitzt eine Vervollständigung  $\bar{E}$ . D. h. es

gibt einen metrischen vollständigen Raum  $\bar{E}$ , sodass die Einbettung  $E \hookrightarrow \bar{E}$  eine Isometrie und  $E \subseteq \bar{E}$  dicht ist. Zudem ist  $\bar{E}$  eindeutig bis auf Isometrie.

*Bemerkung.*  $\mathbb{R}$  ist die Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$ , und  $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$

*Beweis.* Setze  $\hat{E} = \mathcal{B}(E, \mathbb{R}) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ beschränkt}\}$  mit der Supremumsnorm  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)|$  und der dadurch induzierten Metrik  $d_\infty(f, g) := \|f - g\|$ . Dann ist  $\hat{E}$  ein vollständiger  $\mathbb{R}$ -Vektorraum (Übung).

$E$  kann in  $\hat{E}$  wie folgt isometrisch eingebettet werden: Wähle  $a \in E$  fix. Für  $x \in E$  setze  $f_x : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_x(y) := d(x, y) - d(a, y)$ .

*Behauptung:*  $f_x$  ist beschränkt. Beweis mit Vierecksungleichung in metrischen Räumen: Seien  $a, b, a', b'$  Elemente eines metrischen Raumes. Dann gilt  $d(a', b') \leq d(a', a) + d(a, b) + d(b, b')$  und damit

$$|d(a, b) - d(a', b')| \leq d(a, a') + d(b, b').$$

Also ist  $|f_x(y)| = |d(x, y) - d(a, y)| \leq d(x, a) + d(y, y) = d(x, a)$  und damit ist  $f_x$  beschränkt.

*Zeige:*  $f$  ist Isometrie. Es gilt  $|f_x - f_y|_\infty = \sup_{z \in E} |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ . Umgekehrt ist  $|f_x - f_y|_\infty \geq d(x, y) - d(y, y) = d(x, y)$ . Daraus folgt, dass  $|f_x - f_y|_\infty = d(x, y)$ .

Also ist  $E \hookrightarrow \hat{E}$ ,  $x \mapsto f_x$  injektiv und Isometrie. Setze  $\bar{E} :=$  Abschluss von  $E$  in  $\hat{E}$ . Dann ist  $\bar{E}$  eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes  $\hat{E}$  und  $E \subseteq \bar{E}$  dicht.

Eindeutigkeit: Heuser [4], p. 250. □

*Bemerkung.* Ist  $X$  metrischer Raum und kompakt, so ist  $X$  vollständig. Denn: Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Dann ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in einem Kompaktum und besitzt damit einen Häufungspunkt in  $X$ , etwa  $a$ . Damit ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

*Beispiel.* Sei  $K$  ein metrischer kompakter Raum. Dann ist  $E = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  mit  $d_\infty$  vollständig.

*Beweis.* Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge in  $E$ . Dann ist für alle  $a \in K$  die Folge  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ . Daraus folgt, dass für alle  $a \in K$   $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Setze  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(a) := \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(a)$ . Also konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $f$ . Weil  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge bezüglich  $d_\infty$  ist, ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge. Also ist  $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$  stetig und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ , also bezüglich  $d_\infty$ .  $\square$

*Alternativer Beweis.*  $E = \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(K, \mathbb{R})$  mit  $d_\infty$ . Da  $\mathcal{B}(K, \mathbb{R})$  vollständig ist, reicht es aus zu zeigen, dass  $E$  abgeschlossen ist ( $\Rightarrow E$  vollständig). Sei dazu  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $E$ , die in  $\mathcal{B}(K, \mathbb{R})$  konvergiert, also  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{B}(K, \mathbb{R})$  bezüglich  $d_\infty$ . Dann ist aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergent, also  $f$  stetig und  $f \in E$ .  $\square$

**Satz 1.1.** *Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $Y$  vollständig. Sei  $A \subseteq X$  dicht und  $f : A \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig. Dann gibt es genau eine gleichmäßig stetige Fortsetzung  $\bar{f} : X \rightarrow Y$  von  $f$  auf  $X$  mit  $\bar{f}|_A = f$ .*

*Beweis.* (a) Sei  $x \in X$ . Wähle eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$ , die gegen  $x$  konvergiert. Setze  $\bar{f}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ . Da  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  konvergiert, ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge in  $X$ . Weil  $f$  gleichmäßig stetig ist, ist dann  $(f(x_n))_n$  Cauchyfolge in  $Y$ , welche wegen der Vollständigkeit von  $Y$  konvergiert.

(b) *Zeige:*  $\bar{f}$  ist unabhängig von der Wahl von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Sei dazu  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  weitere Folge in  $A$ , die in  $X$  gegen  $x$  konvergiert. Definiere die Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch  $z_{2n} := x_n$  und  $z_{2n+1} := y_n$ . Diese ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x)$ . Damit ist  $\bar{f}$  wohldefiniert.

(c) *Zeige:*  $\bar{f}$  ist gleichmäßig stetig. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta > 0$  mit  $d(f(x) - f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$  für alle  $x, y \in A$  mit  $d(x, y) < \delta$  (möglich, da  $f$  gleichmäßig stetig). Seien nun  $x, y \in X$ . Wähle  $x', y' \in A$  mit  $d(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$  und  $d(f(y), f(y')) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Dann ist  $d(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$  für  $d(x, y) < \delta$ . Also ist  $\bar{f}$  gleichmäßig stetig.

(d)  $\bar{f}$  ist eindeutig, da  $A \subseteq X$  dicht und  $\bar{f}|_A = f$  vorgegeben.

$\square$

*Beispiel.*  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es eine stetige Fortsetzung  $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$ .

Von zentraler Bedeutung in der Funktionalanalysis ist der folgende Satz:

**Satz 1.2 (Banachscher Fixpunktsatz, 1927).** *Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum, und  $f : X \rightarrow X$  eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt, d. h. es gibt genau ein  $a \in X$  mit  $f(a) = a$ .*

*Beweis.* Sei  $x \in X$  beliebig. Setze  $x_{n+1} := f(x_n)$ . Durch Induktion zeige

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Daraus folgt

$$d(x_n, x_m) \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (k^{n-1} + \dots + k^m) \cdot d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_1, x_0).$$

Also ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existiert.

*Zeige:*  $a$  ist Fixpunkt.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(a).$$

*Eindeutigkeit:* Seien  $a, b \in X$  mit  $f(a) = a$  und  $f(b) = b$ . Damit folgt  $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq k \cdot d(a, b) \Rightarrow d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$ .  $\square$

*Bemerkung.* Die Wahl von  $x_0$  geht nicht ein. Jede Folge  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a$ . Wir haben im Beweis nur die Konvergenz der geometrischen Reihe und die Vollständigkeit von  $X$  verwendet.

*Anwendung.* (1)  $f : B(1, 0) \rightarrow B(1, 0) : f(z) := \frac{1}{8}(z^2 + z + 1)$ . Zeige, dass  $f$  kontraktiv mit Fixpunkt  $a^2 + a + 1 = 8a$ , also  $a = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{4}{4}} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \in B(0, 1)$ , ist.

(2) Satz über inverse Funktionen.

(3) Satz von der Existenz gewöhnlicher Differentialgleichungen.

**Satz 1.3 (Satz von Baire).**  $(X, d)$  vollständiger Raum.  $A_n \subseteq X$  abgeschlossen,  $A_n^\circ = \emptyset$ . Dann gilt:  $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^\circ = \emptyset$ . Oder: Wenn  $U_n \subseteq X$  offen und dicht, dann ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq X$  dicht.

*Beweis.* Sei  $x \in X$  und  $B_0$  offene Kugel um  $x$ . Dann enthält  $B_0 \cap U_1$  den Abschluss einer offenen Kugel  $B_1$  mit Zentrum  $x_0$  und Radius  $\leq 1$ . Weiters enthält  $B_1 \cap U_2$  den Abschluß einer offenen Kugel  $B_2$  mit Zentrum  $x_1$  und Radius  $\leq \frac{1}{2}$ . Also gibt es für alle  $n$  eine offene Kugel  $B_n$  mit Zentrum  $x_n$  und Radius  $\leq \frac{1}{2^n}$  mit  $\overline{B_n} \subseteq B_{n-1} \cap U_n$ .

Aber:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge  $\Rightarrow \lim x_n =: a \in X$  und  $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$   
 $\xRightarrow{a \in B_0} B_0 \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  dicht.  $\square$

*Beispiel.*  $X = [0, 1]$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ . Setze  $A_x = \{x\}$  abgeschlossen. Dann ist  $X = \bigcup_{x \in X} A_x$ . Nach Satz von Baire gilt:  $X$  kann nicht als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen  $A_n$  geschrieben werden. Umgekehrt: Sei  $U_n = [0, 1] \setminus Z_n$  mit  $Z_n := \{a_0, \dots, a_n\}$  mit  $\{a_i\}$  Abzählung von  $\mathbb{Q}$ . Dann ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  dicht in  $[0, 1]$ .

*Anwendung.* (1) Es gibt eine stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die in keinem Punkt von  $[0, 1]$  differenzierbar ist.

*Beweis.* Bemerke zuerst, dass für  $f \in \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$  und  $x \in [0, 1]$  aus  $f$  differenzierbar in  $x$  folgt, dass  $\sup_{0 < t < 1} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| < \infty$ . Betrachte

$$K_n := \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R}) : \exists x \in [0, 1] \text{ mit } \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \leq n \right\}.$$

*Zeige:* Die  $K_n$  sind abgeschlossen. Sei dazu  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $K_n$  mit Grenzwert  $f := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i \in \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ . Nun zeige, dass  $f \in K_n$  ist. Wähle zu jedem  $f_i$  ein  $x_i \in [0, 1]$  mit  $\sup_{0 < t < 1} \left| \frac{f_i(x_i+t) - f_i(x_i)}{t} \right| \leq n$ . Nach dem Übergang zu einer Teilfolge sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  o. B. d. A. konvergent mit Grenzwert

$x := \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \in [0, 1]$ . Sei  $t \in ]0, 1[$  und  $\varepsilon > 0$ . Für große  $i$  gilt dann:

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x_i+t)| &\leq \frac{\varepsilon}{4}, \\ |f(y) - f_i(y)| &\leq \frac{\varepsilon}{4}, \\ |f(x_i) - f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &\leq |f(x+t) - f_i(x+t)| + |f_i(x+t) - f_i(x_i+t)| + \\ &\quad + |f_i(x_i+t) - f_i(x_i)| + |f_i(x_i) - f(x)| \leq (4\frac{\varepsilon}{4} + n)t = (n + \varepsilon)t \end{aligned}$$

Damit  $|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}| \leq n + \varepsilon \forall t \in ]0, 1[$  für  $\forall \varepsilon > 0$ , d. h.  $f \in K_n$ .

Wäre nun jedes  $f \in \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$  in mindestens einen Punkt  $x \in [0, 1]$  differenzierbar, dann wäre  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ . Dann muss mindestens ein  $K_n$  nichtleeres Inneres  $K_n^\circ \neq \emptyset$  haben (Satz von Baire), also eine abgeschlossene Kugel bezüglich  $d_\infty$  enthalten. Da die Polynomfunktionen nach dem Satz von Stone-Weierstraß dicht in  $\mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$  bezüglich  $d_\infty$  sind, liegt in dieser abgeschlossenen Kugel wieder eine Polynomfunktion  $g$  und eine genügend kleine Kugel um  $g$  wieder in  $K_n$ . In dieser Kugel gibt es aber differenzierbare Funktionen mit beliebig großem Anstieg in  $x$ , welche damit nicht in  $K_n$  liegen. Widerspruch!  $\square$

(2) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine punktweise konvergente Funktionenfolge in  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  mit Grenzwert  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist die Menge der Punkte  $x \in [a, b]$ , in denen  $f$  stetig ist, eine dichte Teilmenge von  $[a, b]$ . Gilt zusätzlich, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergiert, dann ist  $f$  stetig.

*Beweis.* Wir beweisen zuerst folgendes Lemma:

Ist  $I \subseteq [a, b]$  ein echtes Intervall und  $\varepsilon > 0$ , dann gibt es  $J \subseteq I$  echtes Intervall mit  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \in J$ .

*Beweis des Lemmas:* Setze  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Betrachte  $K_n = \{x \in I : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \delta \forall m \geq n\} \subseteq I$  abgeschlossen, da  $f_k$  stetig. Dann ist  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  (Übung). Nach dem Satz von Baire gibt es dann ein echtes abgeschlossenes Intervall  $I' \subseteq K_n$ . Sei nun  $x \in I'$  und  $m \geq n$ . Aus  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \delta$  folgt  $|f_n(x) - f(x)| \leq \delta$ .  $f_n$  ist stetig auf  $[a, b]$ , damit gleichmäßig stetig auf  $[a, b]$ , also gibt es  $J \subseteq I'$  abgeschlossenes echtes Intervall mit  $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \delta \forall x, y \in J$ . Zusammen:  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq 3\delta = \varepsilon \forall x, y \in J$ .

*Beweis des Satzes:* Wähle ein beliebiges echtes Intervall  $I \in [a, b]$ . Mit dem Lemma folgt dann, dass es  $J_n \subseteq I$ ,  $J_n = [a_n, b_n]$ ,  $a_n < a_{n+1}$ ,  $b_n < b_{n+1}$  gibt mit  $0 < a_n - b_n < \frac{1}{n}$  und  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n} \forall x, y \in J_n$ . Dann ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n = \{p\}$  eine einpunktige Menge mit  $p \in I$ . Zeige nun, dass  $f$  stetig ist. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $J_n$  mit  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Dann gilt für  $y \in J_n$ :  $|f(p) - f(y)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ , also  $f$  in  $p$  stetig.  $\square$

Wir erinnern uns nun an die folgende Charakterisierung kompakter Mengen in metrischen Räumen. Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $K \subseteq X$  eine Teilmenge von  $X$ , dann gilt:  $K$  ist kompakt  $\Leftrightarrow$  Jede Folge in  $K$  hat eine in  $K$  konvergente Teilfolge. Wenn  $X = \mathbb{R}^n$  oder  $X = \mathbb{C}^n$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist, dann gilt speziell:  $K$  ist kompakt  $\Leftrightarrow K$  abgeschlossen und beschränkt. In unendlich-dimensionalen Vektorräumen gilt die Implikation " $\Leftarrow$ " nicht. Die umgekehrte Richtung " $\Rightarrow$ " ist immer richtig.

**Satz 1.4 (Satz von Arzelá-Ascoli).** *Sei  $(X, d)$  ein kompakter, metrischer Raum,  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|$  (also ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der im Allgemeinen unendlich-dimensional ist). Sei  $F \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig, d. h. für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in F, \forall x, y \in X \text{ mit } d(x, y) < \delta.$$

*Dann ist  $F$  kompakt ( $\Leftrightarrow$  jede Funktionenfolge in  $F$  hat eine konvergente Teilfolge).*

*Beweis.* Werner [6], p. 68. Beweisidee: Man zeigt, dass  $X$  separabel ist, d. h. es gibt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dicht in  $X$ . Sei nun  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $F$ . *Zeige:*  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $F$ . Nach dem Übergang zu einer Teilfolge kann man annehmen, dass  $\forall i \in \mathbb{N}$  die Folge  $(f_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Mit der gleichgradigen Stetigkeit folgt dann die gleichmäßige Konvergenz von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (da  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dicht).  $\square$

*Bemerkung (Topologie + Lineare Algebra).* Um lineare Abbildungen zwischen  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen zu betrachten, ist zur Bildung unendlicher Linearkombinationen ein Konvergenzbegriff notwendig. Dazu versieht man die Vektorräume mit einer Topologie, wobei man folgende Fälle betrachten kann:

- (a) abstrakte Topologie (sehr allgemein, Rudin),
- (b) metrische Räume (Kugeln),
- (c) normierte Räume (Heuser, Werner),
- (d) Räume mit Skalarprodukt (Orthogonalität).

Sind die Räume zusätzlich vollständig, erhält man im Fall (c) Banachräume bzw. im Fall (d) Hilberträume.

**Definition.** Ein topologischer Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist ein Vektorraum  $V$  zusammen mit einer Topologie  $T$ , sodass Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V : (x, y) \mapsto x + y \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V : (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \end{aligned}$$

mit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , stetig sind. Meistens fordert man, dass die Topologie Hausdorffsch ist.

*Bemerkung.* (a) Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist  $m_\lambda : V \rightarrow V : x \mapsto \lambda x$  stetig. Für  $\lambda = -1$  ist dann  $x \mapsto -x$  stetig und damit  $(x, y) \mapsto x - y$  stetig.

(b) Aus  $U \subseteq V$  offen,  $a \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  folgt, dass  $a + U := \{a + x : x \in U\}$  und  $\lambda U := \{\lambda x : x \in U\}$  offen sind. Damit beschreiben die Nullumgebungen die Topologie.

(c)  $f : V \rightarrow W$  linear ist stetig  $\Leftrightarrow f$  stetig in 0.

(d)  $V, W$  topologische Vektorräume  $\Rightarrow V \times W$  topologischer Vektorraum.

*Beispiel.* (a)  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  mit euklidischer Topologie (einzige Topologie mit der  $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$  topologische Vektorräume sind).

(b) Vektorraum mit Metrik, z. B.  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  mit  $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ .

(c) Polynomring  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  mit Topologie der koeffizientenweisen Konvergenz ( $\cong \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)}$  mit komponentenweiser Konvergenz).

(d)  $\ell^p(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p < \infty\}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  
 $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ .

(e)  $\ell^\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkte Folge in } \mathbb{R}\}$ ,  $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ .

(f)  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-integrierbar} : \int_{\mathbb{R}} |f|^p < \infty\}$ ,  
 $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**Definition.** Sei  $V$   $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Eine *Seminorm* oder *Halbnorm* auf  $V$  ist eine Abbildung  $p : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit

- (1)  $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ ,
- (2)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

Eine Seminorm heißt *Norm* auf  $V$ , wenn gilt:

- (3)  $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

*Bemerkung.* Sei  $P$  eine Menge von Halbnormen auf einem Vektorraum  $X$ . Definiert man für  $\varepsilon > 0$  und  $F \subseteq P$ ,  $F$  endlich, die Menge

$$U_{F,\varepsilon} = \{x : p(x) < \varepsilon \forall p \in F\} \subseteq X,$$

so bilden die  $U_{F,\varepsilon}$  eine Nullumgebungsbasis (d. h. eine Menge von Nullumgebungen, sodass jede Umgebung von 0 Obermenge eines der Elemente ist) enthält ein Element der Nullumgebungsbasis von  $X$  und erzeugen damit eine Topologie auf  $X$ . Einen Vektorraum, dessen Topologie so beschrieben werden kann, nennt man *lokalkonvex*.

Literatur: Werner [6], Definition VIII, 1.3., p. 368.

*Beispiel.* (a)  $\|f\|_p$  auf  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist Halbnorm, aber keine Norm.

(b) Die Supremumsnorm auf  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  ist eine Norm.

(c) Sei  $V := \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Für  $K \subseteq \mathbb{R}$  kompakt definiere  $p_K(f) := \sup_{x \in K} |f(x)|$ . Dann ist  $p_K$  eine Halbnorm für jede kompakte Teilmenge  $K$ .

*Bemerkung.* (a) Ist  $p$  eine Seminorm auf  $V$ ,  $a \in V$  und  $r > 0$ , so heißt

$$B(a, r) := B_V(a, r) := \{x \in V : p(x - a) < r\} \subseteq V$$

die *offene Kugel* mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $r$ . Die Kugeln sind konvex (Dreiecksungleichung) und ausgewogen, d. h.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \leq 1$  ist  $\lambda B(0, r) \subseteq B(0, r)$ , analog für  $B(a, r)$ .

(b) Sei  $(p_i)_{i \in I}$  eine Familie von Seminormen auf  $V$ . Die  $(p_i)_{i \in I}$  heißen *stabil*, wenn für jedes endliche  $J \subseteq I$  das Supremum  $\sup_{j \in J} (p_j)$  wieder in der Familie liegt. Das ist der Fall, wenn z. B.  $I = \mathbb{N}$  und die  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine steigende Folge von Seminormen sind ( $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $p_i(f) = \sup_{x \in B(0, i)} |f(x)|$ ).

(c) Jede Norm auf einem Vektorraum  $V$  induziert eine Metrik  $d(x, y) := |x - y|$  und damit eine Topologie auf  $V$ . Es gilt:  $U \subseteq V$  ist offen  $\Leftrightarrow \forall a \in U \exists r > 0$  mit  $B(a, r) \subseteq U$ .

**Definition (normierter Vektorraum).** Ein *normierter* Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie durch eine gegebene Norm definiert wird. Schreibweise:  $V = (V, \|\cdot\|)$ . Ein topologischer Vektorraum heißt *normierbar*, wenn es eine Norm gibt, die die Topologie induziert.

*Bemerkung.* Ist  $V$  ein unendlich-dimensionaler topologischer Vektorraum, dessen Topologie durch eine Metrik oder Norm definiert ist, so ist die abgeschlossene Einheitskugel  $B_V(0, 1)$  nicht kompakt. D. h. es existieren in  $B_V(0, 1)$  Folgen ohne Häufungspunkt, also ohne konvergente Teilfolge. Als Beispiel dient uns die Folge  $(a^j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $a^j := (\delta_{jn})_{n \in \mathbb{N}}$  ( $j$ -ter Einheitsvektor) im  $\ell^1(\mathbb{R})$  mit der Norm  $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\| := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ . Dann gilt für  $k \neq m$ , dass  $|a_m - a_k| = 2$  ist, es gibt also keine Norm-konvergente Teilfolge.

**Satz 1.5 (Satz von Riesz).** *Sei  $V$  ein normierter Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

- (1)  $V$  ist endlich-dimensional.
- (2) Die abgeschlossene Einheitskugel  $\overline{B_V(0, 1)}$  in  $V$  ist kompakt.
- (3) Jede beschränkte Folge in  $V$  besitzt eine konvergente Teilfolge.
- (4) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von  $V$  ist kompakt.

*D. h. die Gültigkeit des Satzes von Bolzano-Weierstraß charakterisiert die endlich-dimensionalen Vektorräume. Allgemeiner gilt:  $V$  topologischer Vektorraum, hausdorffsch und lokal-kompakt  $\Rightarrow V$  endlich-dimensional.*

Literatur: Werner [6], p. 27, Heuser [4] p. 105, p. 625, Rudin [3] Thm. 1.22, p. 17.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (2): Analysis.

(2)  $\Rightarrow$  (3): In kompakten Mengen hat jede Folge eine kompakte Teilfolge.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Wir verwenden das

*Rieszsche Lemma:* Es sei  $V$  ein normierter Vektorraum,  $W \subseteq V$ ,  $W \neq V$ , ein echter abgeschlossener Untervektorraum und  $0 < \delta < 1$ . Dann existiert ein  $x \in V$ ,  $\|x\| = 1$  mit  $\|x - y\| \geq 1 - \delta \forall y \in W$ .

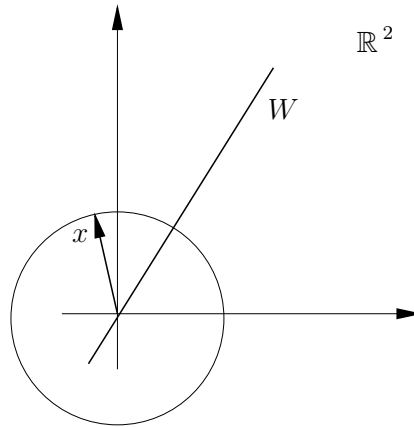


Abbildung 1.1: Rieszsches Lemma für  $V = \mathbb{R}^2$  und  $W \subseteq V$  Gerade.

*Beweis des Lemmas:* Wähle  $z \in V \setminus W$ .

Dann ist  $d := d(z, W) := \inf_{y \in W} d(z, y) > 0$  (da  $d(z, y)$  stetig und  $W$  abgeschlossen). Wähle  $w \in W$  mit  $d(z, w) = \|z - w\| < \frac{d}{1 - \delta}$  (möglich, weil  $\frac{d}{1 - \delta} > d$  ist). Setze  $x := \frac{z - w}{\|z - w\|} \in V$ . Sei nun  $y \in W$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \frac{z - w}{\|z - w\|} - y \right\| = \\ &= \frac{1}{\|z - w\|} \left\| \|z - w\| - \|z - w\| \|y\| \right\| = \\ &= \frac{1}{\|z - w\|} \left\| \|z - (w + \|z - w\|y)\| \right\| \geq \frac{1}{\|z - w\|} > 1 - \delta. \end{aligned}$$

*Anwendung des Lemmas:* Es gelte (3). Annahme:  $\dim V = \infty$ . Wähle  $x_1 \in V$  mit  $\|x_1\| = 1$  und setze  $W_1 := \langle x_1 \rangle \subsetneq V$  abgeschlossener Untervektorraum. Wähle  $x_2 \in V$  mit  $\|x_2\| = 1$  und  $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$  (Rieszsches Lemma mit  $\delta = \frac{1}{2}$ ). Setze  $W_2 := \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq V$  abgeschlossener Untervektorraum. Nach dem Rieszschen Lemma  $\exists x_3 \in V$ ,  $\|x_3\| = 1$ ,  $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ ,  $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ . Induktion: Konstruiere eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  mit  $\|x_n\| = 1$  und  $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \forall n \neq m$ . Dann ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und ohne konvergente Teilfolge. Widerspruch zu (3).  $\square$

**Satz 1.6.** *Sei  $V$  ein topologischer, hausdorffscher Vektorraum. Dann gilt:  $V$  ist genau dann normierbar, wenn  $0 \in V$  eine konvexe Umgebung  $U$  besitzt, die beschränkt ist, sodass für jede Nullumgebung  $W$  ein  $r > 0$  existiert mit  $rU \subseteq W$ . Auf ähnlicher Weise lassen sich auch metrisierbare topologische Vektorräume charakterisieren.*

*Beweis.* Rudin [3], Thm. 1.39, p. 28.  $\square$

**Satz 1.7.** *Jeder endlichdimensionale Untervektorraum eines topologischen Vektorraums ist homöomorph und isomorph zum  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  versehen mit der euklidischen Topologie, und zudem abgeschlossen.*

$V \subseteq W$  (topologischer VR) mit  $\dim V = n \Rightarrow \exists f : V \rightarrow \mathbb{C}^n / \mathbb{R}^n$  linearer Isomorphismus.

$f$  und  $f^{-1}$  stetig  $\rightarrow$  Homöomorphismus und  $V = \overline{V} \subseteq W$  abgeschlossen.

**Lemma 1.1.**  $V$  topologischer Vektorraum,  $f : V \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$  linear,  $f \neq 0$ . Äquivalent:

- (a)  $f$  stetig.
- (b)  $\ker(f)$  abgeschlossen.
- (c)  $\ker(f) \subseteq V$  nicht dicht.
- (d)  $f$  in geeigneter Nullumgebung von  $V$  beschränkt.
- (e)  $f$  ist in  $0$  stetig.

*Bemerkung.* In endlich dimensionalen Vektorräumen:

- jedes  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear ist stetig (Analysis).
- $\ker(f)$  ist im  $\mathbb{R}^n$  Hyperebene also abgeschlossen (Urbild von 0 ist abgeschlossen).
- $\ker(f) \subseteq \mathbb{R}^n$  nicht dicht.
- auf Nullumgebungen beschränkt?  
 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto ax + by$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$   
 beschränkt auf  $B(0, 1)$ . Sei  $(x, y) \in B(0, 1)$  dann gilt:

$$|ax + by| \leq |ax| + |by| = |a||x| + |b||y| \leq |a| + |b|$$

**Definition.**  $U \subseteq V$  Nullumgebung heißt *ausgewogen (sternförmig)*, wenn  $\forall \lambda \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| \leq 1$  ist  $\lambda U = \{\lambda a, a \in U\} \subseteq U$ .

*Bemerkung.* Ist  $U$  Nullumgebung, so ist  $\tilde{U} := \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda U$  ausgewogene Nullumgebung.

*Beweis von Lemma 1.1.* (a)  $\Rightarrow$  (e):  $f$  stetig  $\Rightarrow f$  in jedem Punkt von  $V$  stetig  $\Rightarrow f$  in 0 stetig.

(e)  $\Rightarrow$  (a): siehe Proseminar

(a)  $\Rightarrow$  (b):  $\ker(f) = f^{-1}(0)$  in  $\mathbb{R} / \mathbb{C}$  abgeschlossen.  $f^{-1}(0)$  abgeschlossen weil  $f$  stetig.

(b)  $\Rightarrow$  (c):  $Y \subseteq X$  dicht:  $\overline{Y} = X$ . Annahme  $\overline{\ker(f)} = V \Rightarrow$  (nach b)  $\overline{\ker(f)} = \ker(f) = V \Rightarrow f \equiv 0$ . Widerspruch zur Voraussetzung.

(c)  $\Rightarrow$  (d):  $\ker(f)$  nicht dicht  $\Rightarrow \exists V_0$  ausgewogene Nullumgebung und  $x \in V$  mit  $x + V_0 \subseteq V \setminus \ker(f) \Rightarrow f(V_0) \subseteq \mathbb{R} / \mathbb{C}$  ausgewogen  $\Rightarrow f(V_0)$  beschränkt oder  $f(V_0) \subseteq \mathbb{R} / \mathbb{C}$ . Aber:  $f(V_0) = \mathbb{R} / \mathbb{C} \Rightarrow \exists y \in V_0$  mit  $f(x) = -f(y) \Rightarrow x + y \in \ker(f) \cap (x + V_0)$

(d)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $U \subseteq V$  Nullumgebung mit  $f|_U$  beschränkt also  $\exists c > 0$  mit  $|f(x)| \leq c \quad \forall x \in U$ . Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{c}U \Rightarrow f$  stetig in 0  $\Rightarrow$  ( $V$  topologischer Vektorraum)  $f$  stetig auf  $V$ .  $\square$

*Beweis des Satzes.* Sei  $n = \dim V, V \subseteq W$ . Z.z.:  $V$  abgeschlossen und isomorph/ homöomorph zu  $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ .

(a)  $n = 0 : V = \{0\}$

(b)  $n = 1 \Rightarrow \exists f : \mathbb{C}^n \rightarrow V$  linearer Isomorphismus.  $f(a) = af(1) \Rightarrow f$  stetig (Skalarmultiplikation stetig). Weiters:  $\ker(f^{-1}) = 0 \Rightarrow$  (nach Lemma)  $f^{-1}$  stetig.  $\Rightarrow V$  lokalkompakter Untervektorraum,  $V$  hausdorffsch  $\Rightarrow V$  abgeschlossen.

Literatur: Rudin [3], Lemma 1.20.

(c)  $n > 1$ : Induktionsvoraussetzung: Ein  $(n - 1)$ -dimensionaler Untervektorraum eines topologischen Vektorraums ist homöomorph und isomorph zum  $\mathbb{R}^{n-1}$  bzw.  $\mathbb{C}^{n-1}$  und zudem abgeschlossen.

$f : \mathbb{C}^n \rightarrow V$  linearer Isomorphismus. Wähle  $e_i$  Standardbasis von  $\mathbb{C}^n$  und definiere  $v_i := f(e_i)$ . Die  $v_i$  bilden eine Basis von  $V$ . Da die Skalarmultiplikation und die Addition stetig sind gilt  $f(x) = f(\sum x_i e_i) = \sum x_i f(e_i)$  stetig. Weiters: da  $v_i$  Basis von  $V$  ist, gibt es für jedes  $y \in V$  eindeutige  $\lambda_i \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$  so, dass  $y = \sum \alpha_i v_i$ .

Definiere  $g_i : V \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C} : y \mapsto \alpha_i$  für  $i = 1 \dots n$  und zeige, dass  $g_i$  stetig ist:  $\ker(g_i) \leq V$  ist Untervektorraum der Dimension  $n-1$ . Seien weiters  $u = \sum \alpha_k v_k$  und  $w = \sum \beta_k v_k \in \ker(g_i)$ . Dann ist  $u + \gamma w = \sum \alpha_k v_k + \gamma \sum \beta_k v_k = \sum (\alpha_k + \gamma \beta_k) v_k \in \ker(g_i)$ , da  $g_i(u + \gamma w) = \alpha_i + \gamma \beta_i = 0$ . Die  $n - 1$  Vektoren  $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}$  bilden eine Basis von  $\ker(g_i)$ .

Also ist  $\ker(g_i)$   $(n - 1)$ -dimensional und somit gilt nach Induktionsvoraussetzung:  $\ker(g_i)$  abgeschlossen. Nach Lemma 1.1 folgt dass  $g_i$  stetig ist.

Betrachte  $g = f^{-1} = (g_1, \dots, g_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ .  $g$  ist stetig, also ist  $f$  ein linearer Homöomorphismus.

Literatur: Rudin [3], Theorem 1.21.

□

*Bemerkung.* Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ - oder  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

- **topologischer VR:** Topologie + Verknüpfungen (stetig).
- **metrischer VR:** Metrik.

- **normierter VR:** Norm.
- **Frèchet-Raum:** metrisierbar, lokalkonvex, vollständig.
- **Banach-Raum:** normiert, vollständig.
- **Hilbert-Raum:** Skalarprodukt, vollständig.

*Beispiel.* (1) **Endlichdimensionaler Vektorraum.** Ist  $V$  endlichdimensionaler Vektorraum, so induziert jede Wahl einer Basis  $e_i$  einen Vektorraum-Isomorphismus:  $V \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ .

Alle Normen sind äquivalent und induzieren die euklidische Topologie.

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  Absolutbetrag
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen VR sind stetig. Unterräume sind abgeschlossen.

*Bemerkung (Hölderungleichung).* Für  $1 \leq p \leq \infty$  sei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , so gilt für  $x, y \in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$  mit  $xy = (x_1y_1, \dots, x_ny_n)$ :

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

weitere  $\|x\|_\infty = \max_{i=1..n} \|x_i\|$ .

*Bemerkung (Minkowskiungleichung).*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

*Bemerkung.*  $\|\cdot\|_2$  wird durch Skalarprodukt  $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$  induziert via  $\|x\|_2 = |\langle x, x \rangle|^{\frac{1}{2}}$

(2) **Folgenräume**  $l^p(\mathbb{R})$

$$E = l^p(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^p < \infty \right\}$$

Raum der  $p$ -summierbare Folgen. Definiere folgende Norm für  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$\|f\| = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$E$  ist vollständig, also ein Banachraum.

Es sei weiters  $l^p(n)$  die Menge der Folgen, die ab  $x_{n+1}$  identisch Null sind. Diese können in  $l^p(\mathbb{R})$  eingebettet werden. Man kann Folgen  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit Treppenfunktionen identifizieren

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : f(t) = x_i \quad \text{für} \quad t \in [i, i+1[$$

-  $l^p$  und  $l^q$  sind zueinander dual, da die Hölderungleichung gilt.

*Beweis.* Werner [6], Satz II.2.3, p 59. Beweisidee: Sei  $x = (s_n)_n \in l^q, y = (t_n)_n \in l^p$ . Betrachte die Abbildung

$$T : l^q \rightarrow (l^p)', (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$$

und zeige, dass  $T$  ein isometrischer Isomorphismus ist.  $\square$

-  $p = 2$ :  $l^2(\mathbb{R})$  ist ein Hilbertraum, dessen Norm vom Skalarprodukt

$$\langle (s_i)_i, (t_i)_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \bar{t}_i$$

induziert wird. (Die Konvergenz der Reihe folgt aus der Hölderschen Ungleichung).

- Vektorräume, die auch Banachräume sind:

$$l^\infty(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \text{ beschränkt}\} \quad \text{mit} \quad \|x\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{N}} \{|x_i|\}$$

$$c(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \text{konvergent}\} \subseteq l^\infty(\mathbb{R})$$

$$c_0(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \text{Nullfolgen}\} \subseteq c(\mathbb{R})$$

(3) **Räume beschränkter Funktionen.** Sei  $T$  beliebige Menge,

$$E = \mathcal{B}(T, \mathbb{R}/\mathbb{C}) = \{f : T \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C} \mid f \text{ beschränkt}\}$$

also  $\exists c > 0$  mit  $|f(x)| \leq c \quad \forall x \in T$ .

Norm:  $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in T} |f(x)|$  (existiert in  $\mathbb{R}$  und ist endlich). Beispiele:

$$\begin{aligned} l^\infty(\mathbb{R}) &= \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\} \\ \mathcal{B}([a, b]) &= \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\} \\ \mathcal{C}([a, b]) &= \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} \end{aligned}$$

Es gilt  $\mathcal{C}([a, b]) \subseteq \mathcal{B}([a, b])$ .

*Bemerkung.* Für jedes  $T$  ist  $\mathcal{B}(T, \mathbb{R})$  mit  $p$ -Norm vollständig also Banachraum, denn  $\mathbb{R}/\mathbb{C}$  vollständig und Cauchyfolge von beschränkten Funktionen:  $f : T \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$  konvergiert in Supremumsnorm gegen beschränkte Funktion (Analysis).

Auch  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  ist ein Banachraum, da Limes von gleichmäßig konvergen-ten Funktionenfolgen wieder stetig ist (Analysis). Alternativ:  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$  abgeschlossen.

*Bemerkung.*  $\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  ist bezüglich Supremumsnorm nicht abgeschlossen und nicht vollständig (Proseminar).

Beispiel:  $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$  mit Cauchyfolgen:

$$f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

mit punktwisem Limes:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x|$$

nicht differenzierbar.

Alternative Normen:

$$\begin{aligned} \|f\| &:= \sum_{i=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x)| \\ \|f\| &:= \max_{i=0, \dots, k} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x)| \end{aligned}$$

Mit einer dieser Normen ist  $\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$  Banachraum.

(4) **Räume von Funktionen auf offenen Mengen.** Problem: wie kann man die Größe einer Funktion  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, vernünftig messen? ( $f$  nicht notwendigerweise beschränkt!)

Beispiel:

$$f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Idee: betrachte kompakte Teilmengen  $K \subseteq U$  und  $f|_K$ , am besten Folge  $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq U = \bigcup K_i$  Ausschöpfung von  $U$  durch Kompakta.

Beispiel:

$$U = ]0, 1[ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{i+1}, 1 - \frac{1}{i+1} \right]$$

*Bemerkung.* Jede offene Teilmenge von  $U \subseteq \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$  besitzt eine abzählbare Ausschöpfung durch Kompakta  $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq U$ ,  $K_i$  kompakt mit  $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ . Sogar  $K_1 \subseteq K_2^\circ \subseteq K_2 \subseteq K_3^\circ \dots$ :

$\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  dicht und abzählbar etwa:  $\mathbb{Q}^n \cap U = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Wähle für jedes  $a_i$  eine Kugel  $B_i$  mit Mittelpunkt  $a_i$  und  $\overline{B_i} \subseteq U$  (geht, weil  $U$  offen). Setze  $K_j := \bigcup_{i=1}^j \overline{B_i}$  kompakt  $K_j \subseteq K_{j+1}$  und  $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$

Auf  $E = \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  definiere separierende, aufsteigender Folge von Seminormen durch

$$p_n(f) := \sup_{K_n} |f|.$$

Ist  $f \not\equiv 0$  so existiert  $i \in \mathbb{N}$  mit  $p_i(f) < \infty$ .

Beispiel:  $U = ]0, 1[ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i} \right]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in ]0, 0.99999[ \\ x - 0.99999 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wähle dazu Metrik

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}$$

die dieselbe Topologie definiert.

Behauptung: Durch diese Metrik (und der dadurch definierten Norm) wird  $E = \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  zu einem vollständigen metrisierbaren Vektorraum, lokal-konvex, also Fréchetraum.

*Beweis.* Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge in  $E \Rightarrow p_n(f_k - f_l) \rightarrow 0$  für jedes  $n$  wenn  $i, j \rightarrow \infty \Rightarrow (f_k)$  konvergiert gleichmäßig auf  $K_n \Rightarrow \lim f_k|_{K_n}$  stetig  $\Rightarrow f =$

$\lim f_k$  stetig auf  $U$  und  $d(f, f_k) \rightarrow 0$ . Damit  $E$  vollständig. □

Behauptung:  $E$  ist kein Banachraum, da nicht normierbar.

*Beweis.* Nach Lemma 1.1 ausreichend:  $0$  besitzt keine beschränkte Umgebung. Man kann zeigen:  $B \subseteq E$  ist beschränkt  $\Leftrightarrow \exists c_n > 0$  mit  $|f(x)| \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall f \in B, \quad \forall x \in K_n$ .

Beweis dafür: Rudin [3] Funktionalanalysis, Thm. 1.37 (b), p 26.

Aber:  $B_n(0, r)$  Umgebungsbasis der  $0$ , und kein  $B_n(0, r)$  ist beschränkt, da stets  $f \in B_n(0, r)$  existieren mit  $p_{n+1}(f) = \sup_{K_{n+1}} |f|$  beliebig groß. □

Analoges gilt für  $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}), \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  bzw.  $\mathcal{C}(U, \mathbb{C}^n)$ .

$U \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $E = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  beliebig oft stetig differenzierbare Funktionen.

Bezeichne für  $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Setze für  $n \in \mathbb{N}$  und  $f \in E$ :

$$p_n(f) := \sup\{|D^\alpha f_n|, \quad x \in K_n, |\alpha| \leq n\}.$$

Dadurch werden separierende aufsteigende Seminormen auf  $E$  definiert.  $E$  ist also lokal konvexer metrisierbarer topologischer Vektorraum (Übung).

Behauptung:  $E$  ist Fréchetraum.

*Beweis.* Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge in  $E$ , d.h.  $\forall n \in \mathbb{N}$  geht

$$P_n(f_k - f_l) \rightarrow 0 \quad \text{für } k, l \rightarrow \infty.$$

$$\Rightarrow |\partial^\alpha f_i - \partial^\alpha f_j| < \frac{1}{n} \quad \text{auf } K_n.$$

Für  $i, j$  genügend groß  $\Rightarrow$  auf jedem Kompaktum konvergiert  $(\partial^\alpha f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  für alle  $\alpha$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $g_\alpha \Rightarrow$  (Analysis)

$$g_\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \partial^\alpha f_k = \partial^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \partial^\alpha g_0$$

$\Rightarrow f_k \rightarrow g_0$  in  $E$ . □

(5) **Lebesgueintegrierbare Funktionen.** Betrachte für  $p \geq 1$

$$\mathcal{L}^p([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Lebesgue-integrierbar bezüglich } \|\cdot\|_p\}$$

Also für  $f \in \mathcal{L}^p([a, b], \mathbb{R})$  gilt:  $f$  messbar und  $\int_a^b |f|^p < \infty$ .

Halbnorm

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\mathcal{L}^p$  ist damit normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.  $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

$\mathcal{L}^p$  ist damit vollständig.

*Beweis.* Übung. □

Setze

$$f \sim g \Leftrightarrow f \equiv g \quad \text{bis auf Nullmengen}$$

$$L^p([a, b], \mathbb{R}) := \mathcal{L}^p([a, b], \mathbb{R}) / \sim \quad \text{mit Norm } \|f\|_p$$

$L^p$  ist damit Banachraum.

$p = 2$ : Norm wird durch Skalarprodukt induziert:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f \bar{g}$$

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$$

$L^2([a, b], \mathbb{R})$  ist Hilbertraum (Orthogonalitätsbegriff!)

(6)  **$p$ -adische Zahlen  $\mathbb{Q}_p$ .**  $\mathbb{R}$  erhält man durch Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$ , wobei  $\mathbb{Q}$  mit  $|\cdot|$ -Absolutbetrag topologisiert wird.  $|\cdot|$  ist Norm auf  $\mathbb{Q}$ . Es gibt für jedes  $p \in \mathbb{N}$  Primzahl eine weitere Norm auf  $\mathbb{Q}$ . Setze

$$\text{ord}_p x := \max\{k \mid p^k \text{ teilt } x\} \quad \text{für } x \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ord}_p \frac{x}{y} := \text{ord}_p(x) - \text{ord}_p(y) \quad \text{für } x \in \mathbb{Q}$$

Definiere für  $z \in \mathbb{Q}$

$$\|z\|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\text{ord}_p z}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Norm auf  $\mathbb{Q}$ . Durch Vervollständigung via Cauchyfolgen erhalte  $\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$ , den Körper der  $p$ -adischen Zahlen.  $\mathbb{Q}_p$  vollständig, also Banachraum

(arithmetisches Analogon zu  $\mathbb{R}$ ). Die  $p$ -adische Analysis liefert viele (schwere) Beweise für die Zahlentheorie.

$$\mathbb{Q}_p = \{\text{Laurentreihen in } p\} = \left\{ \sum_{k \geq k_0} a_k p^k, k_0 \in \mathbb{N}, a_k \in \{0, \dots, p-1\} \right\}$$

*Beispiel.*  $p = 7$ :  $\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 1 + p + p^2 + 4p^6 + 3p^{15}$  konvergiert bez.  $\| \cdot \|_p$ .  
Dreiecksungleichung:

$$\|x + y\|_p \leq \max(\|x\|_p, \|y\|_p)$$

mit Gleichheit wenn  $\|x\|_p \neq \|y\|_p$ . Jedes Dreieck in  $\mathbb{Q}_p$  ist gleichschenkelig. Weiters: alle offenen Kreisscheiben sind entweder disjunkt oder ineinander enthalten.

(7)  $\mathbb{K}[[x]] = \{\text{formale Potenzreihen } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\}$ .  $\mathbb{K}$  Körper (meistens  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ )

$\mathbb{K}[[x]]$  ist  $\infty$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, T = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  nahe, wenn  $a_k = b_k$  für alle  $k = 0, 1, \dots, k_0$  für ein  $k_0$  sehr groß.

Also  $S - T = (a_{k_0+1} - b_{k_0+1})x^{k_0+1} +$  weitere Glieder, d.h.  $\text{Untergrad}(S - T) = \text{ord}(S - T) = k_0 + 1$ .

Umgebungsbasis der Null:

$$\begin{aligned} m_k &= \{S \in \mathbb{K}[[x]], \text{ord}(S) \geq k\} \\ m_0 &= \mathbb{K}[[x]] \\ m_1 &= \text{Potenzreihen ohne konstanten Term} \\ m_2 &= \text{Potenzreihen ohne linearen Term} \\ &\dots \end{aligned}$$

Das sind Nullumgebungen in  $\mathbb{K}[[x]]$ . Umgebungen von  $S \in \mathbb{K}[[x]]$ :  $S + m_k$ .  
Definiert Topologie auf  $\mathbb{K}[[x]]$ , die  $m$ -adische Topologie.

Addition:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}[[x]] \times \mathbb{K}[[x]] &\rightarrow \mathbb{K}[[x]] : (S, T) \mapsto S + T \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[[x]] &\rightarrow \mathbb{K}[[x]] : (\alpha, S) \mapsto \alpha \cdot S \end{aligned}$$

stetig, also wird der Vektorraum der formalen Potenzreihen zum topologischen  $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ -Vektorraum (sogar topologische Algebra, d.h. auch Multiplikation ist stetig), jedoch nicht normierbar.

andere Interpretation:  $\mathbb{R}[[x]] = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\text{Folgen in } \mathbb{R}\}$

$(a_k)_k$  nahe  $(b_k)_k$ , wenn  $a_k = b_k$  für  $0 \leq k \leq k_0$ ,  $k_0$  groß. Es gilt: Ist  $S \in \mathbb{K}[[x]]$  und  $T \in m_1$ , so kann man  $T$  in  $S$  einsetzen,  $(S \circ T)(x) = S(T(x))$  wohldefiniert (siehe Proseminar).

(8) **Konvergente Potenzreihen über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .**

$$\mathbb{R}\{x\} := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{R}, \exists r > 0 \text{ mit } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty \right\}$$

Beispiele:

$e^x$	Konvergenzradius = $\infty$
$\sum x^k$	Konvergenzradius = 1
$\sum (2x)^k$	Konvergenzradius = $\frac{1}{2}$
$\sum k! x^k$	Konvergenzradius = 0    formale Potenzreihe

Betrachte für  $r > 0$  die Potenzreihen mit Konvergenzradius  $\leq r$ , also

$$O(r) := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}\{x\}, \text{ mit } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty \right\}$$

$f$  definiert Funktion  $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbb{C}^{\infty}$  oder holomorph.  $f(x) \in O(r)$ .

Man kann zeigen:  $O(r)$  wird mit  $\|f\|_n = \sum |a_k| r^k$  zu vollständigem, normiertem  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, also Banachraum.

Es gilt per Definition:

$$\mathbb{R}\{x\} = \bigcup_{r>0} O(r)$$

Topologischer Vektorraum, der durch Banachräume ausgeschöpft wird.

Klar:  $0 \leq r' \leq r$  dann  $O(r) \subseteq O(r')$

*Bemerkung.* Analog für  $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Finde aufsteigende Folge von Kompakta  $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots$  mit  $\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i = U$  und betrachte  $\mathcal{C}(K_i, \mathbb{R})$  als Ausschöpfung von  $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  durch Banachräume.

# Kapitel 2

## Stetige lineare Abbildungen

*Erinnerung.* Seien  $V, W$  endlichdimensionale Vektorräume mit Basen  $(v_1, \dots, v_n)$  bzw.  $(w_1, \dots, w_m)$ , so wird jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  durch eine Matrix  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  beschrieben.

*Analogie.* Seien  $V, W$  unendlichdimensionale Vektorräume mit Basen  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$  und  $f : V \rightarrow W$  linear. *Frage.* Kann man dann  $f$  durch eine (unendliche) Matrix darstellen?

*Beispiel.* Betrachte die Abbildung  $f : \ell^1 \rightarrow \ell^1, (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $b_i = \sum_{k=0}^{\infty} c_{ik} a_k \quad (\forall i \in \mathbb{N})$ .

*Fazit.* Wir benötigen einen Konvergenzbegriff in den auftauchenden Vektorräumen, also eine Topologie.

*Beispiel.* Die Abbildung  $f : \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), f(g) = g'$  ist  $\mathbb{R}$ -linear, aber  $f : \ell^1 \rightarrow \ell^1, f((a_k)_k) = (ka_k)_k$  ist nicht einmal wohldefiniert (betrachte:  $\frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{n}$ ).

In diesem Kapitel seien alle Vektorräume normiert (Manche Sätze sind auch in topologischen Vektorräumen gültig).

**Satz 2.1.** Sei  $f : V \rightarrow W$  linear,  $f \neq 0$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist stetig
2.  $f$  ist stetig in 0
3.  $f$  ist beschränkt auf der Einheitskugel in  $V$
4.  $f$  ist beschränkt in einer geeigneten Nullumgebung in  $V$
5.  $\exists c > 0$  sodass  $\forall x \in V : \|f(x)\| \leq c\|x\|$
6.  $\ker(f)$  ist abgeschlossen in  $V$  (nur für  $W = \mathbb{R}$  oder  $W = \mathbb{C}$ )
7.  $\ker(f)$  ist nicht dicht in  $V$  (nur für  $W = \mathbb{R}$  oder  $W = \mathbb{C}$ )

*Beweis.* siehe Kapitel 1. □

*Bemerkung.* (5) $\Rightarrow$ (3):  $x \in B_1(0)$ , also  $\|x\| \leq 1$ , damit ist  $\|f(x)\| \leq c\|x\| \leq c$  beschränkt auf  $B_1(0)$ .

(5) ... linear beschränktes Wachstum.

(3) $\Rightarrow$ (5): Es ist  $\|f(x)\| \leq c$  auf  $B_1(0)$ . Sei  $y \in V$  mit  $\|y\| = d \Rightarrow \frac{y}{\|y\|} = \frac{y}{d} \in B_1(0) \Rightarrow f(\frac{y}{d}) \leq c$ . Da  $f$  linear ist, folgt daraus  $\|f(y)\| \leq c\|y\|$ .

**Definition (Abbildungsnorm).** Sei  $f : V \rightarrow W$  linear und stetig. Dann heißt  $\|f\| := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \|f(x)\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in V\}$  die *Abbildungsnorm* von  $f$ .

*Beispiel.* Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f$  linear, gegeben durch eine Diagonalmatrix  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Dann ist  $\|f\| = \max_{i=1 \dots n} |\lambda_i|$ .

**Satz 2.2.** (a) Sei  $f : V \rightarrow W$  linear und stetig, dann gilt:

$$\|f\| = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \|f(x)\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in V\} = \sup_{x \in B_1(0)} \{ \|f(x)\| \} = \sup_{x \in V, x \neq 0} \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \right\}.$$

(b) Es gilt:  $\|f(x)\|_W \leq \|f\|_{L(V,W)} \|x\|_V$ .

(c)  $L(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ linear und stetig}\}$  wird mit der Abbildungsnorm  $\|\cdot\|$  zu einem normierten Vektorraum.

(d) Ist  $W$  ein Banachraum, so ist  $L(V, W)$  ein Banachraum.

**Definition.** Die von der Abbildungsnorm induzierte Topologie auf  $L(V, W)$  heißt die *starke Topologie* oder *Normtopologie* auf  $L(V, W)$  (im Gegensatz zur schwachen Topologie).

*Beweis des Satzes.* Da  $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \|f(\frac{x}{\|x\|})\|$  ist, ist  $\|f\| = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq c, (\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ .

Zeige, dass durch  $\|f\|$  eine Norm definiert ist: Seien  $f, g \in L(V, W)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:  $\|f\| = 0 \Rightarrow \sup_{x \in V, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow f = 0$ ; es ist  $\|\lambda f\| = \sup_{x \in V, x \neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|}{\|x\|} = \lambda \|f\|$ , und  $\|f + g\| = \sup_{x \in V, x \neq 0} \frac{\|f(x) + g(x)\|}{\|x\|} \leq \|f\| + \|g\|$ . Weiters ist  $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ .  $\square$

**Satz 2.3.** Die Komposition  $L(V, W) \times L(W, Z) \rightarrow L(V, Z)$ ,  $(f, g) \mapsto g \circ f$  ist stetig und es gilt  $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$ .

*Beweis.* siehe PS;  $\square$

**Satz 2.4.** (a) Seien  $V_1, \dots, V_k$  normierte Vektorräume und  $f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$   $k$ -multilinear. Dann ist  $f$  stetig  $\Leftrightarrow$

$$\exists c > 0 \text{ mit } \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \dots \|x_n\|.$$

(b)  $L(V_1 \times \dots \times V_k, W) = \{f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W \mid f \text{ } k\text{-linear und stetig}\}$  wird mit

$$\|f\| = \sup_{x_i \in V_i, x_i \neq 0} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \dots \|x_n\|}$$

zu einem normierten Vektorraum. Ist  $W$  ein Banachraum, so auch  $L(V_1 \times \dots \times V_k, W)$

*Beweis.* Nachrechnen (analog zum linearen Fall).  $\square$

*Beispiel.* Sei  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear, so existiert eine Matrix  $A \in M_{nm}(\mathbb{R})$  mit  $f(v, w) = v \cdot A \cdot w^T$ .

*Bemerkung.* Sei  $V_1 = \dots = V_n = V$  und  $\Delta = \{(v, \dots, v) | v \in V\}$  die Diagonale. Wenn  $f : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -linear ist, so ist  $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  eine homogene polynomiale Abbildung vom Grad  $k$ .

**Definition (Isomorphismus).** Seien  $V, W$  topologische bzw. normierte Vektorräume. Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt (topologischer) Isomorphismus  $\Leftrightarrow f$  ist linear (also  $f$  Vektorraum-Isomorphismus) und  $f$  und  $f^{-1}$  sind stetig (also  $f$  insbesondere ein Homöomorphismus).

Seien  $V, W$  normierte Vektorräume: Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt normerhaltend oder Isometrie:  $\Leftrightarrow \forall x \in V$  ist  $\|f(x)\| = \|x\|$ .

Ist  $f : V \rightarrow W$  eine bijektive Isometrie, so heißt  $f$  ein isometrischer Isomorphismus.

*Bemerkung.* Sei  $f : V \rightarrow W$  linear und bijektiv, dann ist  $g := f^{-1}$  linear und es gilt:  $g$  ist stetig  $\Leftrightarrow \exists c > 0 : \forall v \in V$  mit  $\|f(v)\| \geq c\|v\|$ .

**Definition (direkte Untervektorräume).** Ein Untervektorraum  $U$  von  $V$  heißt direkt:  $\Leftrightarrow U \subseteq V$  abgeschlossen ist und es existiert ein Untervektorraum  $W \subseteq V$  abgeschlossen mit  $V = U \oplus W$ .

*Beispiel.*  $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

*Bemerkung.*  $V = U \oplus W$  direkte topologische Summe  $\Leftrightarrow U, W \subseteq V$  abgeschlossen,  $V = U \oplus W$  als Vektorraum und die Projektionen  $\pi_U : V \rightarrow U$ ,  $\pi_W : V \rightarrow W$  sind stetig  $\Leftrightarrow \exists \pi : V \rightarrow U$  linear und stetig mit  $\pi^2 = \pi$  ( $W = \ker(\pi)$ ).

*Beispiel.* (a) Sei  $V$  ein topologischer Vektorraum, dann gilt  $L(V, \mathbb{R}^2) = L(V, \mathbb{R}) \times L(V, \mathbb{R})$ . Eine lineare Abbildung in einen endlich dimensional Vektorraum ist stetig, wenn sie in jeder Komponente stetig ist. Allgemeiner:  $L(V, W \times U) \cong L(V, W) \times L(V, U)$ ;

(b) Sei  $f : V \rightarrow W$  stetig und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, dann ist  $g := f|_U : U \rightarrow W$  stetig und  $\|g\| \leq \|f\|$ .

(c) Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum,  $W$  beliebig und  $f : V \rightarrow W$  linear. Dann ist  $f$  stetig. Speziell: Jede lineare Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow W$  ist stetig, aber nicht jede lineare Abbildung  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ .

(d) Sei  $f : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ ,  $f((x_i)_i) := (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots)$ . Dann ist  $f$  linear und stetig,  $\|f\| = 1$ ,  $f$  ist nicht surjektiv,  $\text{im}(f) \subseteq c_0 = \{\text{Nullfolgen}\}$ ,  $f$  ist injektiv und  $f^{-1} : \text{im}(f) \rightarrow \ell^\infty$  ist nicht stetig.

(e) Die Abbildung  $f : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(g) := \int_a^b g(x) dx$  ist linear und stetig mit  $\|f\| = b - a$ .

(f) Die Abbildung  $f : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ ,  $f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist wohldefiniert, linear und stetig mit  $\|f\| = 2$ .

(g) Sei  $V = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ konvergent in } \mathbb{C}\} = c(\mathbb{C})$ , dann ist die Abbildung  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$  wohldefiniert, linear und stetig mit  $\|f\| = 1$ .

(h) Fredholmscher Integraloperator: Betrachte die Abbildung

$$f : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad f(g)(x) := \int_a^b k(x, y)g(y)dy$$

wobei der Kern  $k(x, y) \in \mathcal{C}([a, b]^2, \mathbb{R})$  ist. Dann ist  $f$  linear und wohldefiniert. *Behauptung.*  $f$  ist stetig mit Norm

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |k(x, y)| dy.$$

*Beweis.*  $\leq$ : klar, da nur  $g$  mit  $|g(t)| \leq 1$  für die Normabschätzung betrachtet werden.

$\geq$ : Finde Folgen von  $g$ s mit  $\|g\| \leq 1$ , sodass  $\|f(g)\|_\infty \rightarrow \|f\|_{op}$ .

(i) Betrachte  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = Ax$ . Dann ist

$$\|f\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \quad \text{die grösste Zeilenbetragssumme,}$$

$$\|f\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \quad \text{die grösste Spaltenbetragssumme und}$$

$$\|f\|_2 \leq \left( \sum_{i,j=1}^n |A_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(j) Betrachte die Abbildung

$$f := \frac{d}{dx} : \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad f(g) := \frac{dg}{dx}.$$

Dann ist  $f$  linear, wohldefiniert aber nicht stetig, wenn auf beiden Räumen die  $\infty$ -Norm  $\|\cdot\|_\infty$  verwendet wird.  $f$  wird stetig, wenn auf  $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$  eine feinere Topologie betrachtet wird, etwa die durch folgende Norm induzierte:

$$\|g\|_{\mathcal{C}^1} := \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |g'(x)|.$$

(k) Betrachte  $O(r) := \{f \in \mathbb{R}\{x\} \mid \text{Konvergenzradius}(f) \geq r\} = \{f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k \mid \|f\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k < \infty\}$ . Für  $r' < r$  ist  $O(r) \subseteq O(r')$  ein nicht abgeschlossener Untervektorraum. Betrachte den Isomorphismus

$$\alpha : O(r) \rightarrow O(r'), \quad \alpha(f(x)) := f\left(\frac{r'}{r}x\right).$$

Dann ist  $\|f\|_r < \infty \Leftrightarrow \|\alpha(f)\|_{r'} < \infty$ .

(l) Es ist  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \not\cong L^q(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $\ell^p(\mathbb{R}) \not\cong \ell^q(\mathbb{R})$  für  $p \neq q$ .

(m) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $a \in U$ ,  $V = \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$  und  $V_a := \{f \in V \mid f(a) = 0\}$ .  $V_a$  ist ein abgeschlossener Untervektorraum von  $V$ , denn die Abbildung

$$\varepsilon_a : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon_a(f) := f(a)$$

ist stetig und  $V_a = \varepsilon_a^{-1}(0)$ . Definiere eine Projektion:

$$\pi_a : V \rightarrow V_a, \quad \pi_a(f) := f - f(a).$$

Dann ist  $\pi_a$  linear und stetig und es gilt  $\pi_a^2 = \pi_a$ ,  $\ker(\pi_a) = \{\text{konstante Abbildungen}\}$ . Daher ist  $V \cong V_a \oplus \mathbb{R}$  (Das ist sogar eine direkte topologische Summe, d.h. die Topologie auf  $V$  ist die Produkttopologie auf  $V_a \times \mathbb{R}$ ).

(n) Betrachte  $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  mit den Seminormen

$$p_{K,n}(f) := \sup_{x \in K} \sup_{\alpha \leq n} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) \right|.$$

Dann ist  $U := \{f \in V \mid \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^p\}$  ein abgeschlossener Untervektorraum von  $V$ .

**Satz 2.5.** Sei  $V$  ein normierter Vektorraum und  $W$  ein Banachraum. Dann ist  $L(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ linear und stetig}\}$  mit der Abbildungsnorm wieder ein Banachraum.

*Beweis.* Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L(V, W)$ . Der Einsetzungshomomorphismus  $\varepsilon_a : L(V, W) \rightarrow W$ ,  $\varepsilon_a(f) = f(a)$  ist stetig  $\forall a \in V$ . Daher ist  $\forall a \in V (f_n(a))_n$  eine CF in  $W$ . Weil  $W$  vollständig ist, konvergiert  $(f_n(a))_n$  in  $W$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) =: f(a)$ . Damit erhält man eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$ ,  $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ . Zeige noch:  $f$  ist stetig und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$  in  $L(V, W)$ .

Sei  $\delta > 0$ . Dann  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|f_n - f_m\| < \delta \quad \forall m, n \geq n_0$ . Damit ist  $\forall a \in V \|f_n(a) - f_m(a)\| \leq \delta \|a\|$ . Fixiere in der Ungleichung  $m$  und lasse  $n$  gegen  $\infty$  gehen: Wegen der Stetigkeit der Norm:  $\forall m \geq n_0, \forall a \in V : \|f(a) - f_m(a)\| \leq \delta \|a\|$ . Also ist  $(f - f_m)$  stetig und daher auch  $f$  stetig.

Weiters:  $\forall \delta > 0 \exists n_0$  mit  $\|f(a) - f_m(a)\| \leq \delta \|a\| \quad \forall a \in V, \forall m \geq n_0$ . Daraus folgt für  $a \neq 0$  und  $m \geq n_0$ :  $\frac{\|f - f_m(a)\|}{\|a\|} \leq \delta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ .  $\square$

*Bemerkung.* Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L(V, W)$  und  $f : V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:

- (a)  $(f_n)$  konvergiert punktweise gegen  $f \Leftrightarrow \forall a \in V$  konvergiert  $(f_n(a))$  gegen  $f(a)$  in  $W$ .
- (b)  $(f_n)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f \Leftrightarrow$  Die Folge der Normen  $\|f_n - f\|$  konvergiert gegen 0.

Speziell: Sei für  $k \in \mathbb{N}$   $g_k$  linear und stetig und  $f_n = \sum_{k=0}^n g_k$  die  $n$ -te Partialsumme, dann sagt man entsprechend die Reihe konvergiert punktweise bzw. gleichmäßig.

**Satz 2.6 (Neumann-Reihe).** Sei  $V$  ein Banachraum und  $g : V \rightarrow V$  stetig und linear. Weiter sei  $f := id_V - g : V \rightarrow V$ , dann gilt:

- (a) Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} g^k$  (die geometrische Reihe in  $g$  bezüglich

der Komposition) gleichmäßig, so ist  $f$  invertierbar mit stetigem Inversen  $f^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} g^k$ .

(b) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} g^k$  konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g^k\|^{\frac{1}{k}} < 1$ , insbesondere wenn  $\|g\| < 1$  ist.

(c) Ist  $\|g\| < 1$  so gilt  $\|f^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|g\|}$ .

*Bemerkung.* Sei  $V = \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  linear, das heißt  $g(x) = c \cdot x$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $g^k(x) = c^k x$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} g^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^k x$ . Wir wissen:  $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$  konvergiert für  $|c| < 1$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c}$ . Weiter ist  $(id_V - g)(x) = x - cx = (1-c)x$ , daher ist  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-c}x$ .

**Lemma 2.1.** Sei  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_i \geq 0$ . Es gelte  $a_{i+j} \leq a_i a_j$ . Dann konvergiert die Folge  $(\sqrt[i]{a_i})_{i \in \mathbb{N}}$  gegen  $\inf_{i \in \mathbb{N}} (\sqrt[i]{a_i})$ .

*Beweis des Satzes.*  $L := L(V, V)$  ist ein Banachraum, weil  $V$  ein Banachraum ist. Wir verwenden das Wurzelkriterium: Ist  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem Banachraum, so konvergiert  $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ , wenn  $\limsup_{i \rightarrow \infty} (\|x_i\|)^{\frac{1}{i}} < 1$  und divergiert, wenn  $\limsup_{i \rightarrow \infty} (\|x_i\|)^{\frac{1}{i}} > 1$ .

Speziell hier: Sei  $g \in L$  und  $(g^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L$ . Wir wissen:  $\|g^{k+l}\| = \|g^k \circ g^l\| \leq \|g^k\| \|g^l\| \quad \forall k, l \in \mathbb{N}$ . Insbesondere:  $\|g^k\| \leq \|g\|^k$ .

*Lemma.* Der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g^k\|^{\frac{1}{k}}$  existiert und ist gleich dem  $\inf_k \|g^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \|g\|$ . Also ist auch  $\limsup_k \|g^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g^k\|^{\frac{1}{k}}$ .

Sei etwa  $\lim_k \|g^k\|^{\frac{1}{k}} < 1$ . Dann konvergiert nach dem Vorigen die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} g^k$  gleichmäßig in  $L$ . Ist umgekehrt  $\sum_{k=0}^{\infty} g^k$  konvergent  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|g^k\| = 0 \Rightarrow \|g^k\| < 1$  für  $k$  groß  $\Rightarrow \|g^k\|^{\frac{1}{k}} < 1$  für  $k$  groß. Wegen  $\lim \|g^k\|^{\frac{1}{k}} = \inf_k \|g^k\|^{\frac{1}{k}}$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^k\|^{\frac{1}{k}} < 1$ . Damit ist (b) bewiesen.

*Beweis von (a).* Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} g^k$  gleichmäßig konvergent mit Grenzwert  $h$  in  $L$ . Zeige  $h = f^{-1}$ . Betrachte  $f \circ h = (id - g) \circ (\sum_{k \geq 0} g^k) = id \circ \sum_k g^k - g \circ \sum_k g^k = \sum_k id \circ g^k - \sum_k g \circ g^k = \sum_k g^k - \sum_k g^{k+1} = g^0 = id$ . Analog zeigt man  $h \circ f = id_V$ .

*Beweis von (c).*  $\|h\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} g^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|g\|^k = \frac{1}{1-\|g\|}$ , wenn  $\|g\| < 1$ .  $\square$

*Bemerkung.* Vergleiche Neumann-Reihe mit Fixpunktsatz: Sei  $g : V \rightarrow V$  linear,  $\|g\| < 1 \Rightarrow g$  ist kontrahierend, denn:  $\|g(x) - g(y)\| \leq \|g\| \|x - y\| = c \|x - y\|$  mit  $c = \|g\| < 1$ .

Klar:  $g$  hat einen Fixpunkt, nämlich  $g(0) = 0$  und  $\forall x \in V$  gilt  $g^k(x) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $\forall x \in V$ .

*Beispiel.* (a) Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  mit Abbildungsnorm  $\|A\| < 1$ .  $B := I_n - A \Rightarrow B^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3 + \dots$  *Speziell.* Ist  $A$  nilpotent, das heißt  $\exists k \in \mathbb{N}$  mit  $A^k = 0$ , dann ist  $B^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{k-1}$ . Strikte obere Dreiecksmatrizen sind Beispiele für nilpotente Matrizen.

(b) Man kann für  $h \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  die Integralgleichung

$$g(x) - \int_0^1 k(x, y)g(y)dy = h(x)$$

mit Hilfe der Neumann-Reihe lösen. (PS)

*Erinnerung.* Die stetige Abhängigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen vom Anfangswert oder von Parametern lässt sich durch die Stetigkeit der Inversen einer linearen Abbildung zwischen normierten (vollständigen) Vektorräumen ausdrücken. Sei  $\alpha : V \rightarrow W$  linear, bijektiv und stetig. Frage: Ist  $\alpha^{-1}$  stetig?

*Bemerkung.* (a) Sei  $f : V \rightarrow W$  linear und bijektiv  $\Rightarrow f^{-1}$  linear.

(b) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, bijektiv und  $(Df)^{-1}$  existiert  $\Rightarrow$  Dann ist  $f^{-1}$  differenzierbar.

(c) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und bijektiv, dann folgt nicht, dass  $f^{-1}$  stetig ist.

*Erinnerung.* Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gilt:  $f$  ist stetig  $\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y$  offen ist  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen. Sei  $f$  bijektiv, dann ist  $f^{-1}$  stetig  $\Leftrightarrow \forall V \subseteq X$  offen

ist  $(f^{-1})^{-1}(V) \subseteq Y$  offen  $\Leftrightarrow \forall V \subseteq X$  offen ist  $f(V) \subseteq Y$  offen  $\Leftrightarrow f$  offen.

**Satz 2.7 (Satz von Banach-Schauder, Satz von der offenen Abbildung).** Seien  $V, W$  Banachräume und  $f : V \rightarrow W$  linear und stetig. Dann gilt:  $f$  ist offen  $\Leftrightarrow f$  ist surjektiv.

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Sei  $f$  offen. Dann enthält  $f(B_V) \subseteq W$  eine offene Kugel, etwa  $\lambda B'$  mit  $B' := B_W(0, 1)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sei  $y \in W$ . Für  $\mu \in \mathbb{R}$  klein ist  $\mu y \in \lambda B' \Rightarrow \mu y \in f(B_V) \subseteq f(V) \Rightarrow y \in f(V)$  da  $f$  linear ist.

$\Leftarrow$ :  $B := B_V(0, 1)$ . Zeige  $f(B)$  enthält eine offene Kugel in  $W$  um 0:  
Es ist  $V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kB \Rightarrow W = f(V) = f(\bigcup_k kB) = \bigcup_k f(kB) = \bigcup_k kf(B) \subseteq \overline{\bigcup_k kf(B)} \subseteq W \Rightarrow W = \overline{\bigcup_k kf(B)}$  abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen.  $\Rightarrow$  (Satz von Baire)  $f(B)$  enthält eine offene Kugel in  $W$ , etwa  $\lambda B' + a$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, a \in W, B' = B_W(0, 1)$ . Aus Symmetriegründen folgt  $-(\lambda B' + a) \subseteq \overline{f(B)} \Rightarrow \lambda B' \subseteq \overline{f(B)}$ .

*Behauptung.*  $\frac{\lambda}{2} B' \subseteq \overline{f(B)}$  ( $\Rightarrow f$  offen).

*Beweis.* Sei  $y \in \frac{\lambda}{2} B'$ . Wir konstruieren eine Cauchy-Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in B$  und  $f(x) = y$ . *Induktiv.*  $x_0 := 0$ . Seien  $x_0, \dots, x_n$  konstruiert mit  $\|x_{k-1} - x_k\| < \frac{1}{2^{k+1}}$  und  $\|y - f(x_k)\| < \frac{1}{2^{k+2}}$  für alle  $k \leq n$ . Wegen  $\lambda B' \subseteq \overline{f(B)}$  gilt:  $y - f(x_n) \in \overline{f(\frac{1}{2^{n+1}} B)} \Rightarrow \exists z_n \in \frac{1}{2^{n+1}} B$  mit  $\|y - f(x_n) - f(z_n)\| < \frac{1}{2^{n+3}}$ . Setze nun  $x_{n+1} = x_n + z_n$  und erhalte  $\|x_{k-1} - x_k\| < \frac{1}{2^{k+1}}$  für  $k \leq n+1$  und  $\|y - f(x_{n+1})\| < \frac{1}{2^{n+3}}$ . Klar:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $V$ . Sei  $x \in V$  ihr Grenzwert. Dann gilt  $f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$ . Weiter gilt  $\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} < 1$ , also ist  $x \in B$ .  $\square$

*Folgerung (Satz über offene Abbildungen).* Seien  $V, W$  Banachräume und  $f : V \rightarrow W$  linear, stetig und bijektiv, dann ist  $f^{-1} : W \rightarrow V$  stetig, also  $f$  ein topologischer Isomorphismus (d.h. Isomorphismus + Homöomorphismus).

*Beweis.*  $f$  ist bijektiv, daher existiert  $f^{-1}$  und ist linear. Damit folgt die Behauptung aus dem vorigen Satz:  $f$  offen  $\Rightarrow f^{-1}$  stetig.  $\square$

*Folgerung (Satz vom abgeschlossenen Graphen).* Seien  $V, W$  Banachräume und  $f : V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:  $f$  ist stetig  $\Leftrightarrow \text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \in V \times W \mid x \in V\} \subseteq V \times W$  abgeschlossen ist.

*Beweis.* Sei  $g : V \times W \rightarrow W$ ,  $g(x, y) = y - f(x)$ , dann ist  $\text{Graph}(f) = \ker(g)$  ein linearer Unterraum von  $V \times W$  und damit normiert. Ist  $f$  stetig, so ist  $g$  stetig und damit  $\ker(g)$  abgeschlossen.

Ist umgekehrt  $\text{Graph}(f)$  abgeschlossen, dann ist  $\text{Graph}(f)$  ein Banachraum. Die Projektion  $p_V : \text{Graph}(f) \rightarrow V$ ,  $p_V(x, y) = x$  ist bijektiv, linear, stetig und nach dem vorigen Satz auch offen. Daher ist  $p_V^{-1} = (id, f)$  stetig und damit auch  $f$  stetig.  $\square$

*Bemerkung.* (a) Der Satz und die Folgerungen gelten auch für Frechet-Räume.

(b) Die Implikation “ $\Rightarrow$ ” in der zweiten Folgerung benützt die Vollständigkeit nicht.

(c) Ist  $V$  ein Vektorraum mit zwei Normen  $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ , sodass  $V$  mit beiden Normen ein Banachraum ist und für die induzierten Topologien  $T_1, T_2$  gilt  $T_1 \subseteq T_2$  (d.h.  $T_1$  gröber als  $T_2$ ), dann gilt bereits  $T_1 = T_2$ .

Beweis: Die Abbildung  $id : (V, T_1) \rightarrow (V, T_2)$  ist bijektiv, linear und stetig. Daraus folgt  $id^{-1} : (V, T_2) \rightarrow (V, T_1)$  ist stetig, das heißt aber  $T_2 \subseteq T_1$ .

**Definition (Topologien auf  $L(V, W)$ ).** Seien  $V, W$  normierte Vektorräume. Wir können auf  $L(V, W)$  mehrere Topologien betrachten:

(a) *Normtopologie  $T_N$ :*

$$\|f\| = \sup_{x \in B_V(0,1)} \|f(x)\|$$

(Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Umgebungen).

(b) *Topologie der punktweisen Konvergenz  $T_p$ :* Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L(V, W)$  konvergiert punktweise gegen  $f \in L(V, W)$ :  $\Leftrightarrow \forall a \in V$  konvergiert  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(a)$  in  $W$ .

(c) *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta  $T_K$ :* Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L(V, W)$  konvergiert gleichmäßig auf Kompakta gegen  $f \in L(V, W)$ :  $\Leftrightarrow \forall K \subseteq V$  kompakt konvergiert  $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f|_K$  in  $L(V, W)$ .

Klar: Ein Punkt ist kompakt und ein Kompaktum ist beschränkt. Daher gilt  $T_p \subseteq T_K \subseteq T_N$ .

**Satz 2.8 (Satz von Banach-Steinhaus, Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit).** Sei  $V$  ein Banachraum,  $W$  ein normierter Vektorraum und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L(V, W)$ . Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere punktweise gegen  $f : V \rightarrow W$ . Dann ist  $f \in L(V, W)$ , das heißt  $f$  ist linear und stetig, und die Folge der Normen  $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt:  $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$ .

*Bemerkung.* (a) Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $f$  gleichmäßig auf Kompakta, aber nicht bezüglich der Norm-Topologie von  $L(V, W)$ .

(b) Man kann zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen  $f \in L(V, W)$
2. Die  $\|f_n\|$  sind beschränkt und  $(f_n(a)) \rightarrow f(a)$  für alle  $a$  in einer dichten Teilmenge von  $V$ .

*Beweis des Satzes.*  $\forall a \in V$  existiert  $\lim_n f_n(a) =: f(a) \in W$ . Damit existiert zu jedem  $a \in V$  ein  $c_a > 0$  mit  $\|f_n(a)\| < c_a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Setze  $A_k := \{a \in V \mid \sup_n \|f_n(a)\| \leq k\} = \{a \in V \mid \|f_n(a)\| \leq k \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$ . Dann sind die  $A_k \subseteq V$  abgeschlossen ( $f_n$  und  $\|\cdot\|$  sind stetig) und  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = V \Rightarrow$  (Satz von Baire)  $\exists k \in \mathbb{N}$  mit  $A_k^\circ \neq \emptyset$  (d.h.  $A_k$  enthält eine offene Kugel). Aber es ist  $A_k = \frac{k}{m} A_m$ , also enthalten alle  $A_k$  eine offene Kugel. Insbesondere  $\exists \lambda > 0$  mit  $\frac{1}{\lambda} B_V(0, 1) \subseteq A_1$ . Damit ist  $\forall a \in B_V(0, 1) : \frac{a}{\lambda} \in A_1$ , das heißt  $\|\frac{a}{\lambda} f_n\| \leq 1$ . Also ist  $\|f_n(a)\| \leq \lambda$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

Wir haben gezeigt: Die  $\sup_{a \in B_V(0,1)} \|f_n(a)\| = \|f_n\|$  sind beschränkt durch  $\lambda$ . Sei  $B := B_V(0, 1)$ ,  $B' = B_W(0, 1)$ . Dann gilt  $f_n(B) \subseteq \lambda B' \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (f = \lim_n f_n \text{ punktweise}) f(B) \subseteq \overline{\lambda B'} = \lambda \overline{B'} \subseteq \mu B' \forall \mu > \lambda \Rightarrow f$  ist beschränkt auf  $B$ , also  $\|f\| < \infty$  und  $f$  stetig.  $\square$

**Definition (konvex).** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $A \subseteq V$ .  $A$  heißt *konvex*:  $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$  ist  $[x, y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\} \subseteq A$ .

*Beispiel.* (a) Jeder affine oder lineare Unterraum von  $V$  ist konvex.

(b) Jede Kugel in einem normierten Vektorraum ist konvex.

(c) Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig. Dann sind die offenen Halbräume  $H_+ = \{x \in V \mid f(x) > 0\}$  und  $\overline{H_+} = \{x \in V \mid f(x) \geq 0\}$  konvex.

- (d) Sei  $A \subseteq V$  konvex, dann ist die positive Kugel  $K := \{\lambda x \mid x \in A, \lambda \geq 0\}$  konvex.
- (e) Sei  $A \subseteq V$  konvex und  $f : V \rightarrow W$  eine affine Abbildung. Dann ist  $f(A) \subseteq W$  konvex. Weiter sei  $B \subseteq W$  konvex, dann ist  $f^{-1}(B) \subseteq V$  konvex.
- (f) Sei  $A \subseteq V$  konvex und  $V$  normiert. Dann sind  $\overline{A}$  und  $A^\circ$  konvex.
- (g) Durchschnitte und Summen von konvexen Mengen sind wieder konvex.
- (h) Sei  $A \subseteq V$  beliebig. Die *konvexe Hülle* von  $A$ ,

$$\text{conv}(A) := \bigcap_{A \subseteq B, B \text{ konvex}} B$$

ist konvex.

**Definition (Extrempunkt).** Sei  $V$  ein normierter Vektorraum,  $A \subseteq V$  konvex und  $a \in A$ .  $a$  heißt ein *Extrempunkt* von  $A$   $:\Leftrightarrow a$  liegt nicht im Inneren eines Segmentes  $[x, y] \subseteq A$ .

**Satz 2.9 (Satz von Hahn-Banach, Fortsetzungssatz, 1. geometrische Version).** Sei  $V$  ein normierter Vektorraum,  $A \subseteq V$  offen und konvex,  $U \subseteq V$  ein affiner Unterraum und  $A \cap U = \emptyset$ . Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene  $W \subseteq V$  mit  $U \subseteq W$  und  $A \cap W = \emptyset$ .

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir folgende, nicht-konstruktive Existenzaussage:

**Lemma 2.2 (Lemma von Zorn).** Jede induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element

*Beweis.* Lang, [13], p. 12-16. □

**Definition.** Eine Ordnung (Ordnungsrelation) auf einer Menge  $X$  ist eine Teilmenge  $R \subseteq X \times X$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $(x, x) \in R, \forall x \in X,$

$$(2) (x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R,$$

$$(3) (x, y) \in R, (y, x) \in R \Rightarrow x = y.$$

Für  $(x, y) \in R$  schreibt man oft  $x \leq y$ . Damit

$$(1) x \leq x,$$

$$(2) x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z,$$

$$(3) x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y.$$

$X$  heißt *totalgeordnet*, wenn zusätzlich gilt:

$$(4) \forall x, y \in R \text{ gilt entweder } (x, y) \in R \text{ oder } (y, x) \in R,$$

also

$$(4) x \leq y \text{ oder } y \leq x \text{ (je zwei Elemente sind vergleichbar)}.$$

**Definition.** Sei  $X$  eine geordnete Menge,  $A \subseteq X$  Teilmenge.  $x \in X$  heißt genau dann *obere Schranke von  $A$* , wenn für alle  $a \in A$  gilt, dass  $a \leq x$ .  $x \in X$  heißt *kleinste obere Schranke von  $A$* , wenn  $x$  obere Schranke und für alle oberen Schranken  $x' \in X$  von  $A$  gilt, dass  $x \leq x'$ .  $x$  heißt dann auch das *Supremum von  $A$* .  $a \in A$  heißt *maximales Element von  $A$* , wenn es kein  $b \in A$  gibt mit  $a \leq b$ .  $a \in A$  heißt *größtes Element von  $A$* , wenn für alle  $b \in A$  gilt, dass  $b \leq a$ .

**Definition.**  $X \neq \emptyset$  heißt *induktiv geordnet*, wenn jede totalgeordnete Teilmenge von  $X$  eine obere Schranke besitzt.

*Beweis von Satz 2.9.* Sei  $U \subseteq V$  affin. Nach geeigneter Translation wird  $U$  linearer Unterraum und die Aussagen des Satzes bleiben erhalten. Also o. B. d. A.  $U$  linearer Unterraum von  $V$ . Sei

$$\mathcal{E} := \{W \subseteq V \text{ linearer Unterraum} : U \subseteq W \text{ und } W \cap A = \emptyset\},$$

geordnet mit der Inklusion.

(a)  $\mathcal{E}$  ist induktiv geordnet: Sei  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  totalgeordnet, so setze  $W_0 = \bigcup_{W \in \mathcal{F}} W$ . Dann ist  $W_0 \subseteq V$  Unterraum,  $U \subseteq W_0$  und  $W_0 \cap A = \emptyset$ . Daraus folgt, dass  $W_0$  obere Schranke von  $\mathcal{F}$  ist, also ist  $\mathcal{E}$  induktiv geordnet.

Sei also  $W$  ein maximales Element von  $\mathcal{E}$ :  $U \subseteq W$ ,  $W \cap A = \emptyset$ . Dann ist  $W$  abgeschlossen, da sonst  $W \subseteq \overline{W}$  mit  $U \subseteq \overline{W}$ ,  $\overline{W} \cap A = \emptyset$  ( $A$  offen) wäre und so  $W$  nicht maximal.

(b) Ist  $W$  keine Hyperebene, so betrachte den Faktorraum  $V/W$ ,  $\dim V/W \geq 2$ . Weil  $W$  abgeschlossen ist, ist  $V/W$  normiert, und  $A' = \pi(A) \subseteq V/W$  konvex und offen. Weiters ist  $A \cap W = \emptyset \Rightarrow W \not\subseteq A + W \Rightarrow 0 \notin \pi(A)$ . Findet man nun in  $V/W$  einen echten linearen Unterraum (siehe (c)) mit  $W' \neq 0$  und  $W' \cap A' = \emptyset$ , so ergibt  $W' + W \subseteq V$  einen Unterraum mit  $W \subsetneq W' + W$  und  $(W' + W) \cap A = \emptyset$ . Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $W$ .

(c) Also o. B. d. A.  $\dim V \geq 2$ ,  $A \subseteq V$  konvex offen,  $0 \notin A$  und es genügt einen Unterraum  $W \neq 0$  von  $V$  zu finden mit  $W \cap A = \emptyset$  (dies genügt auch für den Beweis von Satz 2.10 unten). Sei nun  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Betrachte den offenen Kegel  $K = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A \subseteq V$  konvex, und seinen Rand  $\partial K$  in  $V \setminus \{0\}$ . Wäre  $\partial K = \emptyset$ , dann wäre  $K = \overline{K}$  abgeschlossen und offen in  $V \setminus \{0\}$  zusammenhängend, woraus folgen würde, dass  $K = V \setminus \{0\}$  nicht konvex wäre. Also gibt es eine  $x \in \partial K$ . Betrachte  $W = \mathbb{R}x \subseteq V$ ,  $W \neq 0$ .

Es gilt, dass  $W \cap K = \emptyset$ . Denn wäre  $y \in W \cap K$ , also  $y \in \mathbb{R}x$  und  $y \in K$ , dann wäre entweder  $x \in K$  oder  $-x \in K$ . Weil aber  $x \notin K \Rightarrow -x \in K \Rightarrow B(-x, \varepsilon) \subseteq K$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Weiters, weil  $B(x, \varepsilon) \cap K \neq \emptyset$  ist, gibt es ein  $z \in B(x, \varepsilon) \cap K$  mit  $-z \in K$ . Wegen der Konvexität von  $K$  folgt dann, dass  $0 \notin K$  ist. Widerspruch. Nun folgt aber aus  $W \cap K = \emptyset$ , dass  $W \cap A = \emptyset$ , womit  $W$  die gewünschten Bedingungen erfüllt.

(d) Betrachte nun den Fall, dass  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .  $V$  ist als komplexer Vektorraum auch ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , also gibt es eine reelle Hyperebene  $W \subseteq V$  mit  $U \subseteq W$  und  $A \cap W = \emptyset$ . Aber:  $U$  komplex, also ist  $U = U \cap iU$ . Daraus folgt  $W_0 = W \cap iW \supseteq U$ ,  $W_0 \cap A = \emptyset$  und  $W_0 \subseteq V$  ist komplexe Hyperebene.

□

**Satz 2.10 (Satz von Hahn-Banach, 2. geometrische Version).** Sei  $V$  ein normierter reeller Vektorraum,  $A, K \subseteq V$  konvexe Teilmengen,  $A$  abgeschlossen,  $K$  kompakt und  $A \cap K = \emptyset$ . Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f|_A > c$  und  $f|_K < c$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ . Das heißt es gibt eine Hyperebene  $f^{-1}(c)$  in  $V$ , die  $A$  und  $K$  trennt.

*Beweis.* Betrachte  $d(A, K) = \inf_{a \in A, b \in K} \|a - b\| = \inf_{a \in A, b \in K} d(a, b)$ . Die Abbildung  $d(A, -) : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(A, b) := \inf_{a \in A} d(a, b)$  ist stetig und

$d(A, b) > 0 \ (\forall b \in K)$ , da  $A$  abgeschlossen ist.  $K$  ist kompakt  $\Rightarrow d(A, -)$  nimmt ein Minimum auf  $K$  an, das heißt  $d := d(A, K) = d(A, b_0)$  für ein  $b_0 \in K$ . Wähle  $0 < r < d$ , dann ist die Menge  $A' := A - K - B(0, r) \subseteq V$  offen, konvex und aus der Dreiecksungleichung folgt:  $0 \notin A'$ . Wende nun den vorigen Satz mit  $U = 0$  und  $A = A'$  an, dann folgt  $\exists W \subseteq V$  Hyperebene mit  $W \cap A' = \emptyset$ . Sei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig mit  $f^{-1}(0) = W$ , o.B.d.A.  $f|_{A'} > 0$  ( $A'$  ist zusammenhängend, da konvex und  $A' \cap W = \emptyset$ ). Erhalte  $\forall a \in A, \forall k \in K, \forall b \in B(0, r)$  die Ungleichung  $f(a) > f(k) + f(b)$ . Damit folgt  $\inf_A(f) \geq \sup_K(f) + \sup_{B(0, r)}(f)$ . Da  $K$  kompakt ist und  $\sup_{B(0, r)}(f) = r\|f\|$  folgt  $\exists c \in \mathbb{R}$  mit  $f|_A > c$  und  $f|_K < c$ .  $\square$

*Folgerung.* Sei  $V$  ein normierter Vektorraum und  $A \subseteq V$  konvex und abgeschlossen. Dann ist

$$A = \bigcap_{\substack{A \subseteq H \subseteq V \\ H \text{ abg. Halbraum}}} H.$$

*Beweis.*  $\subseteq$ : klar

$\supseteq$ : Sei  $a \notin A \Rightarrow \exists f_a : V \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig mit  $f_a|_A > c_a$  und  $f_a(a) < c_a \Rightarrow \bigcap_{a \in V \setminus A} \{f_a \geq c_a\} = A$ .  $\square$

**Satz 2.11 (Satz von Hahn-Banach, analytische Version).** Sei  $V$  ein normierter Vektorraum,  $\{0\} \neq U \subseteq V$  Untervektorraum,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  linear, stetig und  $f \neq 0$ . Dann besitzt  $f$  eine stetige lineare Fortsetzung  $\bar{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $V$  und  $\|f\| = \|\bar{f}\|$ .

*Bemerkung.* Die Aussage gilt auch noch für lokalkonvexe Räume.

*Beispiel.* Sei  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U \subseteq V$  eine Gerade,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  linear, stetig und  $f \neq 0$ . Für  $a \notin U$  setze  $\bar{f}(a) = \alpha \in \mathbb{R}$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Es gilt  $V = U \oplus \mathbb{R}a$ , also hat man so  $f$  auf ganz  $V$  fortgesetzt. Der Satz sagt, man kann  $\alpha$  sogar so wählen, dass  $\|f\| = \|\bar{f}\|$  ist.

*Beweis.*  $U \subseteq V$  Untervektorraum  $\Rightarrow \bar{U} \subseteq V$  Untervektorraum und  $f$  lässt sich linear und stetig auf  $\bar{U}$  fortsetzen. Also o.B.d.A. :  $U = \bar{U}$  abgeschlossen.

(a) Sei  $a \in V \setminus U$  und  $U_1 = U \oplus \mathbb{R}a$ . Wir konstruieren eine Fortsetzung  $f_1$  von

$f$  auf  $U_1$  mit  $\|f_1\| = \|f\|$ . Setze  $f_1(x + \lambda a) := f(x) + \lambda \alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = f_1(a)$ , sodass  $\|f_1\| = \|f\|$ . Zeige also, dass so ein  $\alpha$  existiert. Dazu genügt es zu zeigen, dass  $\forall x, \forall \lambda : |f_1(x + \lambda a)| \leq \|f\| \|x + \lambda a\|$ , das heißt  $\forall x \in U : |f(x) - \alpha| \leq \|f\| \|x - a\|$ , das heißt  $f(x) - \|f\| \|x - a\| \leq \alpha \leq f(x) + \|f\| \|x - a\|$ . Für  $x, y \in U$  gilt  $f(x) - f(y) = f(x - y) \leq \|f\| \|x - y\| \leq \|f\| (\|x - a\| + \|a - y\|)$ , also  $\forall x, y \in U : f(x) - \|f\| \|x - a\| \leq f(y) + \|f\| \|y - a\|$ . Daher existiert  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit den gewünschten Eigenschaften.

(b) Wir wählen eine maximale Fortsetzung von  $f$  und zeigen, dass diese auf ganz  $V$  definiert ist. Betrachte dazu Paare  $E = (W, \bar{f})$  mit  $U \subseteq W \subseteq V$ ,  $W$  Untervektorraum und  $\bar{f} : W \rightarrow \mathbb{R}$  lineare stetige Fortsetzung von  $f$  mit  $\|f\| = \|\bar{f}\|$ . Ordne die Menge  $\mathcal{E}$  dieser Paare wie folgt:  $(W, \bar{f}) \leq (W', \bar{f}') \Leftrightarrow W \subseteq W'$  und  $\bar{f}'|_W = \bar{f}$ . Damit ist  $\mathcal{E}$  induktiv geordnet: Zeige dazu, dass jede total geordnete Teilmenge  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  eine obere Schranke in  $\mathcal{E}$  besitzt.

Setze  $W_0 := \bigcup_{W \in \mathcal{F}} W \subseteq V$  und  $f_0 : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) := \bar{f}_W(x)$  für  $x \in W$ . Dann ist  $f_0$  wohldefiniert, linear und stetig. Weiter ist  $\|f_0\| = \sup_{\bar{f} \in \mathcal{F}} \|\bar{f}\| = \|f\|$ . Also ist  $\mathcal{E}$  induktiv geordnet und besitzt daher nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element, etwa  $(W, \bar{f})$ . Wäre  $W \subset V$ ,  $W \neq V$ , dann wähle  $a \in V \setminus W$  und konstruiere eine Fortsetzung  $\bar{f}_1 : W \oplus \mathbb{R}a$  nach (a). Daraus folgt aber ein Widerspruch zur Maximalität von  $(W, \bar{f})$ .

(c)  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : Betrachte  $U \subseteq V$  als reellen Untervektorraum und  $g := \operatorname{Re}(f)$  mit  $\|g\| = \|f\|$ . Dann gibt es eine Fortsetzung  $\bar{g} : V \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g$  auf  $V$  mit  $\|g\| = \|\bar{g}\|$ . Setze nun  $\bar{f}(x) := \bar{g}(x) + i\bar{g}(ix)$ , und erhalte so eine komplexe Fortsetzung von  $f$  mit  $\|f\| = \|\bar{f}\|$ .  $\square$

*Folgerung (Satz von Hahn-Banach, klassische Version).* Sei  $V$  ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von linear unabhängigen Elementen in  $V$ . Weiter seien  $\forall i \in \mathbb{N} \quad c_i \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:

(a)  $\exists f : V \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$  linear, stetig mit  $\forall i \in \mathbb{N} : f(a_i) = c_i$ .

(b)  $\exists b \geq 0$ , sodass  $\forall \lambda_i \in \mathbb{R} / \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $|\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i| \leq b \|\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\|$ .

(c) Sei  $W = \langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle \leq V$  die  $\mathbb{R} / \mathbb{C}$ -lineare Hülle. Dann ist die lineare Abbildung  $g : W \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$  mit  $g(a_i) = c_i$  stetig.

*Speziell.* Sei  $V = \ell^2 = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \sum_i x_i^2 < \infty\}$ . Jedes  $f : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$  linear und stetig ist von der Form  $f((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i x_i$  für eine Folge  $(d_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2$

(Beweis im Kapitel über Hilberträume).

Damit erhalten wir für  $a_i = (a_{ij})_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2, c_i \in \mathbb{R} / \mathbb{C} \quad (\forall i \in \mathbb{N})$  mit  $(a_i)_i$  linear unabhängig folgende äquivalente Aussagen:

- (a)  $\exists d := (d_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  mit  $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} d_j = c_i \quad (\forall i \in \mathbb{N})$ .
- (b)  $\exists b \geq 0$ , sodass  $\forall \lambda_i \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$  und  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $|\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i| \leq b \|\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\|_{\ell^2}$ .
- (c) Die lineare Abbildung  $g : \langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$  mit  $g(a_i) = c_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  ist stetig.

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Setze  $b := \|f\|$ . Dann gilt  $\forall x \in V : |f(x)| \leq b\|x\|$ . Speziell für  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in V$  gilt:  $|f(x)| = |f(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i)| = |\sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)| = |\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i| \leq b\|x\| = b\|\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\|$ .

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) :  $W = \langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle = \{ \text{endliche Linearkombinationen der } a_i \} = \{ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} / \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \}$ . Nach (b) ist  $\|g\| \leq b$  und daher stetig. Sei umgekehrt  $g$  stetig, dann ist  $\forall x \in W : g(x) \leq \|g\|\|x\|$ . Setze  $b = \|g\|$  und erhalte (b).

(c)  $\Rightarrow$  (a):  $g : W \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$  ist linear und stetig,  $W \subseteq V$  ist ein Untervektorraum und  $V$  ist normiert  $\Rightarrow g$  besitzt eine stetige lineare Fortsetzung  $f : V \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$ , das heißt  $f|_W = g$ , also ist  $f(a_i) = c_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ .  $\square$

*Folgerung.* Sei  $V$  ein normierter Vektorraum.

- (a) Sei  $0 \neq a \in V$ , dann gibt es ein  $f \in V' = \{g : V \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C} \mid g \text{ linear, stetig}\}$  mit  $f(a) \neq 0$ .
- (b) Seien  $a, b \in V$  mit  $a \neq b$ , dann gibt es ein  $f \in V'$  mit  $f(a) \neq f(b)$ .
- (c) Insbesondere ist  $V' \neq \emptyset$ , das heißt es existieren stetige Funktionale.

*Beweis.* (b) folgt aus (a) angewandt auf  $a - b$ .

(a) Sei  $U = \mathbb{R}a / \mathbb{C}a$  Untervektorraum von  $V$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}, g(a) = \|a\|, g(\lambda a) = \lambda\|a\|$ , dann besitzt  $g$  eine stetige lineare Fortsetzung  $f \in V'$  mit  $f(a) = \|a\| \neq 0$  (Hahn-Banach).  $\square$

*Folgerung.* (a) Sei  $V$  ein Banachraum und  $U \subseteq V$  abgeschlossen. Dann ist  $U \subseteq V$  direkt  $\Leftrightarrow \exists W \subseteq V$  abgeschlossen mit  $V = U \oplus W$  (direkte algebraische Summe). (Also  $V = U + W$  und  $U \cap W = \emptyset$ .)

(b) Sei  $V$  ein normierter Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit  $\dim(U) < \infty$ . Dann ist  $U$  abgeschlossen und direkt.

(c) Sei  $V$  ein normierter Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum mit  $\operatorname{codim}(U) < \infty$  (, das heißt  $\dim(V/U) < \infty$ ). Dann ist  $U$  direkt.

*Beweis.* (a)  $\Leftarrow$ : Zeige  $V = U \oplus W$  topologische direkte Summe, das heißt die Topologie von  $V$  ist die Produkttopologie von  $U \times W$ . Aber die Abbildung  $\Phi : U \times W \rightarrow V = U \oplus W$ ,  $\Phi(u, w) := u + w$  ist bijektiv, linear und stetig, da die Addition in  $V$  stetig ist. Zeige noch  $\Phi^{-1}$  ist stetig, dann ist  $V \cong U \times W$ . Aber  $U, W \subseteq V$  sind abgeschlossene Untervektorräume,  $V$  ist ein Banachraum  $\Rightarrow U \times W$  ist ein Banachraum  $\Rightarrow \Phi^{-1}$  ist stetig nach dem Satz von der offenen Abbildung.

(b) Früher wurde gezeigt:  $\dim(V) < \infty \Rightarrow U$  abgeschlossen. Wähle eine Basis  $(a_1, \dots, a_k)$  von  $U$  und schreibe  $x \in U$  eindeutig als  $\sum_{i=1}^k x_i a_i$  mit  $x_i \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$ , dann ist die Abbildung  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$ ,  $f_i(x) = x_i$  linear und stetig, da  $\dim(U) < \infty$ . Damit folgt aus dem Satz von Hahn-Banach:  $\exists \bar{f}_i : V \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$  stetige lineare Fortsetzung der  $f_i$ . Sei  $W = \bigcap_{i=1}^k \ker(\bar{f}_i)$  mit  $W \cap U = \{0\}$ . Dann gilt:  $U + W = V$  und damit  $U \oplus W = V$  algebraische direkte Summe. Damit folgt die Behauptung nach (a).

(c)  $\dim(V/U) < \infty$ , also existiert eine endliche Basis von  $V/U = \{v+U \mid v \in V\}$ . Wähle  $a_1, \dots, a_k \in V$ , sodass  $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$  eine Basis von  $V/U$  ist. Setze  $W := \langle a_1, \dots, a_k \rangle \leq V$ . Dann ist  $\dim(W) \leq k < \infty$ , also ist  $W$  abgeschlossen in  $V$ . Nach dem Homomorphie-Satz folgt:  $W \oplus U = V$  (algebraische direkte Summe) und daraus folgt die Behauptung mit (a).  $\square$

Erinnerung: Sei  $A \subseteq V$  konvex,  $V$  normiert. Ein  $a \in A$  heißt *Extrempunkt* von  $A$ , wenn  $a$  nicht innerer Punkt eines Segmentes von  $A$  ist.

**Satz 2.12.** *Sei  $V$  ein normierter reeller Vektorraum und  $A \subseteq V$  konvex und kompakt. Dann besitzt  $A$  mindestens einen Extrempunkt.*

*Beweis.* Betrachte die Menge  $\mathcal{E} = \{B \subseteq A \mid B \neq \emptyset \text{ konvex und kompakt},$

sodass jedes offene Segment in  $A$ , das  $B$  schneidet, seine Endpunkte in  $B$  hat. Die Extrempunkte von  $A$  scheinen Kandidaten für Mengen  $B \in \mathcal{E}$  zu sein.

Ordne  $\mathcal{E}$  durch  $B \leq B' \Leftrightarrow B' \subseteq B$ . Damit ist  $\mathcal{E}$  induktiv geordnet. Sei etwa  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  eine total geordnete Teilmenge. Zeige:  $\mathcal{F}$  besitzt eine obere Schranke in  $\mathcal{E}$ . Setze dazu  $B_0 := \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B$ . Dann ist  $\forall B \in \mathcal{F} : B_0 \subseteq B$ .  $B_0$  ist kompakt, konvex und  $B_0 \in \mathcal{E}$ . Also ist  $\mathcal{E}$  induktiv geordnet und besitzt nach dem Zornschen Lemma ein minimales Element  $A_0$ .

Wir zeigen:  $A_0$  besteht aus einem einzigen Punkt  $a$ , der dann in keinem offenen Segment von  $A$  liegen kann, also ein Extrempunkt von  $A$  ist.

Es ist ausreichend zu zeigen, dass für alle

$$f \in V' = \{g : V \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ linear und stetig}\}$$

$f(A_0) \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und konvex ist. Daraus folgt  $f(A_0) = [b, c]$  mit  $b \leq c$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ .  $\Rightarrow f^{-1}(c) \cap A_0 \neq \emptyset$ . Wir zeigen:  $f^{-1}(c) \cap A_0 \in \mathcal{E}$  ( $\Rightarrow A_0 = f^{-1}(c) \cap A_0 \Rightarrow f(A_0) = c$ ). Sei  $a \in f^{-1}(c) \cap A_0$  ein Element des offenen Segments  $(x, y)$  mit  $x, y \in A$ . Etwa  $a = (1-t)x + ty$  für ein  $t \in (0, 1)$ . Zeige  $x, y \in f^{-1}(c) \cap A_0$ . Es ist  $c = f(a) = f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$ . Da  $A_0 \in \mathcal{E}$  ist, folgt daraus  $f(x) = f(y) = c \Rightarrow x, y \in f^{-1}(c) \cap A_0$ , also ist  $f^{-1}(c) \cap A_0 \in \mathcal{E}$ .  $\square$

*Folgerung.* Sei  $A \subseteq V$  konvex und kompakt,  $A \neq \emptyset$ ,  $f \in V'$  mit  $f(A) = [b, c]$ , wobei  $b, c \in \mathbb{R}$ . Dann enthält  $f^{-1}(c) \cap A$  mindestens einen Extrempunkt von  $A$ .

*Beweis.*  $f^{-1}(c) \cap A \neq \emptyset$  ist konvex und kompakt  $\Rightarrow f^{-1}(c) \cap A$  besitzt einen Extrempunkt  $a$ . Seien  $x, y \in A$  mit  $a = (1-t)x + ty$  und  $t \in ]0, 1[$ . Dann gilt:  $f(a) = c = (1-t)f(x) + tf(y)$ . Weil aber  $f(x), f(y) \leq c$  folgt daraus, dass  $f(x) = f(y) = c \Rightarrow x, y \in f^{-1}(c) \cap A \Rightarrow x = y$  und  $a$  ist ein Extrempunkt von  $A$ .  $\square$

**Satz 2.13 (Satz von Krein-Milman).** Sei  $V$  ein normierter reeller Vektorraum,  $A \subseteq V$  konvex und kompakt,  $S \subseteq V$  die Menge aller Extrempunkte von  $A$ . Dann ist  $A = \overline{\text{conv}(S)}$  der Abschluss der konvexen Hülle von  $S$ .

*Beweis.* Sei  $A' = \overline{\text{conv}(S)}$ .  $\Rightarrow A' \subseteq A$  abgeschlossen und kompakt. Sei  $a \in A \setminus A'$ , dann  $\exists f \in V'$  mit  $f(a) \notin f(A')$ , etwa  $f(a) > f(A')$ . Sei  $f(A) = [b, c]$ , dann erhält  $f^{-1}(c) \cap A$  einen Extrempunkt von  $A$ . Widerspruch zu  $f(S) \subseteq f(A') < f(a) \leq c$ .  $\square$

## Anwendungen

*Beispiel (Anfangswertproblem von linearen Differentialgleichungen).* Betrachte die Differentialgleichung

$$f(x)'' + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = g(x)$$

mit  $a, b, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen liefert: Für jedes  $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$  existiert genau eine Lösung  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  der Differentialgleichung mit  $f(a) = c_0, f'(a) = c_1$ .

$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  ist mit der sup-Norm ein Banachraum. Hängt die Lösung  $f$  stetig von  $(g, c_0, c_1) \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$  ab? Antwort: Ja, nach dem Satz von der offenen Abbildung.

Betrachte den Differentialoperator

$$D : \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2, \quad D(f) := (f'' + af' + bf, f(0), f'(0)).$$

Dann ist  $D$  linear und stetig, sofern die Norm auf  $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$  durch  $\|f\|_{\mathcal{C}^2} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty}$  gegeben ist, und bijektiv (nach dem Satz von Picard-Lindelöf). Dann folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung:  $D^{-1}$  ist stetig, also hängt die Lösung  $f$  stetig von  $(g, c_0, c_1) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$  ab.

*Beispiel (Dualräume von  $\ell^p$  mit  $1 < p < \infty$ ).* Sei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , speziell  $p = q = 2$ . Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ , für die  $\forall x := (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$  die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$  konvergiert. Behauptung: Dann liegt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bereits in  $\ell^q$ .

Betrachte dazu die linearen Abbildungen  $f_n : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $f : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$  (linear). Mit der Hölderschen Ungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k x_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k x_k| \leq \\ &\leq \left( \sum_{k=0}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{k=0}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=0}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p. \end{aligned}$$

Daher ist  $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n$  stetig und  $\|f_n\| \leq (\sum_{k=0}^n |a_k|^q)^{\frac{1}{q}}$ . Nach Definition konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $f$ , also ist nach dem Satz von Banach-Steinhaus  $f$  stetig mit  $\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k\| \leq \|f\| \|x\|_p$  für alle  $x \in \ell^p$ .

Behauptung:  $\|f\| = (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q)^{\frac{1}{q}} = \|a\|_q$ , sofern  $a \in \ell^q$  ist.

Beweis:  $\leq$ : klar;

$\geq$ : Wähle speziell  $x_k = a_k |a_k|^{q-2}$  für  $1 \leq k \leq n$ ,  $a_k \neq 0$  und  $x_k = 0$  sonst. Dann ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$  und es gilt  $|x_k|^p = |a_k|^q = |a_k x_k|$  für  $1 \leq k \leq n$ . Weiter ist  $(\sum_{k=0}^n |a_k|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{k=0}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^n |a_k|^q = \sum_{k=0}^n |a_k x_k| \leq \|f\| (\sum_{k=0}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \|f\| (\sum_{k=0}^n |a_k|^q)^{\frac{1}{p}}$ . Daraus folgt  $(\sum_{k=0}^n |a_k|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Also ist  $\|f\| = (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$  und damit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ .

*Variationen.*

- (a) Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ , sodass  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$  konvergent ist  $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ . Dann ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ .
- (b) Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ , sodass  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$  konvergent ist  $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0$  (Nullfolgen). Dann ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ .

*Beispiel (Fourierreihen). Erinnerung.* Sei  $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R}) =: V$ . Dann hat  $f$  die Fourierreihe:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (2.1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

*Behauptung.* Es gibt Funktionen  $f \in V$ , deren Fourierreihe in  $0 \in [-\pi, \pi]$  nicht konvergiert. (Aber (Carlson, 1966): Die Fourierreihe einer Funktion  $f \in V$  konvergiert punktweise im Komplement einer Nullmenge von  $[-\pi, \pi]$  gegen  $f$ .)

Es gilt: Die  $n$ -te Partialsumme von (2.1) für  $x = 0$  ist gegeben durch

$$s_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) f(y) dy$$

wobei

$$D_n(y) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{2 \sin \frac{y}{2}}$$

Damit erhalten wir stetige Linearformen  $s_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto s_n(f)$  mit Normen

$$\|s_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(y)| dy$$

*Behauptung.* Die Folge  $(\|s_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  ist unbeschränkt, denn  $\sin(y) \leq y$  für  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ . Setze  $z := (n + \frac{1}{2})y$  und erhalte:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(y)| dy &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})y|}{\sin \frac{y}{2}} dy \geq \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})y|}{\frac{y}{2}} dy = \\ &= 2 \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} |\sin(z)| \frac{1}{z} dz \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Daher ist  $(\|s_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt.

*Annahme.*  $\forall f \in V$  konvergiert die Fourierreihe (2.1) in 0 gegen  $f(0)$ . Dann konvergiert  $(s_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  ( $\forall f \in V$ ) ( $n$ -te Partialsumme). Also konvergieren die linearen Abbildungen  $s_n : V \rightarrow \mathbb{R}$  punktweise auf  $V$ . Dann müssen aber nach dem Satz von Banach-Steinhaus die Normen der  $s_n$  beschränkt bleiben. Widerspruch!

Also gibt es mindestens ein  $f \in V$ , dessen Fourierreihe in 0 nicht konvergiert.

*Bemerkung.* Es gibt zahllose weitere Anwendungen der Hauptsätze der Funktionalanalysis, die meisten nicht ohne technischen Aufwand.

# Kapitel 3

## Hilberträume

Im folgenden seien  $V, W, \dots$  reelle bzw. komplexe Vektorräume.

**Definition.** Sei  $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ .  $g$  heißt *Bilinearform*, genau dann wenn  $g(x, \cdot)$  und  $g(\cdot, y) \in L(V, \mathbb{R}) \forall x, y \in V$ , d. h. wenn  $g$  linear in beiden Komponenten ist.  $g$  heißt *symmetrisch* bzw. *alternierend*, wenn  $g(x, y) = g(y, x)$  bzw.  $g(x, y) = -g(y, x) \forall x, y \in V$ .

*Bemerkung.* Ist  $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  Bilinearform, so ist  $\frac{1}{2}g(x, y) + \frac{1}{2}g(y, x)$  eine symmetrische und  $\frac{1}{2}g(x, y) - \frac{1}{2}g(y, x)$  eine alternierende Bilinearform.

**Definition (Skalarprodukt).** Sei  $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform und  $q : V \longrightarrow \mathbb{R} \ q(x) = g(x, x)$  die zugehörige Linearform. Dann heißt  $\{x \in V \mid g(x, y) = 0 \ \forall y \in V\} = \{y \in V \mid g(x, y) = 0 \ \forall x \in V\} =: \ker(g)$  der *Kern* von  $g$ . Ist  $\ker(g) = 0$ , so heißt  $g$  *nicht ausgeartet*.  $g$  heißt *positiv* bzw. *positiv definit*, wenn  $q(x) \geq 0 \ \forall x \in V$  bzw.  $q(x) > 0 \ \forall x \in V \ x \neq 0$ . Falls  $g$  symmetrisch, bilinear und positiv definit ist, nennt man  $g$  (*reelles*) *Skalarprodukt*. Schreibweise:  $g(x, y) = \langle x, y \rangle = (x|y)$ .

**Definition (komplexes Skalarprodukt).** Sei  $V$  komplexer Vektorraum

und  $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$  Sesquilinearform. Dann ist

$$\begin{aligned} h(-, x) : V &\longrightarrow \mathbb{C} \quad \mathbb{C}\text{-linear} \\ h(x, -) : V &\longrightarrow \mathbb{C} \quad \mathbb{C}\text{-antilinear} \end{aligned}$$

Dabei heißt  $\mathbb{C}$ -antilinear, dass  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  gilt:  $h(x, \lambda y) = \bar{\lambda}h(x, y)$ .  $h$  heißt *hermitesch*, wenn  $h(x, y) = \overline{h(y, x)} \forall x, y \in V$ .  $h$  ist genau dann hermitesch, wenn  $q(x) = h(x, x)$  eine reelle quadratische Form ist.  $h$  heißt positiv bzw. positiv definit, genau dann wenn  $h(x, x) \geq 0 \forall x \in V$  bzw.  $h(x, x) > 0 \forall x \neq 0$ . Man nennt  $h$  *komplexes Skalarprodukt*, wenn  $h$  hermitesch und positiv definit ist.

*Bemerkung.* Sei  $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$  eine hermitesche Bilinearform. Betrachte  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i \cdot \mathbb{R}$ , also  $h(x, y) = g(x, y) + i \cdot a(x, y)$ , mit  $g, a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  reelle Bilinearformen, wobei  $g$  symmetrisch und  $a$  alternierend ist. Für  $g$  und  $a$  gelten folgende Beziehungen:

- (a)  $g(x, y) = a(ix, y) = -a(x, iy)$
- (b)  $a(x, y) = -g(ix, y) = g(x, iy)$
- (c)  $g(ix, iy) = g(x, y)$
- (d)  $a(ix, iy) = a(x, y)$

**Definition.** Sei  $V$  reeller Vektorraum mit Skalarprodukt  $g$ . Dann heißt  $(V, g) = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  *Prähilbertraum*. Ist  $V$  komplexer Vektorraum mit komplexem Skalarprodukt  $h$ , so heißt  $(V, h) = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  *hermitescher Vektorraum*,

**Lemma 3.1.** *Sei  $(V, h)$  hermitescher Vektorraum. Dann gilt für alle  $x, y \in V$ :*

$$\begin{aligned} |h(x, y)|^2 &\leq q(x) \cdot q(y) \quad \text{Schwarzsche Ungleichung} \\ \sqrt{q(x+y)} &\leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \quad \text{Minkowskische Ungleichung} \end{aligned}$$

*Beweis.* Seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . *Schwarzsche Ungleichung:*  $0 \leq h(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = |\lambda|^2 q(x) + |\mu|^2 q(y) + \lambda \bar{\mu} h(x, y) + \bar{\lambda} \mu \overline{h(x, y)}$ . Sei nun speziell  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\mu = h(x, y)$ , und setze  $p(\lambda) := \lambda^2 q(x) + 2\lambda |h(x, y)|^2 + |h(x, y)|^2 q(y) \geq 0$ .  $p$  ist ein quadratisches Polynom in  $\lambda$  mit reellen Koeffizienten und mit nicht positiver Diskriminante  $b^2 - 4ac$ . Also ist  $|h(x, y)|^2 \leq q(x)q(y)$ .

*Minkowskische Ungleichung:* Sei  $g := \text{Re}(h)$  reelle positive Bilinearform. Es

gilt:  $q(x + y) = q(x) + q(y) + 2q(x, y)$ . Also ist nach (a)  $q(x + y) \leq q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)q(y)}$  und somit  $\sqrt{q(x + y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Ist  $V$  reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt und bezeichnet  $q(x) := \langle x, x \rangle$  die zugehörige Linearform, so wird durch  $\|x\| := \sqrt{q(x)}$  eine Norm auf  $V$  definiert. Dabei wird die Dreiecksungleichung durch die Minkowski Ungleichung gesichert. Insbesondere ist  $V$  somit normierter, also auch topologischer Vektorraum.

**Definition (Hilbertraum).** Sei  $V$  ein Vektorraum mit reeller symmetrischer Bilinearform  $g$  oder hermitescher Form  $h$ .  $(V, g)$  bzw.  $(V, h)$  heißt *Hilbertraum*, wenn  $g$  bzw.  $h$  ein Skalarprodukt und  $V$  bezüglich der induzierten Topologie (vermöge der Norm aus obiger Bemerkung) vollständig ist.

**Definition.**  $x, y \in V$  heißen *orthogonal*, wenn  $\langle x, y \rangle = 0$ . Ist  $U \leq V$  Untervektorraum von  $V$ , dann heißt  $U^\perp := \{x \in V \mid \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in U\}$  das orthogonale Komplement von  $U$ .  $U^\perp$  ist ein abgeschlossener Untervektorraum von  $V$ .

**Satz 3.1.** Sei  $V$  ein Prähilbertraum.  $x, y \in V$ . Dann gilt :

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2) \quad \text{Parallelogrammgleichung}$$

*Beweis.* Addition von  $|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + |y|^2$  und von  $|x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = |x|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + |y|^2$  ergibt direkt die Behauptung.  $\square$

*Folgerung.* Sind  $x, y \in V$  orthogonal, so gilt:  $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$  (Satz von Pythagoras)

*Beispiel.* (1)  $\mathbb{R}^n$  mit  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

(2)  $\mathbb{C}^n$  mit  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ .

(3) Sei  $X$  kompakter metrischer Raum, mit Maß  $\mu$ . Dann ist  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  mit  $\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$  ein Prähilbertraum.

(4) Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Dann ist  $L^2(X, \mu, \mathbb{R})$  mit  $\langle x, y \rangle = \int_X f \cdot g \, d\mu$  ein reeller Hilbertraum.

(5) speziell:  $L^2([a, b])$  mit  $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$

(6)  $\ell^2(\mathbb{R})$ , wobei für  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  das Skalarprodukt definiert sei durch  $\langle x, y \rangle := \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \overline{y_k}$

*Bemerkung.*  $\ell^p(\mathbb{R})$  bzw.  $L^p(\mathbb{R})$  mit  $p \neq 2$  sind Banachräume, jedoch keine Hilberträume, da die Parallelogrammgleichung nicht erfüllt ist.

**Satz 3.2.** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Prähilbertraum und sei  $A \subseteq V$  konvex und vollständig (bzgl. der induzierten Metrik). Sei  $x \in V$ . Dann existiert genau ein  $x_0 \in A$  mit

(a)  $d(x, A) = \|x - x_0\|$

(b)  $\operatorname{Re}(\langle x - x_0, x_0 - y \rangle) \geq 0 \quad \forall y \in A$

*Beweis.* (a) Sei  $d = d(x, A) \geq 0$ . Wähle nun Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x - y_n| = d$ . Nach 3.1 gilt:  $|(x - y_n) - (x - y_p)|^2 + |(x - y_n) + (x - y_p)|^2 = 2 \cdot (|x - y_n|^2 + |x - y_p|^2)$ . Da  $A$  konvex ist, gilt:  $\frac{1}{2}(y_n + y_p) \in A$  und somit  $|x - \frac{1}{2}(y_n + y_p)|^2 \geq d^2$ . Also gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|y_n - y_p|^2 = 2(|x - y_n|^2 + |x - y_p|^2 - 2|x - \frac{1}{2}(y_n + y_p)|^2) \leq 4\varepsilon^2 \quad \forall n, p \geq n_0$ . Also ist  $(y_n)_n \in \mathbb{N}$  eine Cauchy - Folge und da  $A$  vollständig ist, existiert  $x_0 := \lim y_n \in A$  und es gilt  $|x - x_0| = d$ .

(b) Sei  $y \in A, \lambda \in [0, 1]$ . Da  $A$  konvex ist, gilt:  $(1 - \lambda)x_0 + \lambda y \in A$  und somit  $|x - ((1 - \lambda)x_0 + \lambda y)|^2 \geq |x - x_0|^2$ . □

*Bemerkung.* Zu jedem  $x \in V$  gibt es genau ein  $x_0$  in  $A$ , dass den Minimalabstand realisiert. Ist nun  $V$  ein Prähilbertraum und  $\{0\} \neq U \subseteq V$  ein vollständiger Untervektorraum, dann existiert eine Projektion  $\pi_U : V \rightarrow U$  mit  $\|\pi_U(x) - x\| = d(x, U)$ . Diese Projektion ist charakterisiert durch

$$\pi_U(x) = \operatorname{Re} \langle x - \pi_U(x), y \rangle = 0 \quad \forall y \in U$$

Weiters ist  $\pi_u$  linear und stetig und es gilt  $\ker \pi_U = U^\perp$ , sowie die direkte algebraische Zerlegung

$$V = \ker \pi_U \oplus \operatorname{im} \pi_U$$

Ist  $V$  zudem ein Hilbertraum, also vollständig dann ist  $U$  ebenfalls vollständig ( $U$  abgeschlossen) und  $U$  besitzt eine direkte topologische Summe in  $V$ , d.h.  $V = U \oplus U^\perp$ .

*Beweis.* Nach 3.2 existiert zu  $x$  aus  $V$  genau ein  $x_0 \in U$  mit  $d(x, U) = \|x - x_0\|$ . Setze  $\pi_U(x) := x_0$ . Nach 3.2 (b) ist  $\operatorname{Re} \langle x - \pi_U(x), \pi_U(x) - y \rangle \geq 0 \forall y \in U$ . Für  $y = 0$  bzw.  $y = 2\pi_U(x)$  erhalten wir  $\operatorname{Re} \langle x - \pi_U(x), \pi_U(x) \rangle \geq 0$  bzw.  $\operatorname{Re} \langle x - \pi_U(x), -\pi_U(x) \rangle \geq 0$ . Also ist  $\operatorname{Re} \langle x - \pi_U(x), \pi_U(x) \rangle = 0$ .

Weiters ist für  $y \in U$   $\pi_U(x) \pm y \in U$ , also ist

$$\operatorname{Re} \langle x - \pi_U(x), \pm y \rangle = \operatorname{Re} \langle x - \pi_U(x), \pi_U(x) \pm y \rangle \geq 0$$

und somit schließlich  $\operatorname{Re} \langle x - \pi_U(x), y \rangle = 0$ . (Vgl. auch Übungsaufgaben)  $\square$

**Satz 3.3 (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz).** *Sei  $V$  ein Hilbertraum und  $V'$  der zu  $V$  duale Raum, d.h.  $V' = L(V, \mathbb{C})$ . Dann sind  $V$  und  $V'$  zueinander isomorphe Vektorräume, vermöge des linearen bzw. antilinearen Isomorphismus  $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$  bzw.  $y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ .*

*Beweis. Wohldefiniertheit:* Die Linearität und Antilinearität, sowie die Stetigkeit der Abbildungen folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts.

*Isometrie:* Nach der Schwarz'schen Ungleichung gilt  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , d.h.  $\|\langle x, \cdot \rangle\| \leq \|x\|$ . Es gilt die Gleichheit, wie man durch geeignete Wahl von  $x$  sofort erkennt: Setze  $y := \frac{x}{\|x\|}$  und erhalte:  $|\langle x, y \rangle| = \frac{1}{\|x\|} \cdot |\langle x, x \rangle| = \frac{\|x\|^2}{\|x\|}$ .

*Injektivität:* Ist für alle  $y$  in  $V$   $\langle x, y \rangle = 0$ , dann folgt daraus  $x = 0$ . Also gilt:  $\langle x, \cdot \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ .

*Surjektivität:* Sei  $f \in V'$ . Finde  $x \in V$ , sodass  $f = \langle x, \cdot \rangle$ . Sei o.B.d.A.  $f \neq 0$ . Da  $f \in V'$ , ist  $\ker(f)$  eine abgeschlossene Hyperebene in  $V$ . Wähle nun  $x \in V$  orthogonal auf  $\ker(f)$  (vgl. 3.2). Dann gilt:  $y \in \ker(f) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ , also ist  $\ker(f) = \ker(\langle x, \cdot \rangle)$ . Somit kann ein  $\alpha \in \mathbb{C}$  gewählt werden, sodass  $f = \langle \alpha x, \cdot \rangle$ .  $\square$

**Satz 3.4.** *Sei  $V$  ein Hilbertraum. Dann ist  $V'$  in natürlicher Weise auch ein Hilbertraum.*

*Beweis.* Definiere das Skalarprodukt auf  $V'$  mittels des Isomorphismus aus 3.3. Für  $f$  und  $g$  aus  $V'$  seien  $x$  und  $y$  die eindeutig bestimmten Elemente

in  $V$ , für die  $f = \langle x, \cdot \rangle$  bzw.  $g = \langle y, \cdot \rangle$  gilt. Setze  $\langle f, g \rangle := \langle x, y \rangle$ . Somit sind die Skalarprodukteigenschaften sehr leicht nachzuprüfen und darum oblassen wir dies dem Leser als Übung.  $\square$

**Satz 3.5.** *Jeder Hilbertraum ist reflexiv, d.h. es gilt  $V'' \simeq V$ . (oft auch  $V'' = V$ ).*

*Beweis.* Nach 3.3 und 3.4 sind die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V' \\ x & \longmapsto & \langle x, \cdot \rangle \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & V'' \\ f & \longmapsto & \langle f, \cdot \rangle \end{array}$$

Isomorphismen. Nun ist noch zu zeigen, dass ihre Komposition ebenfalls ein Isomorphismus ist. Vergleiche dazu entsprechende Übungsaufgabe.  $\square$

**Definition.** Sei  $V$  ein Hilbertraum,  $I$  eine beliebige Indexmenge und seien  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von abgeschlossenen, paarweise disjunkten Untervektorräumen von  $V$ . Weiters gelte  $U_i \perp U_j \forall i \neq j$ . Sei

$$U_0 := \bigoplus_{i \in I} U_i := \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in U_i, \exists J \subseteq I \text{ endlich} : x_i = 0 \text{ für } i \in I \setminus J \right\}$$

Dann heißt  $U := \overline{U_0}$  die *Hilbert-Summe* (bzw. *topologische Summe*) der Familie  $(U_i)_{i \in I}$ .

*Bemerkung.* Die Menge  $U_0$  aus obiger Definition besteht lediglich aus endlichen Linearkombinationen, wogegen  $U = \overline{U_0}$  auch unendliche Linearkombinationen beinhaltet, die jedoch in  $V$  konvergieren.

**Definition.** Sei  $X$  eine geordnete Menge.  $X$  heißt *gerichtet*, wenn  $\forall x, y \in X$  ein  $z \in X$  existiert, sodass  $x \leq z$  und  $y \leq z$ .

*Beispiel.* Die natürlichen Zahlen mit der gewöhnlichen Ordnung  $\leq$  ist eine gerichtete Menge. Ebenso die Menge  $\mathbb{N}^n$  mit der komponentenweise Ordnung vermöge  $\leq$ .

**Definition.** Sei  $V$  ein topologischer Raum. Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $(x_i)_{i \in I}$  eine Familie von Elementen in  $V$ . Sei weiters  $\mathcal{F} := \{J \subseteq$

$I \mid J$  endlich } und bezeichne  $S_J := \sum_{j \in J} x_j$ . Dann heißt  $x \in V$  die *Summe* der  $(x_i)_{i \in I}$  bzw.  $\sum_{i \in I} x_i$  ist in  $V$  *summierbar* genau dann wenn

$$\lim_{J \in \mathcal{F}} S_J = x \in V \Leftrightarrow \forall U \subseteq V \text{ Umgebungen von } x \exists J_0 \in \mathcal{F} : S_J \in U \forall J \subseteq J_0$$

**Satz 3.6.** Sei  $V$  ein Hilbertraum. Seien  $(U_i)_{i \in I}$  orthogonale, paarweise disjunkte und abgeschlossene Untervektorräume von  $V$  und sei  $U_0 = \bigoplus_{i \in I} U_i$  und  $U = \overline{U_0}$ . Dann gilt:

- (a)  $U = \{x = \sum_{i \in I} x_i \mid x \text{ summierbar in } V\}$ .
- (b)  $\|\sum_{i \in I} x_i\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2$ .

*Beweis.* (a) Sei  $x \in V$  mit  $x = \sum_{i \in I} x_i$  summierbar, wobei  $x_i \in U_i$ . Dann gilt für alle  $J \in \mathcal{F}$ , dass  $S_J \in U_0$  und somit:  $\lim_{J \in \mathcal{F}} S_J \in \overline{U_0} = U$ . Damit ist  $x \in U$ . Sei andererseits  $x$  ein Element von  $U$ . Setze  $x_i := \pi_i(x)$ , wobei  $\pi_i(\cdot)$  die orthogonale Projektion auf  $U_i$  bezeichnet. Ist nun  $J \subseteq I$  endlich und  $U_J := \bigoplus_{j \in J} U_j$ , dann gilt  $\sum_{j \in J} x_j = \pi_{U_J}(x) =: x_J$ . Also gilt  $\|x\|^2 = \|x_J\|^2 + \|x - x_J\|^2 \forall J \in \mathcal{F}$  (Satz von Pythagoras). Da dies für alle  $J$  stimmt ist somit  $x$  in  $V$  summierbar.

(b) Übung. □

**Definition.** Sei  $V$  ein Hilbertraum. Eine Familie  $(e_i)_{i \in I}$  von Elementen in  $V$  heißt

- (a) *orthogonal*, wenn  $\langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i \neq j$ .
- (b) *orthonormal*, wenn  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j$ .

Man nennt  $(e_i)_{i \in I}$  oft auch *Orthogonal-* bzw. *Orthonormalsystem*.

**Definition.** „, Sei  $(e_i)_{i \in I}$  ein Orthogonal - bzw. Orthonormalsystem.  $(e_i)_{i \in I}$  heißt *maximal* oder *total*, genau dann wenn es kein Element  $e \in V$  gibt, mit  $0 \neq e \neq e_i \forall i \in I$ , sodass  $\langle e, e_i \rangle = 0$ . Man nennt  $(e_i)_{i \in I}$  dann auch *Hilbert-Basis* von  $V$ .

**Lemma 3.2.** Sei  $V$  ein Hilbertraum,  $I$  endliche Indexmenge und  $(e_i)_{i \in I}$  ein Orthonormalsystem in  $V$ . Sei weiters  $V_0 := \langle e_i \mid i \in I \rangle$  und  $x \in V$ . Dann ist

die Orthogonalprojektion von  $x$  auf  $V_0$  gegeben durch

$$x_0 = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

*Beweis.* Es ist  $x_0 \in V_0$ . Also gibt es Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{C} \forall i \in I$ , sodass  $x_0 = \sum_{i \in I} a_i e_i$ . Es ist  $(x - x_0) \perp V_0$  also muss  $\langle x - x_0, e_i \rangle = 0 \forall i \in I$  gelten. Somit gilt  $0 = \langle x - \sum_{i \in I} a_i e_i, e_j \rangle$ , also ist  $a_j = \langle x, e_j \rangle$  für alle  $j \in I$ .  $\square$

*Folgerung.* (a) Ist  $I$  eine endliche Indexmenge, so gilt die *Bessel-Gleichung*:

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2 - d(x, x_0)^2$$

(b) Ist  $I$  beliebig, so gilt die *Bessel-Ungleichung*:

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

*Beweis.* (reell)  $\|x - \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \langle x - \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i, x - \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \langle x, x \rangle - 2 \cdot \langle \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i, x \rangle + \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2 - 2 \cdot \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 + \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2$ .  $\square$

*Bemerkung.* Ist  $(e_i)_{i \in I}$  beliebiges Orthonormalsystem und  $x \in V$ , so sind höchstens abzählbar viele  $\langle x, e_i \rangle$  von Null verschieden, denn  $\{i \in I \mid \langle x, e_i \rangle \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{i \in I \mid |\langle x, e_i \rangle| > \frac{1}{n}\}$ . Der letzte Mengenausdruck ist wegen der Bessel - Ungleichung abzählbar und da abzählbare Vereinigungen von abzählbaren Mengen wieder abzählbar sind, folgt die Behauptung.

**Definition.** Sei  $X$  eine beliebige Menge,  $X \neq \emptyset$ . Dann sei  $\ell^2(X) \subseteq \text{Abb}(X, \mathbb{C})$  definiert durch

- (1) für  $f \in \ell^2(X)$  ist  $f(x) \neq 0$  für höchstens abzählbar viele  $x \in X$ .
- (2)  $\sum_{x \in X} |f(x)|^2$  ist konvergent für alle  $f \in \ell^2(X)$ .

*Beispiel.* Für  $X = \mathbb{N}$  ist  $\ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2$  und für  $X = \{1, \dots, n\}$  ist  $\ell^2(X) = \mathbb{C}^n$  mit  $\|\cdot\|_2$ .

*Bemerkung.* Durch  $\langle f, g \rangle := \sum_{x \in X} f(x) \overline{g(x)}$  wird  $\ell^2(X)$  zu einem Hilbertraum.

**Definition.** Sei  $V$  ein Hilbertraum mit Orthonormalsystem (ONS)  $(e_i)_{i \in I}$ . Für  $x \in V$  bezeichne  $\hat{x} : I \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\hat{x}(i) := \langle x, e_i \rangle$  die durch  $x$  induzierte Abbildung.

*Bemerkung.* Es gilt  $\hat{x}(i) \neq 0$  für höchstens abzählbar viele  $i \in I$ . Also ist  $\sum_{i \in I} |\hat{x}(i)|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$  konvergent in  $\mathbb{C}$ . Wir erhalten somit eine Abbildung  $\Lambda : V \rightarrow \ell^2(I)$  mit  $\Lambda(x) := \hat{x}$ .  $\Lambda$  ist wohldefiniert und linear, weiters werden wir unten zeigen, dass wenn  $(e_i)_{i \in I}$  ein maximales ONS ist,  $\Lambda$  zu einem normerhaltender Isomorphismus wird. Wir können dann Hilberträume vollständig charakterisieren und speziell die Aussage beweisen, dass alle Hilberträume mit abzählbarem maximalem ONS zueinander isomorph sind und somit insbesondere den Satz von Riesz - Fischer ( $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \simeq \ell^2$ ).

**Satz 3.7 (Orthonormalbasen).** Sei  $V$  ein Hilbertraum und  $(e_i)_{i \in I}$  ein ONS. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $(e_i)_{i \in I}$  ist ein maximales ONS.
- (2)  $U_0 := \langle e_i | i \in I \rangle \subseteq V$  ist dicht in  $V$ , d.h.  $\overline{U_0} = V$ . (d.h. jedes  $x \in V$  läßt sich beliebig gut durch endliche Linearkombinationen in  $V$  approximieren.)
- (3)  $\forall x \in V$  gilt die Parseval-Identität:

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} \|\hat{x}(i)\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

- (4)  $\forall x, y \in V$  gilt  $\langle x, y \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_{\ell^2}$ .

Ein maximales ONS, heißt Orthonormalbasis (ONB) von  $V$ . Es gilt dann für  $x \in V$ :

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$$

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (2): Sei  $(e_i)_{i \in I}$  ein maximales ONS. Angenommen  $\overline{U_0} \not\subseteq V$ . Dann existiert ein Element  $e \in V$ ,  $e \neq 0$ , mit  $e \notin \overline{U_0}$ ,  $\|e\| = 1$  und  $e$

orthogonal zu  $\overline{U_0}$  (via Orthogonalprojektion). Also ist  $e$  orthonormal zu allen  $e_i$ . Widerspruch zur Maximalität von  $(e_i)_{i \in I}$ .

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei  $x \in V$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $J \subseteq I$  endlich und  $\alpha_j \in \mathbb{C} \forall j \in J$ , sodass  $\|x - \sum_{j \in J} \alpha_j e_j\| < \varepsilon$ . Setze nun  $V_0 := \langle e_j | j \in J \rangle \subseteq V$ .  $V_0$  ist ein endlich dimensionaler Untervektorraum, und somit abgeschlossen. Sei  $x_0 \in V_0$  die Orthogonalprojektion von  $x$  auf  $V_0$ . Dann gilt:  $x_0 = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j = \sum_{j \in J} \hat{x}(j) e_j$ , mit  $\|x_0\|^2 = \sum_{j \in J} \|\hat{x}(j)\|^2$ . Da aber  $x_0$  den Abstand zu  $x$  minimiert, gilt  $\|x - x_0\| \leq \|x - \sum_{j \in J} \alpha_j e_j\| < \varepsilon$ . Also ist  $(\|x\| - \varepsilon)^2 < \|x_0\|^2 = \sum_{j \in J} \|\hat{x}(j)\|^2 \leq \sum_{i \in I} \|\hat{x}(i)\|^2 \forall \varepsilon > 0$ . Da dies für beliebig kleine  $\varepsilon$  gilt, ist  $\|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} \|\hat{x}(i)\|^2$ . Mit der Besselschen Ungleichung folgt nun sofort die Behauptung.

(3) $\Rightarrow$ (4): Bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  das Skalarprodukt auf  $\ell^2(I)$ . Aus (3) folgt  $\forall x \in V$ :  $\langle x, x \rangle = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle_2$ . Seien nun  $x, y \in V$  beliebig und  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann erhalten wir nach kurzer Rechnung:  $\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle \hat{x} + \alpha \hat{y}, \hat{x} + \alpha \hat{y} \rangle_2$ . Somit ist  $\overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle = \overline{\alpha} \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_2 + \alpha \langle \hat{y}, \hat{x} \rangle_2$ . Durch geeignete Wahl von  $\alpha$  ergibt sich die Behauptung, denn für  $\alpha = 1$  folgt  $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_2$  und mit  $\alpha = i$  erhalten wir  $\operatorname{Im} \langle x, y \rangle = \operatorname{Im} \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_2$ .

(4) $\Rightarrow$ (1): Angenommen  $(e_i)_{i \in I}$  ist kein maximales ONS. Dann gibt es ein Element  $e \in V$ , mit  $\|e\| = 1$ , sodass  $e$  orthogonal zu allen  $e_i \ i \in I$ . Setze  $x = y = e$ :  $1 = \langle e, e \rangle = \langle \hat{e}, \hat{e} \rangle = \sum_{i \in I} |\langle e, e_i \rangle|^2 = 0$  Widerspruch.  $\square$

**Satz 3.8.** Sei  $V \neq \{0\}$  Hilbertraum. Dann gilt:

(a)  $V$  besitzt ein Orthonormalsystem.

(b) Zu einem gegebenen ONS  $(e_i)_{i \in I}$  existiert immer ein maximales ONS in  $V$ , das  $(e_i)_{i \in I}$  enthält. Insbesondere besitzt jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis.

*Beweis.* (a) Da  $V \neq \{0\}$ , gibt es ein Element  $e \in V$ ,  $e \neq 0$ . Dann ist  $\frac{e}{\|e\|}$  normiert und somit ein Orthonormalsystem.

(b) Sei  $(e_i)_{i \in I}$  ein ONS. Betrachte

$$\mathcal{B} := \{(v_i)_{i \in I} \mid (v_i)_{i \in I} \text{ ONS, das } (e_i)_{i \in I} \text{ enthält}\}.$$

Es ist  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ . Wir zeigen  $\mathcal{B}$  ist induktiv geordnet: Sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$  bzgl.  $\subseteq$  total geordnete Menge. Dann ist die Vereinigung aller ONS in  $\mathcal{C}$  eine obere Schran-

ke von  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{B}$ . Nach dem Lemma von Zorn besitzt  $\mathcal{B}$  somit ein maximales Element und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

*Bemerkung.* Da hier das Lemma von Zorn verwendet wird, ist dieser Beweis nicht konstruktiv. Zur Konstruktion einer Orthonormalbasis betrachte das *Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren* etwa in Werner [6] p.202.

**Satz 3.9 (Klassifikation).** *Jeder Hilbertraum  $V \neq \{0\}$  ist isometrisch isomorph (also norm- und skalarprodukterhaltend) zu  $\ell^2(I)$ , wobei  $I$  Indexmenge einer Orthonormalbasis  $(e_i)_{i \in I}$  von  $V$  ist.*

*Speziell: Ist  $V$  separabel, d.h.  $V$  besitzt abzählbare dichte Teilmenge (bzw. äquivalent:  $V$  besitzt abzählbare ONB), so ist  $V \simeq \ell^2(\mathbb{N})$ .*

*Insbesondere gilt:  $L^2([0, 1]) \simeq \ell^2(\mathbb{N})$  (Satz von Riesz-Fischer).*

*Beweis.* Die Abbildung  $\Lambda : V \longrightarrow \ell^2(I)$ ,  $\Lambda(x) = \hat{x}$  ist wohldefiniert und linear. Weiters ist  $\|\Lambda\| = 1$ , da  $\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = \langle x, x \rangle$ . Insbesondere ist  $\|\hat{x}\| = \|x\|$ , woraus die Injektivität folgt. Sei nun  $f \in \ell^2(I)$ , d.h.  $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$  und  $\sum_{i \in I} |f(i)|^2 < \infty$ . Setze  $x = \sum_{i \in I} f(i)e_i$ . Sei o. B. d. A.  $I = \mathbb{N}$ . Die Folge der Partialsummen  $\sum_{i=0}^n |f(i)|^2$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{C}$ . Leicht zeigt man, dass auch die Folge  $\sum_{i=0}^n f(i)e_i$  eine Cauchyfolge in  $V$  ist. Aus der Vollständigkeit von  $V$  folgt nun die Konvergenz. Aus der Eindeutigkeit der Darstellung folgt, dass  $f(i) = \langle x, e_i \rangle$ , also  $f = \hat{x}$ . Also ist  $\Lambda$  surjektiv und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

*Beispiel.* Die Abbildung  $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ ,  $p(t) = e^{it}$  ist surjektiv, differenzierbar und  $2\pi$ -periodisch.  $p$  induziert die Abbildung  $\tilde{p} : [-\pi, \pi] \longrightarrow S^1$ ,  $\tilde{p} = p|_{[-\pi, \pi]}$ , bijektiv ( $p$  ist eine Überlagerung der  $S^1$ ). Sei

$$\Pi := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f(t) = f(t + 2\pi) \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Dann identifizieren wir  $L^2(S^1, \mathbb{C})$  mit  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \Pi$ , sowie mit  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Dabei ist

$$L^2(S^1, \mathbb{C}) := \{f : S^1 \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_{S^1} |f(\xi)|^2 d\lambda(\xi) < \infty\}$$

mit dem Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(\xi) \overline{g(\xi)} d\lambda(\xi)$$

Damit ist  $L^2(S^1, \mathbb{C})$  ein Hilbertraum mit ONS  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{N}}$  für  $t \in [-\pi, \pi]$ . Es ist  $\langle e^{int}, e^{imt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{nm}$ .

**Satz 3.10.**  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Orthonormalbasis von  $L^2(S^1, \mathbb{C})$ . Also lässt sich jedes  $f \in L^2(S^1, \mathbb{C})$  in eine komplexe Fourierreihe entwickeln:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, e^{in \cdot} \rangle e^{int},$$

wobei  $e^{in \cdot} \in L^2(S^1, \mathbb{C})$  die Abbildung  $t \mapsto e^{int}$  bezeichnet. Diese Reihe konvergiert bezüglich der  $L^2$ -Norm.

*Beweis.* Satz von Stone-Weierstraß □

**Satz 3.11 (Stone-Weierstraß).** Sei  $X$  ein kompakter, metrischer Raum und  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  eine Unteralgebra, für die folgende Voraussetzungen gelten:

- (1)  $\mathcal{A}$  trennt die Punkte von  $X$ , d.h.  $\forall x, y \in X$  mit  $x \neq y$ , gibt es ein  $g \in \mathcal{A}$ , sodass  $g(x) \neq g(y)$ .
- (2)  $\mathcal{A}$  enthält die konstanten Funktionen  $k : X \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto k$ .
- (3)  $\mathcal{A}$  ist abgeschlossen unter komplexer Konjugation, d.h. ist  $f = g + i \cdot h \in \mathcal{A}$ , so ist auch  $f = g - i \cdot h \in \mathcal{A}$ .

Dann ist  $\mathcal{A}$  dicht bezüglich  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Mit anderen Worten, es existiert für alle  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein Element  $g \in \mathcal{A}$ , sodass  $\|f - g\| < \varepsilon$ .

*Beweis.* Wir beweisen hier lediglich die reelle Version des Satzes. Dazu verlangen wir vorerst noch die Zusatzvoraussetzung, dass für je zwei Elemente  $f, g \in \mathcal{A}$  auch  $\min(f, g)$  bzw.  $\max(f, g)$  in  $\mathcal{A}$  liegen.

Sei also  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  und  $\varepsilon > 0$ . Für fest gewählte  $x \neq y$  in  $X$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  existiert nach Voraussetzung (1) ein  $g \in \mathcal{A}$  mit  $g(x) \neq g(y)$ . Setze  $h_{xy}(z) := a + (b - a) \cdot \frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}$  für  $z \in X$ . Nach Voraussetzung (2) und da  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist, gilt  $h \in \mathcal{A}$ . Es gilt  $h(x) = a$  und  $h(y) = b$ . Wir wählen für  $x, y$  in  $X$   $a := f(x)$  bzw.  $b := f(y)$ , d.h. die Funktion  $h_{xy}$  stimmt mit  $f$  in 2 fixen Punkten  $x, y$  überein. Da  $h_{xy}(z)$  stetig ist, gibt es zu jedem  $y \in X$  eine offene Umgebung  $U_y$  von  $y$ , sodass für alle  $z \in U_y$   $h_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon$ .

Diese offenen Umgebungen liefern eine offene Überdeckung von  $X$  und da  $X$  kompakt ist, existieren  $y_1, \dots, y_n \in X$ , sodass  $X = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ . Setze nun  $h_x := \min(h_{xy_1}, \dots, h_{xy_n}) \in \mathcal{A}$ . Mit dieser Konstruktion gilt:  $h_x(x) = f(x)$  und  $h_x(z) < f(z) + \varepsilon$ . Zudem ist  $h_x$  stetig und somit gibt es eine offene Umgebung  $V_x \subseteq X$  von  $x$  mit  $h_x(z) > f(z) - \varepsilon \forall z \in V_x$ . Die Mengen  $(V_x)_{x \in X}$  liefern eine offene Überdeckung des Kompaktums  $X$ , und somit gibt es  $x_1, \dots, x_k$  in  $X$  mit  $X = \bigcup_{i=1}^k V_{x_i}$ . Setze nun  $g := \max(h_{x_1}, \dots, h_{x_k})$ , dann gilt nach Konstruktion, dass  $\forall z \in X$   $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$ , also gilt  $\|f - g\| < \varepsilon$ , mit  $g \in \mathcal{A}$ . Somit ist  $\mathcal{A}$  dicht in  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

Nun werden wir noch die Redundanz der Zusatzvoraussetzung beweisen. Für zwei Elemente  $f, g \in \mathcal{A}$  ist  $\max(f, g) = \frac{1}{2}((g + f) + |g - f|)$  und  $\min(f, g) = \frac{1}{2}((g + f) - |g - f|)$ . Da  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist, ist es ausreichend zu zeigen, dass für ein  $f \in \mathcal{A}$  folgt  $|f| \in \mathcal{A}$ . Da  $X$  kompakt ist, gilt  $f \in \mathcal{A}$  beschränkt, etwa durch  $c \in \mathbb{R}$ .

Wir zeigen jedoch zuerst folgenden Hilfssatz:

Sei  $X \neq \emptyset$  beliebige Menge und  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$  ausgestattet mit der Supremums - Norm. Sei weiters  $B_0 \subseteq \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$  eine Unter algebra, die abgeschlossen bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  ist und die konstanten Funktionen enthält. Dann gilt: Ist  $f \in B_0$ ,  $f(x) \geq 0 \forall x \in X$ , so ist auch  $\sqrt{f} \in B_0$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Fall 1: Sei  $f \in B_0$ ,  $f \geq 0$  und  $\|1 - f\| < 1$ . Dann existiert ein  $u \in B_0$  mit  $\|u\|_\infty \leq 1$ , sodass  $(1 - u)^2 = f$ , also  $\sqrt{f} \in B_0$ . Um dies einzusehen betrachte die Abbildung  $\alpha : V_\varepsilon \rightarrow V_\varepsilon$  mit  $\alpha(u) := \frac{1}{2}(g + u^2)$ , wobei  $g = 1 - f$  und  $u \in V_\varepsilon := \{u \in B_0 \mid \|u\|_\infty < \varepsilon\}$ . Hierbei soll  $\varepsilon > 0$  so gewählt sein, dass  $\|1 - f\|_\infty = \|g\|_\infty < \varepsilon < 1$ . Die Abbildung  $\alpha$  ist wohldefiniert und kontrahierend, denn es gilt  $\|\frac{1}{2}(g + u^2)\| \leq \frac{1}{2}(\|g\| + \|u^2\|) < \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2) < \varepsilon$ . Also ist  $\alpha$  wohldefiniert und wegen  $\|\frac{1}{2}(g + u^2) - \frac{1}{2}(g + v^2)\| = \frac{1}{2}\|u^2 - v^2\| = \frac{1}{2}\|u - v\| \cdot \|u + v\| \leq \frac{1}{2}(\|u\| + \|v\|) \cdot \|u - v\| < \varepsilon\|u - v\|$  kontrahierend.

Wir können also den Banachschen Fixpunktsatz auf  $\alpha$  anwenden und erhalten ein eindeutig bestimmtes Element  $u \in V_\varepsilon$  mit  $\alpha(u) = u$ , also  $\frac{1}{2}(g + u^2) = u$  und somit  $(1 - u)^2 = f$ .

Fall 2: Sei  $\|1 - f\|_\infty \geq 1$  und  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) \geq c > 0$  für alle  $x \in X$ , dann zeigt man leicht, dass es eine Zahl  $b > 0$  gibt, sodass  $\|1 - bf\| < 1$ . Also ist

$\sqrt{bf} \in B_0$  und somit auch  $\sqrt{f} \in B_0$ .

Fall 3: Ist  $f \in B_0$ ,  $f \geq 0$ , sodass  $f+1/n$ , für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Voraussetzungen des 1. oder 2. Falles erfüllt, dann ist  $\sqrt{f+1/n} \in B_0$ . Da aber  $\sqrt{\cdot}$  stetig ist, liegt auch  $f \in B_0$ .

Somit ist dieser Hilfsatz gezeigt und wir können die Aussage für unsere Zwecke verwenden. Setze  $X := [-c, c]$  und  $B_0 = \mathbb{R}[t]$ . Dann existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Polynom  $P(t)$ , mit  $|t| - \varepsilon < P(t) < |t| + \varepsilon$ . Somit ist  $|P(f(z)) - |f(z)|| < \varepsilon \forall z \in X$ . Da  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist, gilt  $(P \circ f)(z) = P(f(z)) \in \mathcal{A}$ , also  $|f| \in \mathcal{A}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Sei  $X$  ein kompakter, metrischer Raum mit  $|X| \geq 2$ . Wir haben bereits gezeigt, dass  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ , ausgestattet mit  $\|\cdot\|_\infty$  ein Banachraum ist. Mit der punktweisen Multiplikation  $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$  wird dieser Raum zu einer kommutativen  $\mathbb{C}$ -Algebra. Aufgrund der Beziehung  $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$  ist  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  sogar eine Banachalgebra.

*Bemerkung.* Sei  $V$  ein normierter Vektorraum mit zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ , für die  $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \forall x \in V$  gelte. Dann ist die von  $\|\cdot\|_1$  induzierte Topologie feiner als die von  $\|\cdot\|_2$  induzierte Topologie. Ist nun  $A \subseteq V$  dicht bezüglich  $\|\cdot\|_1$ , dann ist  $A$  auch dicht bezüglich  $\|\cdot\|_2$ .

Mit diesen Bemerkungen und dem Satz von Stone-Weierstraß, können wir uns dem Beweis von 3.10 widmen:

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A} := \langle e^{int}, n \in \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$ . Dann erfüllt  $\mathcal{A}$  die Voraussetzungen von Stone-Weierstraß (vgl. Übungen), also ist  $\mathcal{A}$  dicht bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$ . Weiters gilt für  $f \in \mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$ , dass  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S^1} \|f(x)\| \geq \|f\|_2$ . Nach obiger Bemerkung ist somit  $\mathcal{A}$  auch Dicht bezüglich  $\|f\|_2$ . Es fehlt uns jetzt nur noch die Dichtheit von  $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$  in  $L^2(S^1, \mathbb{C})$  bezüglich der  $L^2$ -Norm, doch dazu verweisen wir auf Rudin [3].  $\square$

*Bemerkung.* Nach 3.10 lässt sich jedes  $f \in L^2(S^1, \mathbb{C})$  in seine Fourierreihe entwickeln. Diese Reihe konvergiert bezüglich  $\|\cdot\|_2$ , jedoch ist die punktweise Konvergenz damit noch nicht gewährleistet. Um dies zu erreichen, muss etwa

gelten:

$$\exists \delta > 0 : \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{1}{t} (f(x+t) - f(x)) \right| dt < \infty$$

Diese Forderung heißt *Dini-Bedingung* und ist z.B. erfüllt, wenn  $f$  stetig und rechts- und linksseitig differenzierbar ist. Ist  $f$  sogar differenzierbar, dann konvergiert die Fourierreihe sogar gleichmäßig gegen  $f$ . Zum Thema *Konvergenz von Fourierreihen* vergleiche etwa Heuser [5][p.136 ff]

*Anwendung. Wavelets* (Bildverarbeitung)

Die Idee hier ist eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  durch eine Familie von Funktionen zu approximieren, die aus einer einzigen Funktion durch Verschiebung und Stauchung bzw. Streckung hervorgeht. Diesen Prozess nennt man *Umskalierung* und ist in der Literatur meistens unter dem Begriff der *Multi-Skalenanalyse* zu finden. Als einfachstes Beispiel eines Wavelets betrachte das *Haar-Wavelet*:

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & x \notin [0, 1] \\ 1 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Die Umskalierung von  $\varphi$  wird realisiert durch

$$\varphi_{mn}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \cdot \varphi(2^{-m}x - n) \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Hierbei bewirkt z.B. die Erhöhung des Index  $m$  um 1 eine Verdoppelung des Trägers der Funktion  $\varphi_{mn}$  (d.h. Trägerintervall wird zweimal so lang) und simultan zu einer Halbierung des Funktionswertes. Bei Erhöhung des Index  $n$  um den Wert 1 hingegen wird die ganze Funktion um 1 nach rechts verschoben. Die Familie  $(\varphi_{mn})_{m,n \in \mathbb{Z}}$  besitzt nun die angenehme Eigenschaft, dass sie eine ONB von  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist.

Die Orthonormalität der Funktionen  $\varphi_{mn}$  lässt sich leicht durch Nachrechnen prüfen. Weiters gilt, dass die stückweise konstanten Funktionen dicht liegen in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Also reicht es aus zu überprüfen, dass jede stückweise konstante Funktion sich durch Funktionen  $\varphi_{mn}$  approximieren lässt. Dies überlassen wir dem Leser als Übung.

In der Signal- und Bildverarbeitung werden aber hauptsächlich stetige Wavelets verwendet (z.B. Daubechies-Wavelets), jedoch würde eine Vertiefung in

dieses Gebiet den Rahmen sprengen und wir verweisen zum Beispiel auf Christensen und Jensen [21].

# Kapitel 4

## Der Begriff der Basis in Vektorräumen

### 4.1 Basen in endlich-dimensionalen Vektorräumen

*Wiederholung aus der linearen Algebra:* Sei  $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$  die Menge der geordneten  $n$ -Tupel, betrachtet als  $n$ -faches kartesisches Produkt von  $\mathbb{R}$  mit sich selbst und mit den natürlichen Projektionen  $\text{proj}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$ . Wir können den  $\mathbb{R}^n$  mit verschiedenen algebraischen und topologischen Strukturen versehen, z. B.

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  als reeller Vektorraum,
- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, e_1, \dots, e_n)$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Standard-Basis,
- $(\mathbb{R}^n, T_E)$  als topologischer Raum mit der euklidischen Topologie,
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  als Vektorraum mit Norm,
- $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  als Hilbertraum mit Skalarprodukt,
- $(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$  als differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Karte  $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei der Definitionsbereich als Menge oder topologischer Raum und der Bildbereich als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit euklidischer Topologie zu betrachten ist.

Man schreibt meistens nur  $\mathbb{R}^n$  und die betrachtete Struktur ist klar aus dem Kontext.  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, e_1, \dots, e_n)$  ist das Paradebeispiel eines endlich-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums mit Basis.

**Satz 4.1 (Charakterisierung von Erzeugendensystemen und Basen).**

Sei  $V$  ein beliebiger  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, seien  $v_1, \dots, v_k \in V$  beliebige Elemente, und  $T : \mathbb{R}^k \rightarrow V$  die lineare Abbildung, die  $e_i \in \mathbb{R}^k$  auf  $v_i$  abbildet (d. h.  $T(\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$ ). Dann gilt:

- (a)  $V$  ist genau dann endlich-dimensional, wenn es für ein  $n \in \mathbb{N}$  einen  $\mathbb{R}$ -Isomorphismus zwischen  $\mathbb{R}^n$  und  $V$  gibt.
- (b)  $v_1, \dots, v_k$  sind genau dann ein  $\mathbb{R}$ -Erzeugendensystem von  $V$ , wenn  $T$  surjektiv ist.
- (c)  $v_1, \dots, v_k$  sind genau dann linear unabhängig, wenn  $T$  injektiv ist.
- (d)  $v_1, \dots, v_k$  sind genau dann eine Basis von  $V$ , wenn  $T$  bijektiv (also ein Isomorphismus) ist.
- (e)  $v_1, \dots, v_k$  sind genau dann eine Orthonormalbasis von  $V$  bezüglich eines gegebenen Skalarproduktes auf  $V$ , wenn  $T$  ein isometrischer Isomorphismus ist.

*Beweis.* Lineare Algebra. □

## 4.2 Basen in unendlich-dimensionalen Vektorräumen

*Problem:* Wie interpretiert man unendliche Linearkombinationen  $\sum_{i \in I} c_i v_i$ ,  $v_i \in V$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ? Dazu ist ein Konvergenzbegriff (Topologie) auf  $V$  notwendig.

**Definition.**  $V$  heißt unendlich-dimensional  $:\Leftrightarrow V$  ist nicht endlich-dimensional.  
 $\Leftrightarrow V$  besitzt keine endliche Basis.

**Definition.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\{v_i\}_{i \in I}$  Familie von Elementen in  $V$ ,  $I$  beliebige Indexmenge (meistens abzählbar, z. B.  $i \in \mathbb{N}$ ).  $\{v_i\}_{i \in I}$  heißt (algebraisches) Erzeugendensystem von  $V$ .  $\Leftrightarrow$  Für alle  $x \in V$  gibt es eine endliche Teilmenge  $J \subseteq I$  und  $c_j \in \mathbb{R}$ ,  $j \in J$ , mit  $x = \sum_{j \in J} c_j v_j$  (endliche Linearkombination).

$\{v_i\}_{i \in I}$  heißt (algebraisch) linear unabhängig.  $\Leftrightarrow$  Für alle endlichen Mengen  $J \subseteq I$  und für alle  $c_j \in \mathbb{R}$ ,  $j \in J$ , folgt aus  $\sum_{j \in J} c_j v_j = 0$ , dass  $c_j = 0$  für alle  $j \in J$ .  $\Leftrightarrow$  Für alle  $x \in \mathbb{R} \langle v_i : i \in I \rangle$  (algebraisches Erzeugnis) ist die Darstellung  $x = \sum_{j \in J} c_j v_j$  eindeutig.

$\{v_i\}_{i \in I}$  heißt (algebraische) Basis von  $V \Leftrightarrow \{v_i\}_{i \in I}$  ist ein (algebraisches) Erzeugendensystem und (algebraisch) linear unabhängig.

*Bemerkung.* Diese Definitionen sind sehr restriktiv, da nur endliche Linearkombinationen zugelassen werden.

*Beispiel.* (1)  $V = \mathbb{R}[x]$  oder  $V = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  Polynomring.  $V$  besitzt eine algebraische Basis, etwa die Monome  $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  bzw.  $\{x^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ . Die Vektorräume  $V = \mathbb{R}[[x]]$  bzw.  $V = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$  der formalen Potenzreihen und  $V = \mathbb{R}\{x\}$  bzw.  $V = \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$  der konvergenten Potenzreihen besitzen keine (praktischen) algebraische Basen.

(2) Die  $\{e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\}_{i \in \mathbb{N}}$  sind im  $\ell^p(\mathbb{R})$  linear unabhängig aber keine algebraische Basis.

(3) Jeder Vektorraum besitzt ein algebraisches Erzeugendensystem, nämlich alle seine Elemente (nicht nützlich).

**Definition (topologische Basis).** Sei  $V$  ein topologischer  $\mathbb{R}$ -Vektorraum (oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum). Sei weiters  $\{v_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Elementen in  $V$ ,  $I$  Indexmenge (meistens ist  $I = \mathbb{N}$ ).

(a)  $\{v_i\}_{i \in I}$  heißt topologisches Erzeugendensystem von  $V$ .  $\Leftrightarrow$  Für alle  $x \in V$  gibt es  $c_i \in \mathbb{R}$  mit  $x = \sum_{i \in I} c_i v_i$ .

Für  $I = \mathbb{N}$  bedeutet dies: es gibt  $c_i \in \mathbb{R}$ , sodass die Folge der Partialsummen  $\sum_{i=1}^n c_i v_i$  in  $V$  mit Limes  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_i v_i$  konvergiert. Es gilt also  $V = \overline{\langle v_i : i \in \mathbb{N} \rangle}$ .

Für  $I$  beliebig: es gibt  $c_i \in \mathbb{R}$  mit  $x = \lim_{J \subseteq I \text{ endlich}} \sum_{j \in J} c_j v_j$ . Dabei bedeutet  $x = \lim_{J \subseteq I \text{ endlich}} x_J$ , dass für alle Umgebungen  $U$  von  $x$  in  $V$  ein endliches  $K \subseteq I$  existiert mit  $x_J \in U$  für alle endlichen  $J \subseteq I$  mit  $K \subseteq J$ .

In Worten:  $\{v_i\}_{i \in I}$  ist topologisches Erzeugendensystem.  $\Leftrightarrow$  jedes  $x \in V$  kann durch endliche Linearkombination beliebig gut approximiert werden.

(b)  $\{v_i\}_{i \in I}$  heißt topologisch linear unabhängig.  $\Leftrightarrow$  Ist  $\sum_{i \in I} c_i v_i = 0$  (also ist die Reihe konvergent mit Limes 0), dann sind alle  $c_i = 0$ .  $\Leftrightarrow$  Für alle  $x \in \langle v_i : i \in I \rangle$  ist die Darstellung  $x = \sum_{i \in I} c_i v_i$  mit  $c_i \in \mathbb{R}$  eindeutig.

(c)  $\{v_i\}_{i \in I}$  heißt topologische Basis von  $V$ .  $\Leftrightarrow \{v_i\}_{i \in I}$  ist topologisches Erzeugendensystem und topologisch linear unabhängig.  $\Leftrightarrow \{v_i\}_{i \in I}$  heißt *Schauder-Basis*.

*Bemerkung.* In der unendlichen Linearkombination  $x = \sum_{i \in I} c_i v_i$  wird nur die Konvergenz der Partialsummen  $x = \sum_{i \in J} c_i v_i$  mit  $J \subseteq I$  endlich gefordert, nicht aber die Kovertgenz der Reihe  $x = \sum_{i \in I} c_i$  in  $\mathbb{R}$ .

*Bemerkung.* Ist  $\{v_i\}_{i \in I}$  Familie von Elementen in einem topologischen Vektorraum  $V$ , so heißt  $\langle v_i : i \in I \rangle$  das algebraische Erzeugnis der  $\{v_i\}_{i \in I}$  (kleinster Untervektorraum von  $V$  der alle  $v_i$  enthält) und  $\langle v_i : i \in I \rangle = \{ \sum_{i \in I} c_i v_i : c_i \in \mathbb{R}, \text{ Reihe konvergiert in } V \}$  heißt das topologische Erzeugnis der  $\{v_i\}_{i \in I}$  (kleinster abgeschlossener Untervektorraum von  $V$ , der alle  $v_i$  enthält).

*Beispiel.* (a) Die Menge der formalen Potenzreihen  $\mathbb{R}[[x]]$  mit der  $x$ -adischen Topologie. Sei  $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von formalen Potenzreihen, d.h.

$$S_n(x) = \sum_{k \geq 0} a_k^n x^k,$$

mit  $a_k^n \in \mathbb{R}$ . Die Folge  $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $x$ -adisch, wenn die Koeffizientenfolgen  $(a_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $k$  stationär werden. Anders ausgedrückt heißt das:

Zwei Potenzreihen  $T(x)$  und  $S(x)$  sind *nahe* in dieser Topologie, wenn die Koeffizienten von  $S$  und  $T$  bis zu einem *großen*  $k$  übereinstimmen, wenn also  $S - T$  eine Potenzreihe mit *großem* Untergrad ist. Für diese Topologie bilden die Monome  $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine topologische Basis, denn jede formale Potenzreihe  $S(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  ist eindeutiger Limes von

den Partialsummen:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

da die Polynome dicht in der Menge der formalen Potenzreihen liegen.

(b) Für  $r > 0$  sei

$$\mathbb{C}\{x\}_r = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty \right\}$$

die Menge der Potenzreihen mit Konvergenzradius  $\rho \leq r$ .  $\mathbb{C}\{x\}_r$  ist mit der Norm  $\| \sum a_k x^k \| := \sum |a_k| r^k$  ein Banachraum. Auch hier bilden die Monome  $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein topologische Basis.

(c) Die Räume  $\ell^p(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{R}, \sum_{k \geq 0} |a_k|^p < \infty\}$  haben für  $1 \leq p < \infty$  die topologische Basis  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , wobei  $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ . Hingegen besitzt  $\ell^\infty(\mathbb{R})$  keine abzählbare topologische Basis.

(d) Der Räume  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  und  $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  besitzen die topologische Basis  $\{\cos(kx), \sin(kx)\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

(e) Der Raum  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  besitzt als topologisches Erzeugendensystem die Polynomfunktionen, also die Monome, d.h. jede stetige Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$  kann bzgl. der Supremums-Norm beliebig gut durch eine endliche Linearkombination von Monomen (also Polynome) approximiert werden. Zudem sind die Monome top. linear unabhängig.

*Bemerkung.* Ist  $\{v_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Elementen in einem topologischen Vektorraum  $V$ , so heißt

$$\langle v_i, i \in I \rangle := \left\{ \sum_{i \in E} c_i v_i \mid E \subseteq I, E \text{ endlich}, c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

das algebraische Erzeugnis der  $\{v_i\}_{i \in I}$ . Dies ist der kleinste Untervektorraum von  $V$ , der alle  $v_i$  enthält. Die Menge

$$\overline{\langle v_i, i \in I \rangle} = \left\{ \sum_{i \in I} c_i v_i \mid c_i \in \mathbb{R}, \text{Reihe konvergiert} \right\}$$

heißt das topologische Erzeugnis der  $\{v_i\}_{i \in I}$ , und ist der kleinste *abgeschlossene* Untervektorraum, der alle  $v_i$  enthält.

**Definition.** ein topologischer Vektorraum  $V$  heißt *separabel*, genau dann wenn  $V$  eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

*Bemerkung.* Ein separabler Banachraum  $V$  hat nicht notwendigerweise eine abzählbare topologische Basis (Enflo 1973), aber zumindest ein abzählbares topologisches Erzeugendensystem.

**Satz 4.2.** *Sei  $V$  ein reeller oder komplexer Banachraum. Dann gilt:  $V$  ist separabel, genau dann wenn  $V$  ein abzählbares topologisches Erzeugendensystem besitzt.*

*Beweis.* Sei  $V$  separabel und  $A \subseteq V$  abzählbar und dicht. Dann ist  $A \subseteq \langle A \rangle \subseteq V$ . Da  $V = \overline{A} = \langle A \rangle \subseteq V$  ist  $\langle A \rangle = V$ . Also ist  $A$  ein abzählbares topologisches Erzeugendensystem.

Nun sei  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein topologisches Erzeugendensystem von  $V$ . Betrachte dazu die abzählbare Menge  $B := \overline{\langle v_i | i \in \mathbb{N} \rangle} = \{ \sum_{i=0}^n c_i v_i | n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{Q} \}$ . Behauptung:  $B$  ist dicht in  $V$ . Sei  $x \in V$  und  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , mit  $\|x - \sum_{i=0}^n c_i v_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Wähle weiters  $\tilde{c}_i \in \mathbb{Q}$ , mit  $|c_i - \tilde{c}_i| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \|v_i\|$ . Mit dieser Konstruktion folgt nach einfacher Rechnung, dass  $\|x - \sum_{i=0}^n \tilde{c}_i v_i\| < \varepsilon$ . Also ist  $B$  dicht in  $V$ .  $\square$

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum, mit Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Dann läßt sich jedes  $x \in V$  eindeutig schreiben als

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Betrachte nun für  $1 \leq i \leq n$  die Abbildung  $v_i^* : V \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $v_i^*(v) = v_i$ . Diese Abbildung ist wohldefiniert, da die Koeffizienten bzgl. einer Basis eindeutig sind, und linear, also stetig.

**Satz 4.3.** *Sei  $V$  ein Banachraum und  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine topologische Basis von  $V$ . Für  $x \in V$  seien  $x_i \in \mathbb{R}$  derart, dass*

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i v_i$$

*Dann ist die induzierte Abbildung*

$$\begin{aligned} v_i^* : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

*für alle  $i \in \mathbb{N}$  wohldefiniert, linear und stetig.*

*Beweis.* (Skizze)

- (a) Es ist klar, dass  $v_i^*$  wohldefiniert ist.
- (b)  $v_i^*$  linear: Übung.
- (c) Um die Stetigkeit der  $v_i^*$  zu zeigen, definiere auf  $V$  die Norm  $\|x\| := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\sum_{i=0}^k x_i v_i\|_V$ . Diese Norm ist äquivalent zu der bereits existierenden Norm  $\|\cdot\|_V$  auf  $V$ . Zeige nun die Stetigkeit der  $v_i^*$  bzgl. dieser Norm. (siehe auch [6])

□

Aus der Analysis wissen wir, dass die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i}$  divergiert, jedoch die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}$  konvergiert, jedoch kann man durch Umordnung der Summationsreihenfolge erreichen, dass die Reihe jeden beliebigen Wert annimmt oder sogar divergiert. Dies gibt Anlass zu folgender

**Definition.** Sei  $V$  ein separabler topologischer Vektorraum,  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare top. Basis.  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  heißt *unbedingt* (engl. *unconditioned*) konvergent, genau dann wenn für alle Permutationen  $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$  gilt,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i v_i < \infty \Leftrightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} c_{\sigma(i)} v_{\sigma(i)} < \infty$$

D.h. Konvergenz der Linearkombinationen hängt nicht von der Anordnung der Linearkombinationen ab.

Erinnerung: Nach der Lemma von Zorn existiert für jeden Vektorraum  $V$  eine algebraische Basis, auch *Hamel-Basis* genannt. Wir benötigen dazu keinen Konvergenzbegriff, da hier nur endliche Linearkombinationen auftreten. Algebraische Basen hingegen entsprechen unendlichen Linearkombinationen.

**Satz 4.4.** Sei  $V$  ein topologischer Vektorraum,  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Familie von Elementen in  $V$ . Betrachte die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow V \\ e_i &\longmapsto v_i \end{aligned}$$

(a)  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist ein top. EZS von  $V$ , genau dann wenn das Bild  $\text{Im}(T) \subseteq V$  dicht liegt. So eine Abbildung  $T$  nennt man dominant.

(b)  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist eine top. Basis von  $V$ , genau dann wenn  $T$  dominant und  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  top. linear unabhängig ist.

*Beweis.* klar nach Definition. □

**Definition.** Sei  $V$  ein reeller Banachraum,  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine abz. Familie von Elementen in  $V$ . Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \ell^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow V \\ e_i &\longmapsto v_i \end{aligned}$$

D.h. für eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$  ist  $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i v_i$ .

(a)  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  heißt *Bessel-Folge* (od. *Hilbert - Folge*), wenn  $T$  wohldefiniert und linear ist, d.h.  $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i v_i$  konvergiert für alle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < \infty$ .

(b)  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  heißt *Rahmen* (engl. *frame*), wenn  $T$  wohldefiniert und surjektiv ist, d.h. jedes  $x \in V$  lässt sich schreiben als konvergente Linearkombination  $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i v_i$ , wobei  $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < \infty$ .

(c)  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  heißt *Riesz-Basis* von  $V$ , wenn  $T$  wohldefiniert und bijektiv ist, d.h. jedes  $x \in V$  lässt sich eindeutig schreiben als konvergente Linearkombination  $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i v_i$ , wobei  $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < \infty$ .

**Satz 4.5.** Sei  $V$  ein reeller Banachraum,  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine abz. Familie von Elementen in  $V$ .

$$\begin{aligned} T : \ell^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow V \\ e_i &\longmapsto v_i \end{aligned}$$

(a) Ist  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Bessel - Folge in  $V$ , so ist  $T$  stetig, d.h. es existiert ein  $B \in \mathbb{R}$  sodass

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i v_i \right| \leq B \cdot \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i^2} = B \cdot \|(c_i)_{i \in \mathbb{N}}\|$$

- (b) Ist  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein Rahmen in  $V$ , so ist  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein top. EZS von  $V$ .
- (c) Ist  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Riesz-Basis von  $V$ , so ist  $T$  ein top. Isomorphismus.
- (d) Ist  $V$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . dann gilt:  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist eine ONB von  $V$ , genau dann wenn  $T$  ein isometrischer Isomorphismus ist.

*Beweis.* (a) Sei  $T$  wohldefiniert. Es ist klar, dass  $T$  linear ist. Ferner da  $\sum c_i v_i$  für alle Folgen  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$  konvergiert, ist die Folge  $(\sum_{1 \leq i \leq n} c_i v_i)$  konvergent für alle  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$ . Betrachte nun die Abbildungen

$$T_n : \ell^2(\mathbb{R}) \longrightarrow V$$

$$(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \longmapsto \sum_{i=0}^n c_i v_i$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert, linear und stetig. Weiters konvergiert  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $T$ . Somit gilt nach 2.8, dass der Grenzwert  $T$  bereits stetig ist.

- (b) per Definition
- (c) folgt aus 2.7
- (d) vgl. Kapitel 3 □

**Satz 4.6.** Sei  $V$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein abz. Familie von Elementen in  $V$ .

- (a)  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist eine Bessel - Folge in  $V$ , genau dann wenn es ein  $B > 0$  gibt, sodass

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle v, v_i \rangle|^2 \leq B \cdot \|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

(das minimale  $B$  ist  $\|T\|^2$ ).

- (b)  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist ein Rahmen in  $V$ , genau dann wenn es  $A, B > 0$  gibt, sodass

$$A \cdot \|v\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle v, v_i \rangle|^2 \leq B \cdot \|v\|^2 \quad \forall v \in V$$

(das maximale  $A$  ist  $\|(TT^*)^{-1}\|^{-1}$ ).

- (c) Für  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist äquivalent:

1.  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist eine Riesz - Basis in  $V$ .

2.  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist ein Rahmen und für  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\ell^2(\mathbb{R})$  gilt, dass aus  $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i v_i = 0$  folgt, dass  $x_i = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
3.  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist ein Rahmen, und

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \langle v_i \rangle^\perp = \{0\}.$$

4.  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist ONB bzgl. eines Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  auf  $V$ , dass zu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  äquivalent ist.

(e)  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ist eine ONB von  $V$ , genau dann wenn für alle  $v \in V$  gilt:

$$\|v\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle v, v_i \rangle|^2$$

(D.h.  $A = B = 1$ )

*Beweis.* siehe [20] und [24]

□

# Kapitel 5

## Lineare Operatoren

$V$  normierter VR über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , oder ein Banachraum.

**Definition.** Ein (beschränkter/stetiger) Operator auf  $V$  ist eine lineare stetige Abbildung  $T : V \rightarrow V$ .  $L(V) = \{T : V \rightarrow V \text{ beschränkter Operator}\}$  mit der Norm

$$\|T\| = \sup_{|x| \leq 1} |Tx|$$

ist eine Algebra bzgl. der Komposition, da  $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$ .

$$\begin{aligned} L(V) \times L(V) &\rightarrow L(V) \\ (S, T) &\mapsto S \circ T \end{aligned}$$

ist stetige eine Multiplikation auf  $L(V)$ . Einselement:  $\text{Id}_V = \mathbf{1}_{L(V)}$ .

- $T \in L(V)$  linksinvertierbar:  $\exists S \in L(V): ST = \text{Id}_V$
- $T \in L(V)$  rechtsinvertierbar:  $\exists S \in L(V): TS = \text{Id}_V$
- $T \in L(V)$  invertierbar: rechts und links invertierbar (Inverses ist eindeutig).
- $\text{GL}(V) = \{T : V \rightarrow V \text{ invertierbar}\}$ , Gruppe von Operatoren.

*Bemerkung.* Sei speziell  $V = \mathbb{R}^n$  oder  $V = \mathbb{C}^n$  endlich-dimensional  $L(V) = M_n(\mathbb{R}/\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{n \times n} / \mathbb{C}^{n \times n}$  Matrizenalgebra.  $GL(V) = GL_n(\mathbb{R})$  invertierbare Matrizen  $= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \subseteq M_n(\mathbb{R})$  offen und dicht. Das heißt: Ist  $A \in GL(V)$  und  $\tilde{A} \in L(V)$  eine genügend kleine Störung von  $A$ , dann ist  $\tilde{A}$  wieder invertierbar.

**Ziel:** Verallgemeinerung der Eigenwerttheorie der Matrizen, wie aus der Linearen Algebra, auf Operatoren (hier in dieser VO nur für kompakte symmetrische Operatoren).

*Beispiel.* (1)  $T : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R}) : f(x) \mapsto f(2x)$

(2)  $T : \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R}) : (a_n)_n \mapsto (a_{\sigma(n)})_n$  mit  $\sigma \in S_{\mathbb{N}} = \text{Bij}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

(3)  $V$  Prähilbertraum,  $W \subseteq V$  vollständiger Unterraum,  $P : V \rightarrow W$  Orthogonalprojektion ( $V = W \oplus W^\perp$ ).  $T := \text{inj} \circ P$ : Operator der Norm 1 (falls  $W \neq 0$ ).

(4)  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f \in V$  und

$$T_f : V \rightarrow V, \quad g \mapsto g \cdot f$$

und  $\|T_f\| \leq \|f\|$ .

(5)  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

$$T_K : V \rightarrow V, \quad g \mapsto \int_a^b K(x, y)g(y) \, dy.$$

*Fredholmsche Integraloperator* mit Kern  $K(x, y)$ .

Klar:  $T_K$  linear.

Weiters:  $T_K$  beschränkt:

$$\begin{aligned} \|T_K g\| &= \sup_x \left| \int_a^b K(x, y)g(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_a^b \sup_{x, y} |K(x, y)| \sup_y |g(y)| \, dy \\ &= (b - a) \|K\|_\infty \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass  $\|T_K\| \leq (b - a) \|K\|_\infty$ .

(6)  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$  Homöomorphismus.  $T_h : V \rightarrow V$ ,  $g \mapsto g \circ h$  beschränkt mit  $\|T_h\| = \|h\|_\infty$ .

(7)  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ,  $T((x_n)_n) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ ,  $\|T\| = 1$ .

(8)  $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit Topologie wie früher.  $T : V \rightarrow V$ ,  $f \mapsto f'$  wieder beschränkt (vgl. PS).

**Satz 5.1.**  *$V$  Banachraum, dann ist  $GL(V) \subseteq L(V)$  offen bzgl. der Operator-topologie. D.h. jede genügend kleine Störung eines invertierbaren Operators ist wieder invertierbar.*

*Bemerkung.* vgl. mit der endlich dimensionalen Situation.

*Beweis.* (a) Ist  $S \in L(V)$  genügend nahe bei  $\text{Id}_V = \mathbf{1}_{GL(V)} = \mathbf{1}$ , so ist  $S$  invertierbar. Sei  $S = \mathbf{1} - T$  und  $\|T\| < 1$ . Dann gilt:  $V$  vollständig  $\Rightarrow L(V)$  vollständig  $\Rightarrow R = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$  konvergent in  $L(V)$  (vgl. Neumann-Reihe) und es gilt:

$$S \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S \circ T^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{1} - T)T^n = \mathbf{1} - T + T - T^2 + T^2 - \dots = \mathbf{1}.$$

(b) Sei  $T \in GL(V)$  und  $S \in L(V)$  mit  $\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ , dann ist auch  $S$  invertierbar. Denn ausreichend zu zeigen:  $T^{-1}S$  invertierbar. Aber  $\|T^{-1}S - \mathbf{1}\| = \|T^{-1}(S - T)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|S - T\| < \|T^{-1}\| \frac{1}{\|T^{-1}\|} = 1$ , damit, wegen (a),  $T^{-1}S$  invertierbar.  $\square$

*Anwendung (zu Satz 5.1).* Erinnerung (euklid. Division von Polynomen):  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  Polynom vom Grad  $k$  in einer Variablen. Dann existieren zu jedem  $Q \in \mathbb{R}[x]$  eindeutige  $A, B \in \mathbb{R}[x]$  mit  $\text{Grad } B < k$  und  $Q = AP + B$ . In mehreren Variablen: Theorie der Gröbnerbasen mit euklidischem Divisionsalgorithmus.

*Frage:* Kann man ähnliche Divisionen auch für konvergente Potenzreihen formulieren und beweisen? Wir bezeichnen dazu im Folgenden mit

$$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] = \left\{ f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} c_\alpha x^\alpha \mid f \text{ endliche Potenzreihe} \right\}$$

die Menge der Polynome und mit

$$\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\} = \left\{ f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} c_\alpha x^\alpha \mid f \text{ konvergente Potenzreihe} \right\}$$

die Menge der konvergenten Potenzreihen.

**Satz 5.2 (Weierstraßscher Divisionssatz für konvergente Potenzreihen).** Sei  $f \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$  eine konvergente Potenzreihe,

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} c_\alpha x^\alpha \text{ mit } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Annahme:  $f(0, \dots, 0, x_n) \not\equiv 0$ , d.h.  $\exists \alpha = (0, \dots, 0, d)$  mit  $c_\alpha \neq 0$ , also  $x_n^d$  kommt in Potenzreihenentwicklung für ein  $d \geq 0$  wirklich vor. Weiters sei

$$d = \text{Ordnung } f = \text{Untergrad } f.$$

Dann existieren für jedes  $g \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$  eindeutige konvergente Potenzreihen  $a, b \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$  mit  $b \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}[x_n]$  polynomial in  $x_n$  vom Grad  $< d$ , sodass

$$g = a \cdot f + b.$$

Bemerkung: damit ist  $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$  noethersch.

Beweis. 1. Fall:  $f = x_n^d$  Monom. Zerlege  $g = g_1 + g_2$  mit  $g_1 = ax_n^d$ ,  $a \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$  und  $g_2 \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}[x_n]$  vom Grad  $< d$  in  $x_n$ .

$$g_1 = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N} \\ \alpha_n \geq d}} c_\alpha x^\alpha,$$

$$g_2 = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N} \\ \alpha_n < d}} c_\alpha x^\alpha.$$

Damit  $g = af + b$  mit  $a = \frac{g_1}{x_n^d}$  und  $b = g_2$ .

Umformulierung: Betrachte

$$u : \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\} \times \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}[x_n]_{<d} \rightarrow \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\} \\ (a, b) \mapsto af + b$$

Existenz der Division: Surjektivität von  $u$ . Eindeutigkeit: Injektivität von  $u$ .

Wir zeigen:  $u$  ist invertierbarer Operator. Wissen:  $V : \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\} \times \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}[x_n]_{<d} \rightarrow \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$  ist invertierbar. Zeige also:  $u$  ist hinreichende kleine Störung von  $V$  und damit nach Satz 5.1 invertierbar.

2. Fall: In einer Variablen (heuristisch): Schreibe  $f(x) = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha+1} x^{\alpha+1} + \dots$ , wobei  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $c_\alpha \neq 0$ , also

$$f(x) = x^d + \tilde{f}(x)$$

(wenn  $c_\alpha = 1$ ) mit Ordnung  $\tilde{f} \geq d + 1$ .

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}\{x\} \times \mathbb{R}[x]_{<d} &\rightarrow \mathbb{R}\{x\} \\ (a, b) &\mapsto af + b \\ v : \mathbb{R}\{x\} \times \mathbb{R}[x]_{<d} &\rightarrow \mathbb{R}\{x\} \text{ invertierbar.} \\ (a, b) &\mapsto ax^d + b \end{aligned}$$

Zeige:  $u - v$  ist klein im Vergleich zu  $v^{-1}$ .

$$\begin{aligned} u - v : \mathbb{R}\{x\} \times \mathbb{R}[x]_{<d} &\rightarrow \mathbb{R}\{x\} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot \tilde{f} = (c_{d+1}x^{d+1} + \dots) \end{aligned}$$

Beobachtung: In einer genügend kleinen Umgebung von 0 ist  $x^{d+1}$  viel kleiner als  $x^d$ . Daher ist  $a \mapsto ax^{d+1}$  kleiner als  $a \mapsto ax^d$ .

Normen auf  $\mathbb{R}\{x\}$ : Sei  $r > 0$  und

$$R\{x\}_r = \left\{ f \in \mathbb{R}\{x\} \mid f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \|f\|_r := \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k < \infty \right\}$$

$\|\cdot\|_r$  ist Norm auf  $\mathbb{R}\{x\}_r$  und macht  $\mathbb{R}\{x\}_r$  zu BR. Wir zeigen:

$$\begin{aligned} u_r : \mathbb{R}\{x\}_r \times \mathbb{R}[x]_{<d} &\rightarrow \mathbb{R}\{x\}_r \\ (a, b) &\mapsto af + b \end{aligned}$$

ist invertierbarer Operator zwischen Banachräumen für  $r > 0$  hinreichend klein.

Berechne  $\|u_r - v_r\|$ :

$$\begin{aligned} \|(u_r - v_r)(a, b)\|_r &= \|a\tilde{f}\|_r \leq \|a\|_r \|\tilde{f}\|_r = \\ &= \|a\|_r \cdot (|c_{d+1}|r^{d+1} + |c_{d+2}|r^{d+2} + \dots) = \\ &= \|a\|_r r^{d+1} (|c_{d+1}| + |c_{d+2}|r + \dots) \leq \\ &\leq \|a\|_r r^{d+1} \cdot c \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|u_r - v_r\| \sim r^{d+1} \cdot c$ , während die Norm von  $u_r$  etwa gleich  $\|u_r\| \sim r^d$  ist. Daraus schließt man die gewünschte Ungleichung

$$r^{d+1}c = \|u_r - v_r\| < \frac{1}{\|u_r^{-1}\|} = r^d$$

für  $r$  hinreichend klein.

Alternativ (in einer Variablen):

$$f(x) = x^d + c_{d+1}x^{d+1} + \dots = x^d \underbrace{(1 + c_{d+1}x + c_{d+2}x^2 + \dots)}_{\text{invertierbar für } |x| \text{ hinreichend klein}} = x^d h(x)$$

mit  $h(x) \neq 0$ ,  $h$  invertierbar als Potenzreihe. Dividiere  $g$  durch  $f$  wie folgt:  $g(x) = ax^d + b = ah^{-1}hx^d + b = ah^{-1}f + b = \tilde{a}f + b$  wie vorher.  $\square$

**Satz 5.3.**  $V$  Banachraum,  $T \in L(V)$ . Betrachte:

- (1)  $T$  linksinvertierbar, d.h.  $\exists S \in L(V) : S \circ T = \mathbf{1}$ .
- (2)  $\exists c > 0$  mit  $\|Tx\| \geq c\|x\| \forall x \in V$ .
- (3)  $T$  injektiv.

Dann gilt: (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3). Gilt außerdem:  $\text{im}(T) \subseteq V$  direkt (abgeschlossen mit direktem Komplement), so sind (1), (2) und (3) äquivalent.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2):  $S$  Linksinverses von  $T \Rightarrow ST = \mathbf{1} \Rightarrow x = (ST)(x) \forall x \in V \Rightarrow (S \text{ beschränkt}) \|x\| = \|(ST)(x)\| \leq \|S\|\|Tx\| \Rightarrow \|Tx\| \geq \frac{1}{\|S\|}\|x\| \forall x \in V$

(2)  $\Rightarrow$  (3): Ist  $Tx = 0$ , dann  $\|x\| \leq \|Tx\| = 0$ , also  $\|x\| = 0$  und  $x = 0$ , d.h.  $T$  injektiv

(3)  $\Rightarrow$  (1): Sei  $\text{im}(T) \subseteq V$  direkt:  $T$  injektiv  $\Rightarrow T : V \rightarrow \text{im}(T)$  linear, bijektiv und stetig. Aber  $\text{im}(T) \subseteq V$  direkt, insbesondere abgeschlossen, also vollständig.  $\Rightarrow$  (Satz von der offenen Abb.)  $T : V \rightarrow \text{im}(T)$  topologischer Isomorphismus  $\Rightarrow \exists S : \text{im}(T) \rightarrow V$  stetig, Inverses zu  $T : V \rightarrow \text{im}(T)$ . Sei  $P : V \rightarrow \text{im}(T)$  die durch  $V = \text{im}(T) \oplus W$  definierte Projektion, dann ist  $S \circ P : V \rightarrow V$  Linksinverses von  $T$ .  $\square$

*Beispiel.* (1) endliche Dimension:  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  linear ist beschränkt, gegeben durch seine Matrix bzgl. Basis von  $\mathbb{K}^n$ .

(2)  $V$  Prähilbertraum,  $W \subseteq V$  vollständiger UR,  $P : V \rightarrow W$  Orthogonalprojektion induziert Operator  $P' : V \rightarrow V$  der Norm 1 ( $W \neq 0$ ).

(3) Sei  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ ,  $f \in V$ .  $T_f(g)(x) := f(x)g(x)$  definiert Operator  $T_f : V \rightarrow V$ ,  $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$ .

Sei  $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  stetig,  $Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) \, dy$ .  $\Rightarrow T : V \rightarrow V$  linear und beschränkt, da

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\infty &= \sup_x \left| \int_a^b K(x, y)f(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_a^b \sup_{x, y} |K(x, y)| \sup_y |f(y)| \, dy \\ &\leq (b - a) \|K\|_\infty \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Für  $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$  Homöomorphismus, ist  $T_h f = f \circ h$  ein beschränkter Operator mit  $\|T_h\| = \|h\|_\infty$ .

(4)  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkter Operator der Norm 1.

(5)  $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \rightarrow f'$  beschränkter Operator, siehe Übungen.

*Bemerkung.*  $T : V \rightarrow V$  Operator induziert transponierten Operator

$$T^* : V' \rightarrow V', \quad T^*(f)(x) = f(Tx).$$

$T^*$  heißt auch der zu  $T$  adjungierte Operator.

Es gilt:  $\|T\| = \|T^*\|$ . (nachrechnen)

**Definition.** Sei  $V$  normierter komplexer VR.  $T : V \rightarrow V$  beschränkter Operator.  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt

- Eigenwert von  $T \Leftrightarrow T - \lambda \mathbf{1} : V \rightarrow V$  nicht injektiv, d.h.  $\exists x \in V, x \neq 0$  mit  $Tx = \lambda x$ .
- Spektralwert von  $T \Leftrightarrow T - \lambda \mathbf{1} : V \rightarrow V$  nicht invertierbar in  $L(V)$  (klar:  $\lambda$  EW  $\Rightarrow \lambda$  Spektralwert (SW), aber nicht umgekehrt).

Es gelten folgende Bezeichnungen:

- $\Sigma_T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ SW von } T\} = \text{Spektrum von } T$ ,
- $E_T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ EW von } T\} = \text{Punktspektrum von } T$ ,
- $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_T$  heißen reguläre Werte von  $T$ , d.h.  $(T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$  existiert und ist beschränkt.

**Satz 5.4.** *Sei  $V$  vollständig und  $T : V \rightarrow V$  ein beschränkter Operator. Dann ist  $\Sigma_T \subseteq \mathbb{C}$  abgeschlossen und  $|\lambda| \leq \|T\|$  für alle  $\lambda \in \Sigma_T$ .*

*Beweis.* (a)  $\mathbb{C} \setminus \Sigma_T$  offen: Sei  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_T \Rightarrow T - \lambda \mathbf{1}$  invertierbar in  $L(V) \Rightarrow$  (Satz 1)  $T - \mu \mathbf{1}$  invertierbar für alle  $\mu \in \mathbb{C}$  nahe  $\lambda \Rightarrow \mu \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_T$  für  $\mu$  nahe  $\lambda \Rightarrow \Sigma_T$  abgeschlossen.

(b) Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| > \|T\|$ . Dann:  $T - \lambda \mathbf{1} = -\lambda(\mathbf{1} - \frac{1}{\lambda}T)$  und es gilt  $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$  konvergiert in  $L(V)$ , da  $V$  und damit  $L(V)$  vollständig. Daraus folgt:

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} = (T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$$

und damit  $(T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$  existiert, also  $\lambda$  regulär.

□

**Definition (Spektralradius).**  $T \in L(V)$ ,

$$\rho(T) := \sup_{\lambda \in \Sigma_T} |\lambda|$$

heißt Spektralradius von  $T$ . Beachte:  $\rho(T) \leq \|T\|$  nach Satz 5.4 und  $<$  ist möglich.

**Satz 5.5.** *Ist  $V$  vollständig und  $T \in L(V)$ , dann konvergiert  $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$  und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(T).$$

*Beweis.* Rudin [3], Thm 10.13, p.235; Lang [13], Thm 1.7, p. 406.  
(Übung): Beweis von Lang.

□

**Satz 5.6.**  $0 \neq V$  komplexer Banachraum,  $T \in L(V)$ .

(a)  $\forall x \in V, \forall f \in V' = \{g : V \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig und linear}\}$  ist die Abb.

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{\lambda, f} : \mathbb{C} \setminus \Sigma_T \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f((T - \lambda \mathbf{1})^{-1}(x)) \end{aligned}$$

holomorph und  $\varphi(x) \rightarrow 0$  wenn  $\lambda \rightarrow \infty$ .

(b)  $\Sigma_T \neq \emptyset$ .

*Beweis.* (a)  $\alpha : \mathbb{C} \setminus \Sigma_T \rightarrow L(V) : \lambda \mapsto (T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$  ist stetig. Sei  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_T$  und  $c \in \mathbb{C}$ . Es gilt  $T - (\lambda + c)\mathbf{1} = (T - \lambda \mathbf{1})(\mathbf{1} - c(T - \lambda \mathbf{1})^{-1})$  (siehe PS). Für  $c$  nahe 0 ist  $T - (\lambda + c)\mathbf{1}$  invertierbar mit Inversem

$$R_{\lambda+c} = ((T - \lambda \mathbf{1})(\mathbf{1} - c(T - \lambda \mathbf{1})^{-1}))^{-1} = (\mathbf{1} - cR_\lambda)^{-1} \cdot R_\lambda,$$

wobei  $R_\lambda := (T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ .

Damit gilt:

$$\lim_{c \rightarrow 0} R_{\lambda+c} = \lim_{c \rightarrow 0} (\mathbf{1} - cR_\lambda)^{-1} \cdot R_\lambda = R_\lambda$$

d.h.  $\alpha$  ist stetig.

(b) Seien  $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_T$  genügend nahe. Es gilt  $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$ , also

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} -R_\lambda R_\mu = -R_\lambda^2.$$

Seien  $x \in V, f \in V'$ . Dann

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{\mu - \lambda} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} f\left(\frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda}(x)\right) \stackrel{(f \text{ stetig})}{=} \\ &= f\left(\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda}(x)\right) = f(-R_\lambda^2(x)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$  holomorph. Wegen  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$  konvergent für  $|\lambda| > \|T\|$ , geht  $R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$  gegen 0 wenn  $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow$  Behauptung.

(c)  $\Sigma_T \neq \emptyset$ . Wäre  $\Sigma = \emptyset \Rightarrow \varphi : \mathbb{C} \setminus \Sigma_T = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph  $\Rightarrow \varphi = 0$  für  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , also  $\varphi$  beschränkt  $\Rightarrow \varphi$  konstant (Satz von Lionville)  $\Rightarrow \varphi \equiv 0 \Rightarrow f(R_\lambda(x)) = 0 \forall f \in V', \forall x \in V \Rightarrow$  (Satz von Hahn-Banach)  $R_\lambda(x) = 0 \forall x \in V \Rightarrow R_\lambda = 0$ . Widerspruch.

□

*Beispiel.*  $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$  mit  $\|\cdot\|_\infty$ .  $K : \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  stetig,  $\Delta =$  Dreieck zwischen  $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ .  $f \in V$ ,

$$(Tf)(x) := \int_0^x K(x, y)f(y) \, dy.$$

Sei  $c = \sup_{\Delta} |K| = \sup_{(x,y) \in \Delta} |K(x, y)|$ .

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left| \int_0^x K(x, y)f(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_0^x \sup_{x,y} |K(x, y)| \sup_y |f(y)| \, dy \\ &\leq cx \|f\|_\infty. \\ |T^2f(x)| &= \left| \int_0^x K(x, y)Tf(y) \, dy \right| \leq \dots \leq c^2 \frac{x^2}{2} \|f\|_\infty. \\ \Rightarrow |T^n f(x)| &\leq \frac{c^n}{n!} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Also  $\|T^n\| \leq \frac{c^n}{n!}$  und  $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$ . Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Spektralwert von  $T$ , dann

$$|\lambda| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n!^{\frac{1}{n}}} = 0.$$

Stirlingsche Formel:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n \left(1 + \sigma \frac{1}{n}\right)$$

$\Rightarrow n!^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Also  $\rho(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \Rightarrow \{0\} = \Sigma_T$ .  
(Übung) Anderer Beweis dafür: El Kacimi [1], p.96.

**Definition (kompakte Operatoren).**  $V$  normierter VR,  $T \in L(V)$  Operator.  $T$  heißt kompakt (früher: vollstetig)  $\Leftrightarrow$  das Bild  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jeder beschränkten Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  besitzt eine konvergente Teilfolge.  
Äquivalent:  $T \in L(V)$  kompakt  $\Leftrightarrow T(B(0, 1)) \subseteq V$  relativ kompakt (Abschluss ist kompakt).

*Bemerkung.* (a) In endlich-dimensionalen Vektorräumen hat eine beschränkte Folge immer eine konvergente Teilfolge (Bolzano-Weierstraß). Dies ist falsch für unendlich-dimensionale Vektorräume.

(b)  $T$  kompakt  $\Leftrightarrow T(B_V(0, 1)) \subseteq V$  relativ kompakt (=Abschluss ist kompakt).

(c)  $T$  kompakt  $\Leftrightarrow$  Bilder von beschränkten Mengen sind relativ kompakt.

(d)  $\text{Id}_V : V \rightarrow V$  kompakt  $\Leftrightarrow V$  endl. dim (siehe früher).

(e)  $T : V \rightarrow W$  Operator: Kompaktheit wird analog definiert. Ist  $\dim V < \infty \Rightarrow T$  kompakt. Ist  $\text{im}(V)$  endlich-dimensional  $\Rightarrow T$  kompakt.

(f) Linearkombinationen von kompakten Operatoren sind wieder kompakt, also

$$K(V) = \{T \in L(V) \mid T \text{ kompakt}\} \subseteq L(V) \text{ UVR.}$$

(g)  $R, S, T : V \rightarrow V$  linear,  $R$  beschränkt,  $S, T$  kompakt  $\Rightarrow SR$  kompakt,  $RT$  kompakt,  $SRT$  kompakt.

**Satz 5.7.** Sei  $T \in K(V)$ . Dann gilt:

$$T^* \in K(V').$$

*Beweis.* Siehe El Kacimi [1], p.97. □

**Satz 5.8.** Sei  $V$  Banachraum. Dann ist  $K(V) \subseteq L(V)$  abgeschlossen bzgl. der Operatornorm. Anders ausgedrückt: Der gleichmäßige Limes von kompakten Operatoren in Banachräumen ist wieder kompakt.

*Beweis.* Sei  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von kompakten Operatoren auf  $V$ , die bzgl. der Operatornorm gegen  $T \in L(V)$  konvergiert. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $V$ . z.Z.:  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt konvergente Teilfolge. Wissen:  $(T_i x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt konvergente Teilfolge, etwa  $(T_i x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei  $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gewisse Teilfolge von  $(x_n^{i-1})_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Betrachte Diagonalfolge  $(x_i^i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Dann ist für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Folge  $(T_k(x_i^i))_{i \in \mathbb{N}}$  konvergent. Die Folgen  $(T_k(x_i^i))_{i \in \mathbb{N}}$  sind konvergent, da  $(x_i^i)_i$  Teilfolge von  $(x_n^i)_n$ .

*Behauptung:*  $(Tx_i^i)_{i \in \mathbb{N}}$  konvergent.

*Beweis:*  $V$  Banachraum  $\Rightarrow$  ausreichend zu zeigen:  $(Tx_i^i)_i$  Cauchyfolge. Sei

$\varepsilon > 0$ , dann  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  mit:

$$\begin{aligned} |Tx_n^n - T_k x_n^n| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ |T_k x_n^n - T_k x_m^n| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ |T_k x_m^m - T x_m^m| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Addieren und Dreiecksungleichung liefert:  $|Tx_n^n - Tx_m^m| < \varepsilon \forall m, n \geq n_0$ , also  $(Tx_i^i)_i$  Cauchyfolge.  $\square$

*Bemerkung.* Für kompakte Operatoren ist es leichter Spektral- und Eigenwerte auszurechnen.

*Beispiel.* (1) (vgl. Heuser [4], p. 192) Betrachte  $T : \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R})$  gegeben durch abzählbar unendliche Matrix  $A = (A_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ , also

$$T((c_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} A_{ij} c_j \right)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Es gelte:  $\sum_{i,j \in \mathbb{N}} |A_{ij}|^2 < \infty$ . Dann ist  $T$  kompakter Operator (Ungleichung ist hinreichend, aber nicht notwendig).

*Beweisidee:* Approximiere  $T$  in der Operatornorm durch die kompakten Operatoren  $T_k : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ .

$$(T_k((c_i)_{i \in \mathbb{N}}))_m = \begin{cases} \sum_{j \in \mathbb{N}} A_{mj} c_j & m \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\dim \text{im}(T_k) \leq k + 1$ , also  $T_k$  kompakt (vgl. PS). Zeige durch Normabschätzungen, dass  $T_k \rightarrow T$  in der Operatornorm.

(2) Sei  $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ ,  $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  stetiger Kern,

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy \text{ für } f \in V$$

(Fredholmscher Integraloperator).

*Behauptung:*  $T : V \rightarrow V$  ist kompakter Operator.

*Beweis:* Sei  $B = \overline{B_V(0, 1)} \subseteq V$  abgeschlossene Einheitskugel. Wir zeigen:  $TB \subseteq V$  ist als Familie von Funktionen gleichgradig stetig. Dazu sei  $\varepsilon > 0$ :  $K$  stetig auf Kompaktum, also gleichmäßig stetig. Damit existiert  $\delta > 0$  mit

$|K(x, y) - K(x', y)| < \varepsilon$  für alle  $x, x', y \in [0, 1]$  mit  $|x - x'| < \delta$ . Wir erhalten für alle  $f \in V$ ,  $|x - x'| < \delta$ :

$$|Tf(x) - Tf(x')| = \left| \int_0^1 (K(x, y) - K(x', y))f(y) \, dy \right| \leq \varepsilon \|f\|_\infty.$$

Beachte:  $\delta$  hängt nicht von  $f \in V$  ab. Also  $TB$  gleichgradig stetig (denn:  $\forall f \in B$  und alle  $x, x' \in [0, 1]$  mit  $|x - x'| < \delta$  gilt:  $|Tf(x) - Tf(x')| < \varepsilon$ ).

Weiters:  $B = \overline{B}(0, 1)$  und  $T$  stetig  $\Rightarrow TB \subseteq V$  beschränkt.

Sowie:  $\forall a \in [0, 1]$  ist  $TB(a) := \{Tf(a) \mid f \in B\}$  relativ kompakt (!). Satz von Arzelá-Ascoli:  $TB \subseteq V$  relativ kompakt, d.h.  $T$  kompakter Operator.

(3)  $T : V \rightarrow V$ ,  $\text{im}(T)$  endlich-dim.  $\Rightarrow T$  kompakt. ( $V$  Hilbertraum  $\Rightarrow \{T \mid \text{im}(T) \text{ endl. dim.}\} \subseteq K(V)$  dicht).

(4)  $V = \mathcal{C}([0, a], \mathbb{C})$  mit  $\|\cdot\|_p$ -Norm. Sei  $f \in V$ . Hölderungleichung angewandt auf  $f$  und  $1 \Rightarrow \|f\|_1 \leq a^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_p$ . Weiters gilt:  $\|f\|_p \leq a^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$  (nachrechnen).  $\Rightarrow \|\cdot\|_p$ -Topologie feiner als  $\|\cdot\|_1$ -Topologie und gröber als  $\|\cdot\|_\infty$ -Topologie für  $1 \leq p \leq \infty$ . Sei  $T : V \rightarrow V$  wie oben definiert. Nachrechnen:  $\|Tf\|_\infty \leq c \|f\|_1$  mit  $c = \max_{[0,1]} \|K\| \Rightarrow T : V_1 \rightarrow V_\infty$  stetig  $\Rightarrow T : V_p \rightarrow V_p$  stetig  $\forall 1 \leq p \leq \infty$ . Wie vorher,  $T(B_1) \subseteq V_\infty$  relativ kompakt und damit auch in  $V_p$ . Damit  $T$  kompakt.

## Spektrum eines kompakten Operators

Dazu brauchen wir:

**Lemma 5.1.**  $U, W \subseteq V$  abgeschlossen,  $U \subseteq W$ ,  $T \in L(V)$  mit  $T(W) \subseteq U$ ,  $\delta \in ]0, 1[$ ,  $S = \mathbf{1} - T$ . Dann gilt:  $\exists x \in W \cap B$ ,  $B = \overline{B}_V(0, 1)$  mit  $d(Sx, SU) \geq \delta$ .

*Beweis.* (a)  $U \subseteq W$  abg,  $W/U$  normiert. Sei  $\bar{x} \in W/U$  mit  $\delta \leq |\bar{x}| < 1$ ,  $|\bar{x}| = \inf_{u \in U} |x + u| \Rightarrow \exists x \in W \cap B$  mit  $d(x, U) \geq \delta$ .

(b)  $T(W) \subseteq U \Rightarrow \forall y \in U: y + Tx - Ty \in U$  mit  $x$  von (a).  $\Rightarrow |Sx - Sy| = |x - (y + Tx - Ty)| \geq \delta \forall y \in U \Rightarrow d(Sx, SU) \geq \delta$ .

□

**Lemma 5.2.** *Jede aufsteigende Folge abgeschlossener UR  $U_n \subseteq V$  mit*

$$S(U_n) \subseteq U_{n-1} \text{ für ein } S \in K(U)$$

*wird stationär, d. h. es gibt ein  $n_0$ , sodass  $U_n = U_{n_0}$  für  $n \geq n_0$ . Dieselbe Aussage gilt für absteigende Folgen  $S(U_n) \subseteq U_{n+1}$ .*

*Beweis.* Wäre (o.B.d.A)  $U_n$  strikt aufsteigend,  $T = \mathbf{1} - S \Rightarrow$  (Lemma 1)  $\forall n \exists x_n \in U_n$  mit  $\|x_n\| \leq 1$  und  $d(Tx_n, TU_{n-1}) \geq \delta \Rightarrow \exists x_n \in U_n \cap B$  mit  $d(Tx_n, Tx_{n-1}) \geq \delta \Rightarrow (Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht relativ kompakt  $\Rightarrow T$  nicht kompakt. Widerspruch  $\square$

**Satz 5.9.** *Sei  $T \in K(V)$  und  $S = \mathbf{1} - T$ . Dann gilt:*

- (1)  $\ker(S)$  endlich-dimensional.
- (2)  $V/\ker(S) \rightarrow \text{im}(S)$  topologischer Isomorphismus.
- (3)  $\text{im}(S)$  abgeschlossen und endlich-dimensional.

*Beweis.* (1)  $x \in \ker S \Rightarrow Tx = x \Rightarrow T|_{\ker S} = \text{Id}_{\ker S} \Rightarrow (T \text{ kompakt}) \ker S$  endlich-dimensional. (vgl. Satz 1.4)

(2)  $\ker S$  endl. dim  $\Rightarrow \ker S$  besitzt direktes topologisches Komplement  $W$  (Übung 15)  $\Rightarrow S|_W : W \rightarrow \text{im } S$  linear, bijektiv und stetig.

*Behauptung:*  $S|_W$  offen, d.h. top. Homomorphismus ( $\Rightarrow$  (2)).

*Beweis:* Sei  $S^{-1} : \text{im } S \rightarrow W$  nicht stetig  $\Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $W$  mit  $\|Sx_n\| \leq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$  ( $S^{-1}$  unbeschränkt).  $\Rightarrow z_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$  und  $\|z_n\| = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sz_n\| = 0$ .  $T$  kompakt  $\Rightarrow \exists$  Teilfolge  $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $T(z_{n_k})$  konvergiert gegen  $z$ . Wegen  $S = \mathbf{1} - T$  gilt  $z_{n_k} = Tz_{n_k} + Sz_{n_k}$ , also, da  $Sz_{n_k} \rightarrow 0$ , gilt auch  $z_{n_k} \rightarrow z$ .  $T$  stetig  $\Rightarrow Tz = T \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} Tz_{n_k} = z$ .  $\Rightarrow Sz = 0$ ,  $z \in \ker S$ . Aber  $z_{n_k} \in W$ ,  $W$  abgeschlossen, also  $z \in W \cap \ker S = \{0\} \Rightarrow$  Widerspruch zu  $\|z\| = \lim \|z_{n_k}\| = 1$ .

(3)  $\text{im } S$  abgeschlossen: Sei  $y \in \overline{\text{im } S} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = y \Rightarrow (Sx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt  $\Rightarrow (S^{-1}$  stetig)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt  $\Rightarrow (T \text{ kompakt}) \exists$  Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $Tx_{n_k}$  konvergent gegen  $z \Rightarrow x_{n_k} = Sx_{n_k} + Tx_{n_k}$  konvergent gegen  $y + z \Rightarrow y = \lim_{k \rightarrow \infty} Sx_{n_k} = S(y + z) \Rightarrow y \in \text{im } S$  und  $\text{im } S$  endlich codimensional: Wäre  $\text{im } S$  unendlich codimensional  $\Rightarrow \exists V_n \subseteq V$  strikt aufsteigende Folge abgeschlossener UR mit  $V_0 = \text{im } S \Rightarrow S(V_n) \subseteq S(V) = \text{im } S = V_0 \subseteq V_{n-1} \Rightarrow$  (Lemma 5.2) Widerspruch.

$\square$

**Satz 5.10.** Sei  $T : V \rightarrow V$  kompakter Operator. Dann gilt:

(1) Jeder Spektralwert  $\lambda \neq 0$  von  $T$  ist schon Eigenwert von  $T$  und der zugehörige Eigenraum

$$V_\lambda = \{f \in V \mid Tf = \lambda f\}$$

ist endlich-dimensional.

(2) Das Spektrum  $\Sigma_T$  ist (kompakt) abzählbar in  $\mathbb{C}$  mit höchstens einem Häufungspunkt, nämlich 0.

*Beweis.* (1)  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda$  nicht Eigenwert von  $T \Rightarrow S = T - \lambda \mathbf{1}$  injektiv, und  $S = -\lambda(\mathbf{1} - \frac{1}{\lambda}T) \Rightarrow$  (Satz 5.9)  $S : V \rightarrow \text{im } S$  top. Hom.  $\Rightarrow_{(*)}$  [EK [1], p.108]  $S : V \rightarrow V$  top. Hom.  $\Rightarrow \lambda$  nicht Spektralwert.

( $\star$ ) : Sei  $S : V \rightarrow V$  injektiv,  $S = \mathbf{1} - T$ ,  $T$  kompakt  $\Rightarrow S : V \rightarrow V$  surjektiv. *Beweis:* Sei  $S^k = S \circ \dots \circ S$ ,  $W_k = \text{im } S^k \Rightarrow W_k$  absteigende Folge,  $S(W_k) \subseteq W_{k+1} \Rightarrow$  (Lemma 5.2)  $\exists k_0$ , sodass  $W_k = W_{k_0} \forall k \geq k_0 \Rightarrow S : W_k \rightarrow W_k$  bijektiv  $\forall k \geq k_0$ . Top. Hom.  $\Rightarrow$  (Satz 5.9, (2))  $S^k : W/\ker S^k \rightarrow W_k$  top. Isom.  $\Rightarrow$  ( $S$  injektiv)  $S^k : W \rightarrow W_k$  top. Isom.  $\Rightarrow W_k = W$ .

(2) Ausreichend:  $\forall \delta > 0$  sind fast alle Eigenwerte in  $D(0, \delta) \subseteq \mathbb{C}$ . Sei  $(\lambda_n)_n$  Folge von Eigenwerten mit  $|\lambda_n| \geq \delta$ . Wähle Eigenvektor  $x_n$  zu  $\lambda_n$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  linear unabhängig. Setze  $V_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq V$  endlich-dimensional, abgeschlossen, strikt aufsteigend  $\Rightarrow$  (Beweis von Satz 1.5)  $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_n$  mit  $|y_n| \leq 1$  und  $d(y_n, y_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow (\delta < |\lambda_n|) \frac{y_n}{\lambda_n}$  beschränkte Folge  $\Rightarrow$  ( $T$  kompakt)  $\exists$  Teilfolge  $\left(\frac{y_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $T\left(\frac{y_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)$  konvergent. Schreibe  $y_n = \sum_{i \leq n} a_i x_i$ ,  $a_i \in \mathbb{K}$ .  $\Rightarrow$

$$T \frac{y_n}{\lambda_n} = \sum_{i < n} \lambda_i \frac{a_i}{\lambda_n} x_i + a_n x_n.$$

Setze

$$z_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n} - 1\right) x_i \in V_{n-1}$$

so gilt:  $T \frac{y_n}{\lambda_n} = y_n + z_n$ . Für  $n > m$  gilt  $y_m + z_m - z_n \in V_{n-1}$ , also

$$\begin{aligned} \left| T \frac{y_n}{\lambda_n} - T \frac{y_m}{\lambda_m} \right| &= |y_n + z_n - y_m - z_m| \\ &= |y_n - (y_m + z_m - z_n)| \\ &\geq d(y_n, V_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left| T \frac{y_n}{\lambda_n} - T \frac{y_m}{\lambda_m} \right| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$  Widerspruch zu  $T \frac{y_{n_k}}{\lambda_{n_k}}$  konvergent, also gibt es nur endlich viele Eigenwerte außerhalb  $D(0, \delta) \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow_{(1)} \Sigma_T$  abzählbar und  $\Sigma_T \setminus \{0\}$  ohne HP.

□

*Bemerkung (El Kacimi [1], p.105).* Sei  $V \subseteq \hat{V}$  mit  $\hat{V}$  vollständig,  $T \in K(V)$  setzt sich fort zu  $\hat{T} \in K(\hat{V})$  und  $\Sigma_T = \Sigma_{\hat{T}}$ .

*Beispiel (1).*  $V = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(x+1) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\} = \{\text{stetige periodische Funktionen auf } \mathbb{R} \text{ mit Periode } 1\}$ .  $V$  mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum, da abgeschlossen in  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Sei der Kern  $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$K(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} x(1-y) & 0 \leq x < y \leq 1 \\ y(1-x) & 0 \leq y < x \leq 1 \end{array} \right\}$$

Betrachte  $T : V \rightarrow V$ ,  $Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$  für  $x \in [0, 1]$  und periodisch auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt. Es gilt:  $Tf(0) = Tf(1) = 0$ . Nach Überlegung vorher ist  $T$  kompakt. Bestimme die Eigenwerte  $\lambda$  von  $T$ ,  $Tf = \lambda f$ , also

$$\lambda f(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy.$$

Dazu mehrere Schritte:

(a) Behauptung:  $Tf$  ist  $\mathcal{C}^2$  für alle  $f \in V$ , denn

$$Tf(x) = (1-x) \int_0^x yf(y) dy + x \int_x^1 (1-y)f(y) dy$$

$\Rightarrow$

$$Tf(x)'' = -xf(x) - (1-x)f(x) = -f(x)$$

stetig.

(b) Behauptung:  $(Tg'') = -g \forall g \in V$ ,  $g \in \mathcal{C}^2$  mit  $g(0) = g(1) = 0$ . Denn nachrechnen ergibt:

$$T(g'') = -g(x) + (1-x)g(0) + xg(1).$$

(c) Setze  $W = \{g \in V \mid g \in \mathcal{C}^2 \text{ mit } g(0) = g(1) = 0\} \subseteq V$ . Wegen  $(Tf)'' = -f$  ist  $T$  injektiv  $\Rightarrow T : V \rightarrow V$  alg. Isomorphismus  $\Rightarrow 0$  Spektralwert von  $T$ , der kein Eigenwert ist (einziger Wert).

(d) Bestimmung der Eigenwerte von  $T$ : Sei  $Tf = \lambda f$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f = T\left(\frac{f}{\lambda}\right) \Rightarrow f(0) = f(1) = 0$  und  $f \in \mathcal{C}^2$  mit  $\lambda f'' = -f$ .

Umgekehrt: Ist  $0 \neq f \in W$ :  $\lambda f'' = -f \Rightarrow Tf = T(-\lambda f'') = -\lambda(-f) = \lambda f$ . Also ausreichend, die DGL  $\lambda f'' = -f$  zu lösen. Setze  $\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$ , sodass Lösung  $f(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x$  für  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Wissen:  $f(x+1) = f(x)$  und  $f(0) = f(1) = 0$ . Daraus  $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $b = 0$  und wir erhalten Eigenwerte  $\lambda_k = \frac{1}{4\pi^2 k^2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 0$ , und Eigenvektoren  $f_k = \sin(2k\pi x)$ .

*Beispiel (2).* [El Kacimi [1], p. 108]  $V = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(x+2\pi) = f(x)\}$  mit Supremumsnorm.  $Tf(x) := f(-x)$ .

(a) Bestimme Eigenwerte und Spektralwerte von  $T$ .

(b) Zeige:

$$Sf(x) := \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x+y)f(y) \, dy$$

$\Rightarrow \text{im}(S)$  endlich-dimensional. Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von  $S$ .

*Beispiel (3).* [El Kacimi [1], p. 109]  $V = \ell^2(\mathbb{C})$ , mit  $\|\cdot\|_2$ -Norm.  $T(a) = (0, a_1, a_2, \dots) \Rightarrow T$  beschränkt.  $\Sigma_T = ?$

*Beispiel (4).* [El Kacimi [1], p. 109]  $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$  mit Supremumsnorm.  $Tf(x) := xf(x)$ ,  $\Sigma_T = ?$

(a) Zeige daß kein Eigenwert  $\in \Sigma_T$ .

(b)  $Sf(x) := \int_0^1 (x^2 + x)f(y) \, dy \Rightarrow \text{im } S$  endlich-dimensional, bestimme  $\Sigma_S$ .

## Selbstadjungierte Operatoren

Sei  $V$  stets Prähilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definition.**  $T : V \rightarrow V$  Operator heißt selbstadjungiert oder symmetrisch  $\Leftrightarrow \forall x, y \in V: \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \Leftrightarrow T = T^*$  wobei

$$T^* : V' \rightarrow V'$$

der adjungierte Operator  $(T^*f)(x) = f(Tx)$ .

*Beispiel.*  $V$  endlich-dimensional mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sei ONB von  $V$  geg.,  $T : V \rightarrow V$  linear mit  $A_T \in \text{GL}(V)$  Abbildungsmatrix von  $T$  bzgl. ONB. Dann:  $T$  adjungiert  $\Leftrightarrow A_T$  symmetrische Matrix.

*Bemerkung.*  $\text{Sym}(V) = \{T : V \rightarrow V \text{ symmetrischer Operator}\} \subseteq L(V)$  UVR, abgeschlossen bzgl. der pktw. Konvergenz. Die Komposition von symmetrischen Operatoren ist wieder symmetrisch, sofern die Operatoren kommutieren:

$$\begin{aligned} \langle STx, y \rangle &= \langle S(Tx), y \rangle \stackrel{S \text{ symmetrisch}}{=} \langle Tx, Sy \rangle = \\ &= \langle x, T(Sy) \rangle = \langle x, TSy \rangle = \langle x, STy \rangle. \end{aligned}$$

Ist  $T$  symmetrisch, so ist  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$ . Verallg. Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\langle Tx, y \rangle| &= \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle \quad \forall x, y \in V. \\ V &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle Tx, x \rangle \end{aligned}$$

ist die  $T$  zugeordnete quadratische Form.

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

heißt die zugeordnete Bilinearform. Beide bestimmen  $T$  eindeutig denn: Ist  $\langle Tx, x \rangle = \langle Sx, x \rangle \quad \forall x \in V$ , so setze  $R = T - S$  und erhalte  $\langle Rx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow$  quadratische Form von  $R$  ist identisch 0. Mit Schwarzscher Ungleichung:

$$\langle Rx, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in V$$

Damit folgt ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nicht ausgeartet), dass  $R = 0$  und weiter  $T = S$ .

**Satz 5.11.** Sei  $T : V \rightarrow V$  stetig, symmetrisch  $\Rightarrow$

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

*Beweis.* Sei  $x \in V$  mit  $\|x\| = 1$ . Dann gilt:

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\| \cdot |\langle x, x \rangle| = \|T\| \cdot \|x\|^2 = \|T\| \|x\| = \|T\|.$$

$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle| \leq \|T\|.$

Umgekehrt: Sei  $\alpha > 0$  und rechne wie folgt:

$$\begin{aligned} 4\|Tx\|^2 &= \left\langle T\left(\alpha x + \frac{1}{\alpha}Tx\right), \alpha x + \frac{1}{\alpha}Tx \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle T\left(\alpha x - \frac{1}{\alpha}Tx\right), \alpha x - \frac{1}{\alpha}Tx \right\rangle \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle| \cdot \left( \left| \alpha x + \frac{1}{\alpha}Tx \right|^2 + \left| \alpha x - \frac{1}{\alpha}Tx \right|^2 \right) = \\ &\stackrel{\text{Parallelogramm-Identitat}}{=} 2 \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle| \left( \alpha^2|x|^2 + \frac{1}{\alpha^2}|Tx|^2 \right) \end{aligned}$$

Fur  $Tx \neq 0$  setze  $\alpha^2 = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$  und erhalte  $\|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle| \cdot \|x\|$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$$

□

**Satz 5.12.** Jeder Eigenwert eines symmetrischen Operators ist reell. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.

*Beweis.* Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert von  $T$ , also  $Tx = \lambda x$  fur ein  $x \in V$ ,  $x \neq 0$ . Wissen:  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ . Also:

$$\frac{\langle Tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle \lambda x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sei  $\mu \neq \lambda$  weiterer Eigenwert von  $T$  mit Eigenvektor  $y \neq 0$ ,  $Ty = \mu y$ . Dann:  
 $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \Rightarrow (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$   
 $\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0.$  □

*Bemerkung (Erinnerung lineare Algebra).* Sei  $V$  endlich-dim. komplexer VR mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Gegeben sei eine Basis  $v_1, \dots, v_k \in V$  von Eigenvektoren von  $T : V \rightarrow V$ . (existiert etwa, wenn  $T$  symmetrisch). Für  $x \in V$  schreibe

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt:

$$Tx = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i v_i.$$

Speziell:  $v_1, \dots, v_k$  ONB bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann  $\alpha_i = \langle x, v_i \rangle$ , also

$$x = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i$$

und damit

$$Tx = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle \lambda_i v_i.$$

Diese Darstellungen lassen sich verallgemeinern in der sg. Spektraltheorie für kompakte Operatoren (aufwendig, Heuser [4] p. 542-571, bzw. p. 465-505), aber für symmetrische kompakte Operatoren relativ einfach zu formulieren:

**Satz 5.13.** *Sei  $V$  Prähilbertraum,  $T : V \rightarrow V$ ,  $T \neq 0$ , symmetrisch und kompakt. Man erhält eine Orthonormalfolge  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von Eigenvektoren von  $T$  durch folgenden Algorithmus:*

*$v_1$  wird gegeben als Lösung des Variationsproblems*

$$|\langle Tx, x \rangle| \rightarrow \max, \quad x \in V, \quad \|x\| = 1.$$

*Sind  $v_1, \dots, v_{k-1}$  konstruiert, so ist  $v_k$  gegeben als Lösung des Variationsproblems*

$$|\langle Tx, x \rangle| \rightarrow \max, \quad x \in V, \quad \|x\| = 1, \quad x \in v_1^\perp \cap \dots \cap v_{k-1}^\perp$$

*, also  $x$  orthogonal auf  $v_1, \dots, v_{k-1}$ . Dies wird durchgeführt, solange das jeweilige Maximum  $|\langle Tx, x \rangle|$  positiv ist (das ist der zu  $v_k$  gehörige Eigenwert  $\lambda_k$ ). Man erhält so alle Eigenwerte  $\neq 0$ , die  $(\lambda_k)_k$  bilden Nullfolge, und es gilt:*

$$T = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \langle x, v_k \rangle v_k = \sum_{k \geq 1} \langle Tx, v_k \rangle v_k \quad (\star)$$

*Zusatz:  $V$  Hilbertraum, so werden die kompakten symmetrischen Operatoren durch  $(\star)$  charakterisiert.*

*Beweis.* Idee: Finde zuerst  $v_1$  und  $\lambda_1$ . Nach Satz 5.11:  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$ . Also existiert eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $V$  mit  $|\langle Tx_i, x_i \rangle| \rightarrow \|T\| := |\lambda|$  für  $i \rightarrow \infty$ ,  $\|x_i\| = 1$ .

*Behauptung:*  $\lambda$  ist Eigenwert von  $T$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tx_i - \lambda x_i\|^2 = \|Tx_i\|^2 - 2\lambda \langle Tx_i, x_i \rangle + \lambda^2 \|x_i\|^2 \leq \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle Tx_i, x_i \rangle + \|T\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

also  $Tx_i \rightarrow \lambda x_i$ , also  $Tx_i - \lambda x_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ .  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  beschränkt,  $T$  kp.  $\Rightarrow (Tx_i)_{i \in \mathbb{N}}$  hat konvergente TF.  $\Rightarrow$  Nach Übergang zur TF o. B. d. A.  $(Tx_i)_{i \in \mathbb{N}}$  konvergent in  $V$ . Sei  $v = \lim_{i \rightarrow \infty} Tx_i \in V$ . Sei  $w = \lim_{i \rightarrow \infty} Tx_i \in V$  und  $u = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$  (da dann auch  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  konvergieren). Wegen  $(Tx_i = \lambda x_i) \rightarrow 0$  folgt durch Grenzübergang  $Tv = w = \lambda v$ , also  $v$  Eigenvektore von  $T$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Setzte also  $v_1 = v$ ,  $\lambda_1 = \lambda$ .

Betrachte also  $V_1 = v_1^\perp \subseteq V$  abgeschlossen und  $T_1 = T|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_1$  wohldefiniert (da  $T_1 x \perp v_1 \forall x \in V$  mit  $x \perp v_1$ ).

$\langle Tx, v_1 \rangle = \langle x, Tv_1 \rangle = \langle x, \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, v_1 \rangle = 0$ ,  $T_1$  symmetrisch und  $T_1$  wieder kompakt. Wiederhole nun die Konstruktion von vorher für  $T_1 : V_1 \rightarrow V_1$ . Per Induktion erhalte  $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$  Eigenvektor mit Eigenwert  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$

*Nachtrag:*  $|\langle Tx_i, x_i \rangle| \rightarrow |\lambda|$ ,  $\langle Tx_i, x_i \rangle \rightarrow \lambda$ . □

# Literaturverzeichnis

- [1] El Kacimi: *Introducción al análisis funcional*. Editorial Reverté 1994.
- [2] L. Schwartz: *Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann 1970.
- [3] Rudin: *Functional Analysis*. McGraw Hill 1973.
- [4] Heuser: *Funktionalanalysis*. Teubner 1992.
- [5] Heuser: *Lehrbuch der Analysis 2*. Teubner 1990.
- [6] Werner Dirk: *Funktionalanalysis*. Springer 1995.
- [7] Rudin: *Real and complex Analysis*. McCraw Hill 1966.
- [8] Brezis: *Analyse fonctionnelle*. Masson 1983.
- [9] Yosida: *Functional Analysis*. Springer 1968.
- [10] Edwards: *Functional Analysis*. Ribehart + Winston 1965.
- [11] Hewitt-Ross: *Abstract Harmonic Analysis*. Springer 1963/1970.
- [12] Loomis: *An Introduction to abstract harmonic analysis*. Van Nostrand 1953.
- [13] Lang: *Real and Functional Analysis*. Springer, 1993.
- [14] Wloka: *Funktional Analysis und Anwendungen*. De Gruyter 1971.
- [15] Dieudonné: *History of Functional Analysis*. North Holland 1981.
- [16] Grothendieck: *Topological Vectorspaces*. Gordon and Breach 1973.
- [17] Reed, Simon: *Functional Analysis*. Academic Press 1980.

- [18] Boccara: *Functional Analysis (An Introduction for Physicists)*. Acad. Press 1990.
- [19] Richtmeyer: *Principles of advanced math. physics*. Springer 1978.
- [20] Christensen and Jensen: *Frames, Rieszbases, and discrete Gabor/wavelet expansions*. Bull. of the Am. Math. Soc. **38** (2001), 273-291.
- [21] Christensen: *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Birkhäuser 2003.
- [22] Wojtaszczyk: *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Lond. Math. Soc. Student Texts 37 (1997), .
- [23] Roman, Steven: *Advances in Linear Algebra*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 135, Springer-Verlag 1992.
- [24] Young: *An Introduction to Nonharmonic Fourier-Series*, Acad. Press 1980.

# Index

- $L^p([a, b], \mathbb{R})$ , 31
- $\mathbb{K}[[x]]$ , 32
- $\mathcal{L}^p([a, b], \mathbb{R})$ , 31
- $\mathbb{Q}_p$ , 32
- $\mathbb{R}\{x\}$ , 33
- $c(\mathbb{R})$ , 27
- $c_0(\mathbb{R})$ , 27
- $l^\infty(\mathbb{R})$ , 27
- äquivalente Metrik, 11
- abgeschlossen, 9
- abstands-erhaltend, 12
- Adjungierter Operator, 66
- ausgewogen, 21, 24
- Banachscher Fixpunktsatz, 15
- Basis
  - algebraische, 52
  - topologische, 53
- Bessel-Folge, 57
- Bessel-Gleichung, 41
- Bessel-Ungleichung, 41
- Bilinearform, 34
  - alternierende, 34
  - symmetrische, 34
  - hermitesche, 34
  - Kern einer, 34
  - nicht ausgeartete, 34
  - positiv definite, 34
  - positive, 34
- Cauchyfolge, 11
- Darstellungssatz von Fréchet-Riesz, 38
- Dini-Bedingung, 48
- dominant, 57
- Eigenwert, 67
- Erzeugendensystem
  - algebraisches, 52
  - topologisches, 53
- Erzeugnis
  - algebraisches, 53, 54
  - topologisches, 53, 54
- formale Potenzreihe, 32
- gerichtete Menge, 39
- Hölderungleichung, 26
- Haar-Wavelet, 48
- Halbnorm, 20
- Hamel - Basis, 56
- Hamming-Metrik, 10
- Hausdorffsch, 9
- Hilbert - Basis, 40
- Hilbert-Folge, 57
- Hilbertraum, 36
- Hilbertsumme, 39
- Homöomorphismus, 9
- invertierbar, 60
- Isometrie, 12
- kompakt, 9
- kontrahierend, 11
- konvergent, 11
- konvergente Potenzreihe, 33
- Kugel, 21

- lebesgue-integrierbare Funktionen, 31
- Limes, 11
- linear unabhängig
  - algebraisch, 52
  - topologisch, 53
- linksinvertierbar, 60
- Lipschitz-stetig, 11
- lokalkonvex, 20
- m-adische Topologie, 32
- Metrik, 9
- Minkowskische Ungleichung, 35
- Minkowskiungleichung, 26
- nahe, 32
- Norm, 20
- normierbar, 21
- normierter Vektorraum, 21
- offen, 9
- Operator
  - kompakter, 69
- orthogonal, 40
- Orthogonalisierungsverfahren, Gram-Schmidtsches, 44
- Orthogonalsystem, 40
  - maximales, 40
  - totales, 40
- orthonormal, 40
- Orthonormalbasis, 42
- Orthonormalsystem, 40
  - maximales, 40
  - totales, 40
- p-adische Zahlen, 31
- Parallelogrammgleichung, 36
- Parseval-Identität, 42
- Prähilbertraum, 35
- Punktspektrum, 67
- quasi-isometrisch, 11
- Räume
  - beschränkter Funktionen, 27
  - Folgenräume, 26
  - Funktionen auf offenen Mengen, 29
- Rahmen, 57
- rechtsinvertierbar, 60
- reflexiv, 39
- regulärer Wert, 67
- Riesz-Basis, 57
- Rieszisches Lemma, 22
- Satz von
  - Arzelá-Ascoli, 18
  - Baire, 16
  - Hahn-Banach, 7
  - Pythagoras, 36
  - Riesz, 21
  - Riesz-Fischer, 44
  - Stone-Weierstraß, 45
- Schauder-Basis, 53
- Schwarzsche Ungleichung, 35
- Selbstadjungierter Operator, 77
- Seminorm, 20
- separabel, 54
- separiert, 9
- Sesquilinearform, 34
- Skalarprodukt
  - komplexes, 34
  - reelles, 34
- Spektralradius, 67
- Spektralwert, 67
- Spektrum, 67
- stabil, 21
- sternförmig, 24
- stetig, 9
  - gleichgradig, 18
  - gleichmäßig, 11
- summierbar, 39
- Symmetrischer Operator, 77
- Topologie, 9

- topologische Summe, 39
- Transponierter Operator, 66
  
- unbedingt konvergent, 56
- unendlich-dimensional, 51
  
- Vektorraum
  - endlich-dimensionaler, 26
  - hermitescher, 35
- vollständig, 12
  
- Wavelets, 48
- Weierstraßscher Divisionssatz, 63