

# THEORETISCHE METHODEN DER PHYSIK 2

Helmuth Hüffel  
Fakultät für Physik der Universität Wien

Vorlesungsskriptum  
Sommersemester 2008

Version vom 20-01-2009

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen und Randwertprobleme</b>                                 | <b>7</b>  |
| 1.1      | Wiederholung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen . . . . .                  | 8         |
| 1.1.1    | Typ getrennte Variable . . . . .  | 10        |
| 1.1.2    | Lineare DGL 1. Ordnung . . . . .  | 10        |
| 1.1.3    | Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .                                  | 10        |
| 1.1.4    | Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .                                | 11        |
| 1.1.5    | Allgemeine homogene lineare DGL 2. Ordnung . . . . .  | 12        |
| 1.1.6    | Allgemeine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung . . . . .  | 13        |
| 1.1.7    | Potenzreihenentwicklung . . . . .   | 13        |
| 1.2      | Randwertprobleme bei gewöhnlichen DGL 2. Ordnung . . . . .  | 16        |
| 1.2.1    | Sturm-Liouville'sches Randwertproblem . . . . .   | 18        |
| 1.2.2    | Verallgemeinerung der Randbedingungen . . . . .   | 20        |
| 1.2.3    | Wichtige Beispiele . . . . .  | 20        |
| <b>2</b> | <b>Fourierreihen, Fouriertransformation und Laplacetransformation</b>                                   | <b>23</b> |
| 2.1      | Fourierreihen . . . . .   | 23        |
| 2.2      | Fourier-Transformation . . . . .  | 28        |
| 2.2.1    | Ableitungsformeln bei Fouriertransformation . . . . .   | 30        |
| 2.2.2    | Faltungsformeln . . . . .   | 31        |
| 2.2.3    | Anwendungsbeispiel der Fouriertransformation . . . . .  | 32        |
| 2.2.4    | Mehrdimensionale Fouriertransformation . . . . .  | 33        |
| 2.2.4.1  | Fouriertransformation einer radialsymmetrischen Funktion . . . . .                                      | 33        |
| 2.3      | Laplacetransformation . . . . .   | 35        |
| 2.3.1    | Beispiele zur Laplace-Transformation . . . . .  | 35        |
| 2.3.2    | Ableitungsformeln . . . . .   | 36        |
| 2.3.3    | Zusammenhang mit der Fourier-Transformation . . . . .   | 36        |
| 2.3.4    | Umkehrtransformation der Laplace-Transformation . . . . .   | 37        |
| 2.3.5    | Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung gewöhnlicher DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . . | 38        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Spezielle Funktionen</b>  | <b>40</b> |
| 3.1      | Legendre-Polynome . . . . .  | 40        |
| 3.1.1    | Explizite Formel für die Legendre-Polynome . . . . .                             | 42        |
| 3.1.2    | Formel von Rodrigues . . . . .   | 43        |
| 3.1.3    | Integraldarstellung der $P_n$ . . . . .  | 43        |
| 3.1.4    | Legendre Polynome $P_n$ und DGL . . . . .  | 43        |
| 3.1.5    | Normierung, Orthogonalität . . . . .   | 44        |
| 3.2      | Besselfunktion $J_n(x)$ . . . . .  | 46        |
| 3.3      | Hermite-Polynome . . . . .   | 47        |
| 3.3.1    | Integraldarstellung . . . . .  | 48        |
| 3.3.2    | Differentialgleichung . . . . .  | 49        |
| 3.4      | Laguerre-Polynome $L_n(x)$ . . . . .   | 49        |
| 3.4.1    | Erzeugende Funktion . . . . .  | 49        |
| 3.4.2    | Integraldarstellung . . . . .  | 49        |
| 3.4.3    | Assoziierte Laguerre-Polynome . . . . .  | 50        |
| 3.4.4    | Differentialgleichung . . . . .  | 50        |
| 3.5      | Kugelfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ . . . . .                            | 50        |
| 3.6      | Gammafunktion $\Gamma(x)$ . . . . .  | 52        |
| <b>4</b> | <b>Theorie der Distributionen</b>  | <b>54</b> |
| 4.1      | Grundlegende Definitionen . . . . .  | 54        |
| 4.2      | Konventionelle Funktionen als Distributionen . . . . .                           | 56        |
| 4.3      | Rechenregeln . . . . .   | 58        |
| 4.3.1    | Summe . . . . .  | 58        |
| 4.3.2    | Lineare Transformationen . . . . .   | 58        |
| 4.3.3    | Produkt . . . . .  | 59        |
| 4.3.4    | Differentiation von Distributionen . . . . .                                     | 60        |
| 4.4      | Fouriertransformation von Distributionen . . . . .                               | 63        |
| 4.4.1    | Kurze Wiederholung der Fouriertransformation . . . . .                           | 63        |
| 4.4.2    | Fouriertransformation einer temperierten Distribution . . . . .                  | 64        |
| 4.5      | Faltung von Distributionen . . . . .   | 65        |
| 4.5.1    | Wiederholung formale Diskussion / heuristische Notation . . . . .                | 67        |
| 4.6      | Nichtlineare Variablentransformation der $\delta$ -Funktion . . . . .            | 68        |
| 4.7      | Temperierte Distributionen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .                           | 70        |
| 4.8      | Greensfunktionsmethode . . . . .   | 71        |
| <b>5</b> | <b>Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung im <math>\mathbb{R}^3</math></b> | <b>73</b> |
| 5.1      | Einleitung . . . . .   | 73        |
| 5.2      | Laplace-Gleichung . . . . .  | 74        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.2.1    | Randwertproblem, Eindeutigkeit der Lösung . . . . .             | 74        |
| 5.2.2    | Fundamentallösung der Laplace-Gleichung . . . . .               | 75        |
| 5.2.3    | Produktansatz in Polarkoordinaten . . . . .                     | 76        |
| 5.2.3.1  | Produktansatz . . . . .   | 76        |
| 5.2.3.2  | Randbedingung . . . . .   | 78        |
| 5.2.4    | Produktansatz in Zylinderkoordinaten . . . . .                  | 79        |
| 5.2.4.1  | Produktansatz (für innere Lösung) . . . . .                     | 80        |
| 5.2.4.2  | Lösung des RWP . . . . .  | 81        |
| 5.2.5    | Produktansatz in kartesischen Koordinaten . . . . .             | 81        |
| 5.2.5.1  | Produktansatz . . . . .   | 81        |
| 5.2.5.2  | Randbedingung . . . . .   | 82        |
| 5.3      | Poisson-Gleichung . . . . .                                     | 82        |
| 5.3.1    | Randwertprobleme und Eindeutigkeit . . . . .                    | 83        |
| 5.3.2    | Green-Funktion . . . . .  | 83        |
| 5.3.3    | Dirichlet-Green-Funktion . . . . .                              | 83        |
| 5.3.4    | Spiegelungsmethode . . . . .                                    | 84        |
| 5.3.5    | Multipolentwicklung . . . . .                                   | 85        |
| 5.4      | Schwingungsgleichung . . . . .                                  | 86        |
| 5.4.1    | Homogene Schwingungsgleichung . . . . .                         | 86        |
| 5.4.2    | Fundamentallösung . . . . .                                     | 86        |
| 5.4.3    | Produktansatz in Polarkoordinaten . . . . .                     | 87        |
| 5.4.4    | Inhomogene Schwingungsgleichung . . . . .                       | 88        |
| 5.5      | Wärmeleitungsgleichung . . . . .                                | 89        |
| 5.6      | Schrödingergleichung . . . . .                                  | 90        |
| 5.7      | Wellengleichung . . . . .                                       | 92        |
| 5.7.1    | Radialsymmetrische Lösung . . . . .                             | 92        |
| 5.7.2    | Stationäre Lösung . . . . .                                     | 93        |
| 5.7.3    | Ebene Wellen . . . . .  | 94        |
| 5.7.4    | Inhomogene Wellengleichung . . . . .                            | 94        |
| 5.7.5    | Allgemeine Lösung des Anfangswertproblems . . . . .             | 96        |
| <b>6</b> | <b>Lineare Operatoren im Hilbertraum</b>                        | <b>98</b> |
| 6.1      | Grundtatsachen der Lebesgue'schen Integrationstheorie . . . . . | 98        |
| 6.2      | Hilberträume . . . . .  | 103       |
| 6.3      | Basissysteme im Hilbertraum . . . . .                           | 107       |
| 6.4      | Lineare Operatoren in endlich-dimensionalen Räumen . . . . .    | 109       |
| 6.4.1    | Eigenwerte, Eigenvektoren . . . . .                             | 110       |
| 6.5      | Lineare beschränkte Operatoren im Hilbertraum . . . . .         | 115       |
| 6.6      | Lineare unbeschränkte Operatoren . . . . .                      | 117       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>7</b> | <b>Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse</b>      | <b>119</b> |
| 7.1      | Einführung (Brownsche Bewegung) . . . . .                          | 119        |
| 7.1.1    | Eindimensionale Irrfahrt . . . . .                                 | 119        |
| 7.1.1.1  | Kombinatorische Herleitung . . . . .                               | 119        |
| 7.1.1.2  | Einsteins Herleitung . . . . .                                     | 120        |
| 7.1.2    | Eindimensionale Brown'sche Bewegung . . . . .                      | 120        |
| 7.1.2.1  | Historische Entwicklung . . . . .                                  | 120        |
| 7.1.2.2  | Theorie . . . . .  | 121        |
| 7.1.3    | Langevins Beschreibung der Brown'schen Bewegung . . . . .          | 122        |
| 7.2      | Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .                | 123        |
| 7.3      | Stochastische Prozesse . . . . .                                   | 124        |
| 7.4      | Stochastische Differentialgleichungen und der Itô-Kalkül . . . . . | 127        |

## Literatur

- [1] ARFKEN, GEORGE B. und HANS-JURGEN WEBER: *Mathematical methods for physicists*. Elsevier Acad. Press, Amsterdam [u.a.], 2005.
- [2] ARNOLD, LUDWIG: *Stochastische Differentialgleichung*. Oldenbourg, 1973.
- [3] BAUER, HEINZ: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*. de Gruyter, 1978.
- [4] BERENDT, G. und E. WEIMAR: *Mathematik für Physiker*, Band 1. Physik-Verlag, 1990.
- [5] BERENDT, G. und E. WEIMAR: *Mathematik für Physiker*, Band 2. Physik-Verlag, 1990.
- [6] DYM, HARRY und HENRY P. MACKEAN: *Fourier series and integrals*. Acad. Press, New York, NY [u.a.], 1972.
- [7] GARDINER, CRISPIN W.: *Handbook of stochastic methods*. Springer, 2004.
- [8] GELFAND, IZRAIL M. und GEORGIJ E. SILOV: *Generalized functions*, Band 1. Academic Press, New York, NY [u.a.], 1980.
- [9] GELFAND, IZRAIL M. und GEORGIJ E. SILOV: *Generalized functions*, Band 2. Academic Press, New York, NY [u.a.], 1968.
- [10] GROSSMANN, SIEGFRIED: *Funktionalanalysis*, Band 2. Akad. Verl.-Ges., 1977.
- [11] GROSSMANN, SIEGFRIED: *Funktionalanalysis*, Band 1. Akad. Verl.-Ges., 1975.
- [12] HEUSER, HARRO: *Lehrbuch der Analysis*, Band 2. Teubner, Stuttgart, 2004.
- [13] JACKSON, JOHN DAVID: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [14] KAMKE, ERICH: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*. Teubner, Stuttgart, 1983.
- [15] LANG, CHRISTIAN B. und NORBERT PUCKER: *Mathematische Methoden in der Physik*. Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, 2005.
- [16] LIGHTHILL, MICHAEL J.: *Introduction to Fourier analysis and generalised functions*. Cambridge Univ. Pr., Cambridge [u.a.], 2003.
- [17] REED, MICHAEL und BARRY SIMON: *Methods of modern mathematical physics*, Band 1. Academic Press, 2003.
- [18] RIESZ, FRIGYES und BÉLA SZOKEFALVI-NAGY: *Vorlesungen über Funktionalanalysis*. Deutsch, 1982.
- [19] WHITTAKER, EDMUND T. und GEORGE NEVILLE WATSON: *A Course of Modern Analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

# Vorwort

Dieses Skriptum ist ursprünglich von Markus Drapalik und Bernhard Reiter als Mitschrift meiner Vorlesung „Theoretische Methoden der Physik 2“ im SS05 entstanden. Bernhard Reiter führte im Sommer 2007 eine umfassende Erweiterung des Skriptums an Hand meiner Vorlesungsunterlagen durch und fügte zahlreiche Abbildungen hinzu; ich danke Bernhard Reiter für die sorgfältige Ausarbeitung. Ich habe das Skriptum seit Winter 2007/2008 überarbeitet.

Ich möchte mich bei den HörerInnen meiner Vorlesung im SS08 - insbesondere bei Gabriele Uchida - für zahlreiche Korrekturen sehr herzlich bedanken!

Helmuth Hüffel

Wien, im Jänner 2009

# Kapitel 1

## Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen und Randwertprobleme

Eine *Differentialgleichung* (DGL) ist eine Gleichung, in der die Variable  $x$ , die gesuchte Funktion  $y(x)$  sowie deren Ableitungen vorkommen.

Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* in einer Variable  $x$  und einer gesuchten Funktion  $y(x)$  ist von der Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Die höchste auftretende ( $n$ -te) Ableitung heißt *Ordnung* der Differentialgleichung.

**Beispiel** (Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung).

$$(y')^2 + y^2 = 1$$

Einen bedeutenden Spezialfall stellt die *lineare gewöhnliche Differentialgleichung* dar: sie ist linear in  $y, y', y'', \dots$

**Beispiel** (Lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung).

$$y'' + y = 0 \tag{1.1}$$

mit Lösung ( $c_1, c_2$  Konstanten)

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{1.2}$$

*Bemerkung* (Notation). Motiviert von der physikalischen Anwendung heißt die Variable oft  $t$  (*time*) und die gesuchte Funktion  $x(t)$ ; die Ableitung nach  $t$  wird mit einem Punkt bezeichnet,  $\dot{x}(t)$ . In dieser Schreibweise lauten die obige DGL (1.1) und ihre Lösung (1.2)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= 0 \\ x(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{aligned}$$

Fragen, die im Zusammenhang mit DGL auftreten, sind insbesondere nach *Existenz*, *Eindeutigkeit* und *Gesamtheit* der Lösungen.

Ein *Anfangswertproblem* gibt Werte zu einer DGL ausschließlich an derselben Stelle vor,

$$y(x_0), y'(x_0), \dots$$

bzw.

$$x(t_0), \dot{x}(t_0), \dots$$

Ein Randwertproblem gibt dagegen Werte an verschiedenen Stellen vor, z. B. ( $x_0 \neq x_1$ )

$$y(x_0), y(x_1)$$

bzw.

$$x(t_0), x(t_1)$$

**Beispiel** (Randwertproblem).

$$y'' + y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

Wir werden sehen, dass  $y(x) = 0$  für alle  $x$ . Dieses Randwertproblem hat damit *keine nichttriviale* Lösung!

Wir ändern unsere Fragestellung und wollen jetzt wissen, zu welchen Werten  $\lambda \in \mathbb{C}$  es Lösungen  $y(x)$  gibt, die

$$y'' + \lambda y = 0$$

erfüllen, und wie alle diese  $\lambda_n$  und  $y_n(x)$  (für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) lauten. Ein Beispiel für eine solche Situation liefert die Quantenmechanik (QM): Für welche Energiewerte hat die Schrödingergleichung eines Elektrons im Wasserstoffatom Lösungen?

## 1.1 Wiederholung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen

**Satz** (Existenz- und Eindeutigkeitsatz (Peano, Picard-Lindelöf; ohne Beweis)). *Sei*

$$y' = f(x, y)$$

*Wenn  $f$  stetig im rechteckigen Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  ist, sowie in  $G$  die Lipschitzbedingung erfüllt, so gibt es für jedes  $(x_0, y_0) \in G$  genau eine Lösung der DGL, die in einer Umgebung von  $x_0$  definiert ist,  $y(x_0) = y_0$  erfüllt und stetig von  $(x_0, y_0)$  abhängt.*

**Definition** (Lipschitzbedingung). Die Funktion  $f$  erfüllt im rechteckigen Gebiet  $G$  eine Lipschitzbedingung, wenn es ein  $N > 0$  gibt, sodass für alle  $(x, y_1), (x, y_2) \in G$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N |y_2 - y_1|$$

*Bemerkung.* Für uns genügt die schwächere Version für Existenz und Eindeutigkeit, dass  $f$  in einem rechteckigen Gebiet *stetig* sein und (bei festem  $x$ ) eine *beschränkte partielle Ableitung nach  $y$*  haben soll, d. h.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < N$$

für  $N > 0$  sein soll.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Voraussetzung des Eindeutigkeitsatzes mit  $y \geq a$ ,  $a > 0$  erfüllt.

$$f(x, y) = \sqrt{y}$$

ist stetig,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

ist beschränkt, da  $a > 0$ . Also existiert eine eindeutige Lösung (siehe Übungen).

Speziell für

$$y' + f(x)y = g(x)$$

lautet der Existenz- und Eindeutigkeitsatz (EES):

Wenn  $f(x)$ ,  $g(x)$  auf abgeschlossenem Intervall stetig, dann gibt es eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung  $y(x_0)$ ,  $x_0 \in I$  erfüllt.

Schließlich für

$$y'' = f(x, y, y')$$

ist der EES wie folgt:

Wenn  $f$  stetig im zylindrischen Gebiet  $G = I \times K_2$  (wo  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $K_2 \in \mathbb{R}^2$  Kreisscheibe) ist, und partielle Ableitungen nach  $y$ ,  $y'$  besitzt, so existiert eine eindeutige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta_0 \\ y'(x_0) &= \eta_1 \end{aligned}$$

erfüllt.

### 1.1.1 Typ getrennte Variable

$$\begin{aligned}y' &= \frac{f(x)}{g(y(x))} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{f(x)}{g(y)} \\ \int g(y)dy &= \int f(x)dx\end{aligned}$$

anschließend nach  $y(x)$  auflösen

### 1.1.2 Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

$$y_{\text{ges}}(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{spez}}(x)$$

$y_{\text{hom}}$  ist allgemeine Lösung von  $y' + f(x)y = 0$  und das ist ja Typ getrennte Variable  
 $y_{\text{spez}}$  durch Variation der Konstanten

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}y' + y &= 1 + x \\ y_{\text{hom}} &= ke^{-x}, \quad k \in \mathbb{R} \\ y_{\text{spez}}(x) &= k(x)e^{-x} \\ k'e^{-x} - ke^{-x} + ke^{-x} &= 1 + x \\ k' &= (1 + x)e^x \\ k &= \int (1 + x)e^x dx = e^x + xe^x - e^x + c\end{aligned}$$

wählen  $c = 0$

$$y_{\text{ges}} = ke^{-x} + x$$

### 1.1.3 Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Ansatz:

$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$  :  $y_{\text{hom}} = c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  :  $y_{\text{hom}} = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$
- Wenn  $y_1, y_2$  Lösungen der homogenen linearen DGL sind, so ist  $c_1y_1 + c_2y_2$  selbst für  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  eine Lösung

– wenn  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  gilt für  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ :  $y_1^* = y_2$  und

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} y_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_1^*) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ \operatorname{Im} y_1 &= \frac{1}{2i}(y_1 - y_1^*) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)x} &= e^\alpha \cos \beta x \\ \operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)x} &= e^\alpha \sin \beta x\end{aligned}$$

Für die homogene Lösung können wir somit ebenso gut schreiben

$$y_{\text{hom}} = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Zur Erinnerung:

2 Lösungen  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  sind linear unabhängig (heißen Hauptsystem)

Wronski-Determinante verschwindet nicht  $\forall x$

$$0 \neq W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

**Beispiel.**  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \forall x$$

### 1.1.4 Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

$$y_{\text{ges}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{spez}}$$

$$y_{\text{spez}} = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung  $y_{\text{hom}} = c_1 y_1 + c_2 y_2$  kennen wir schon aus Abschnitt 1.1.3;  $y_{\text{spez}}$  bestimmen wir mittels Variation der Konstanten. Man kann durch Einsetzen in inhomogene DGL nicht beide  $c_1$ ,  $c_2$  festlegen, daher ist extra Bedingung notwendig. Jede spezielle Lösung ist wählbar und somit jeder erfolgreiche Ansatz erlaubt. Tatsächlich führt die Bedingung

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

zu der einfachen Formel (siehe Übungen)

$$y_{\text{spez}}(x) = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

**Beispiel.**  $y'' + y = 1 \Rightarrow f(x) = 1$

$$\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$y_{\text{spez}} = -\cos x \int \sin x \, dx + \sin x \int \cos x \, dx = 1$$

$$y_{\text{ges}} = k_1 \cos x + k_2 \sin x + 1$$

### 1.1.5 Allgemeine homogene lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

Es existieren 2 l.u. Lösungen, aber es gibt *kein* allgemeines Verfahren zu deren Bestimmung.

Manchmal ist eine Lösung  $y_1(x)$  bekannt (z.B. durch Erraten), dann kann man dazu eine l.u. Lösung  $y_2(x)$  bestimmen.

Betrachten zunächst  $W$ , leiten ab und setzen für  $y''$  die DGL ein:

$$\begin{aligned} W &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \\ &= y_1(-f y_2' - g y_2) - y_2(-f y_1' - g y_1) = -f(y_1 y_2' - y_2 y_1') \\ &= -fW \\ \int \frac{dW}{W} &= - \int f dx \\ \ln W &= - \int f dx \\ W &= e^{- \int f dx} \end{aligned}$$

Trick:

$$\begin{aligned} \left( \frac{y_2}{y_1} \right)' &= \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2} \\ \frac{y_2}{y_1} &= \int \frac{W}{y_1^2} dx \\ y_2 &= y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx \end{aligned}$$

**Beispiel.**

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0, |x| < 1$$

Durch Erraten:  $y_1(x) = x$

Probe:

$$\begin{aligned}y_1' &= 1 \\y_1'' &= 0 \\-\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2}x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{2x}{1-x^2} \\W(x) &= e^{-\int \frac{-2x}{1-x^2} dx} = e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= x \int \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{x^2} dx \\&= \dots \\&= x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right) \\&= -1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\end{aligned}$$

### 1.1.6 Allgemeine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

$$y_{\text{ges}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{spez}}$$

Die homogene Lösung wird wie zuvor (Abschnitt 1.1.5) bestimmt, die spezielle Lösung wieder mittels Variation der Konstanten

$$y_{\text{ges}} = k_1 y_1 + k_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 h}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 h}{W} dx$$

### 1.1.7 Potenzreihenentwicklung

Wir betrachten

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

und suchen bei  $x = x_0$  *näherungsweise* Lösungen

**Definition.** 1. Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  bei  $x_0$  analytisch ins Komplexe fortgesetzt werden können, heißt  $x_0$  *reguläre Stelle*.

2. Gilt dies nur für  $(x - x_0)f(x)$  und  $(x - x_0)^2 g(x)$ , heißt  $x_0$  *reguläre Singularität*

3. Sonst heißt  $x_0$  *singuläre Stelle*

Es gilt (o. Bew.):

1. Ist  $x_0$  reguläre Stelle, so führt  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  zu zwei l. u. Lösungen

2. Ist  $x_0$  reguläre Singularität, so führt der *Frobeniusansatz*  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\rho+n}$ ,  $a_0 \neq 0$  zu mindestens einer Lösung  $y_1(x)$ . Der *Index*  $\rho$  wird als Lösung einer quadratischen Gleichung erhalten, wir bezeichnen diese beiden Wurzeln mit  $\rho_1, \rho_2$ .

- (a) Wenn  $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ , so liefern  $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\rho_1+n}$  und  $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{\rho_2+n}$  zwei l. u. Lösungen.
- (b) Wenn  $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$  (also insbesondere  $\rho_1 = \rho_2$ ), so liefert  $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{\rho_1+n}$  eine Lösung, die zweite dazu l. u. Lösung wird mit der Wronskideterminanten Methode gefunden und ergibt den Ansatz

$$y_2(x) = c y_1(x) \ln(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{\rho_2+n}$$

mit Konstanten  $c, b_n$ .

**Beispiel.**

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x(1-x)}y = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{x} & \dots & f(x) \\ \frac{1}{x(1-x)} & \dots & g(x) \end{array}$$

Es ist  $x_0 = 0$  eine reguläre Singularität, weil

$$\begin{aligned} x \frac{1}{x} &= 1 \\ x^2 \frac{1}{x(1-x)} &= \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

bei  $x = 0$  analytisch fortsetzbar ist ( $\frac{z}{1-z}$  hat keinen Pol bei  $z_0 = 0$ ).

Ansatz:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\rho+n} \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho+n)x^{\rho+n-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho+n)(\rho+n-1)x^{\rho+n-2} \end{aligned}$$

am besten in folgende Umformung einsetzen

$$\begin{aligned} &x(1-x)y'' + (1-x)y' + y = 0 \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n(\rho+n)(\rho+n-1)(x-x^2)x^{\rho+n-2} + a_n(\rho+n)(1-x)x^{\rho+n-1} + a_n x^{\rho+n}\} = 0 \end{aligned}$$

und sortieren nach Potenzen von  $x$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \{x^{\varrho+n-1}(\varrho+n)(\varrho+n-1+1) + x^{\varrho+n} [-(\varrho+n)(\varrho+n-1) - (\varrho+n) + 1]\} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varrho+n)^2 x^{\varrho+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n [1 - (\varrho+n)^2] x^{\varrho+n} = 0$$

Die niedrigsten Potenzen von  $x$  treten in den Summanden mit  $n = 0$  auf, und zwar in der ersten Summe bei

$$x^{\varrho-1} : a_0 \varrho^2$$

Nun ist lt. Vor.  $a_0 \neq 0 \Rightarrow \varrho^2 = 0 \Rightarrow \varrho = 0$  (ist in diesem Beispiel Zufall, dass  $\varrho = 0$ )

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^2 x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - n^2) x^n = 0$$

Wieder Koeffizientenvergleich:

$$x^{-1} : a_0 \cdot 0 = 0$$

also keine Aussage, setzen mit dem nächsten fort

$$x^0 : a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0$$

$$x^1 : 4a_2 + a_1(1-1) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$x^2 : 9a_3 + a_2(1-4) = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

könnte man noch fortsetzen, durch Induktionsbeweis Regelmäßigkeit zeigen, ...

$$y(x) = a_0(1-x)$$

$$\Rightarrow y_1 = 1-x$$

Potenzreihe hat für 2. Lösung nichts gebracht, aber wir können sie mit der Wronskideterminanten Methode bestimmen (siehe Übungen).

*Bemerkung.* Warum muss für die Möglichkeit mittels Frobeniusansatzes eine Lösung der Differentialgleichung zu erhalten die Bedingung der regulären Singularität erfüllt sein?

Wäre diese nicht erfüllt, wäre z.B.  $g(x) = \frac{c_{-3}}{x^3} + \sum_{k=-2}^{\infty} c_k x^k$  mit  $c_{-3} \neq 0$ , dann folgt nach Einsetzen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\varrho+n}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\varrho+n) x^{\varrho+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\varrho+n)(\varrho+n-1) x^{\varrho+n-2}$$

mittels Koeffizientenvergleiches, dass  $c_{-3} = 0 \Rightarrow$  Widerspruch!!

## 1.2 Randwertprobleme bei gewöhnlichen DGL 2. Ordnung

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

Randbedingung:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

$$a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, a \neq b$$

Spezialfälle:

- $\beta_1 = \beta_2 = 0$  Dirichlet'sches Randwertproblem
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  Neumann'sches Randwertproblem
- $h(x) = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$  homogenes Randwertproblem
- sonst inhomogenes Randwertproblem

Bei homogenen RWP gibt es immer die triviale Lösung  $y(x) \equiv 0$ ; wir nennen ein homogenes RWP *lösbar*, wenn es ein  $y(x) \not\equiv 0$  gibt.

Im Gegensatz zum AWP ist RWP i. A. nicht immer lösbar.

**Beispiel.**

$$y'' + y = 0$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

$$y = e^{\mu x}$$

$$\mu^2 + 1 = 0$$

$$\mu = \pm i$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y(0) = 0 = c_1$$

$$\Rightarrow y = c_2 \sin x$$

$$y(1) = 0 = c_2 \underbrace{\sin 1}_{\neq 0}$$

$$c_2 = 0$$

$$y(x) \equiv 0$$

**Beispiel.**

$$y'' + y = 1$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

Mittels Variation der Konstanten ( $W = 1, f = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 y &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1 \\
 y(0) = 0 &= c_1 + 1 \\
 \Rightarrow y &= -\cos x + c_2 \sin x + 1 \\
 y(\pi) = 0 &= -(-1) + c_2 \cdot 0 + 1
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen führt also auf den Widerspruch  $0 = 2$ ; es gibt daher keine Lösung!

Häufig kommt in Dgl. ein - üblicherweise  $\lambda$  genannter - Parameter vor, sodass für bestimmte Werte von  $\lambda_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  das RWP lösbar ist.

$\lambda_n$  heißen Eigenwerte EW, die zugehörigen Lösungen  $y_n(x)$  Eigenfunktionen EF des RWP. Suchen daher zunächst  $\lambda_n$ , dann erst  $y_n(x)$ !

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
 y'' + \lambda y &= 0 \\
 \lambda \in \mathbb{R}^+, y(0) = y(1) &= 0
 \end{aligned}$$

$$y = e^{\mu x}$$

$$\begin{aligned}
 \mu^2 + \lambda &= 0 \\
 \mu &= \pm i\sqrt{\lambda}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x \\
 y(0) = 0 &= c_1 \\
 \Rightarrow y &= c_2 \sin \sqrt{\lambda}x \\
 y(1) = 0 &= c_2 \sin \sqrt{\lambda} \\
 \Rightarrow \sqrt{\lambda} &= n\pi \\
 c_2 &\neq 0 \\
 \lambda_n &= (n\pi)^2 \\
 y_n &= c \sin n\pi x
 \end{aligned}$$

mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Die unbestimmte Konstante  $c$  kann durch eine „Normierungsbedingung“ festgelegt werden, z.B.:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 y_n^2(x) dx &= 1 \\
 c^2 \int_0^1 \sin^2 n\pi x dx &= \frac{c^2}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 y dy = \frac{c^2}{2} \\
 c &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

wobei Variablentransformation mit  $y = n\pi x$  benutzt wurde.

### 1.2.1 Sturm-Liouville'sches Randwertproblem

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

$p, q, r$  reelle stetige Funktionen und überdies ist  $p(x), r(x)$  positiv  $\forall x$

Ges.: Eigenwerte  $\lambda_n$  und zugehörige Eigenfunktionen  $y_n(x) \neq 0$

**Beispiel.**

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

In diesem Fall sind also

$$p(x) = r(x) = 1, q(x) = 0, a = 0, b = 1$$

Es gilt, ohne Beweis, erläutert am obigen Beispiel:

**Satz.** • *Eigenwerte sind reell, streng monoton steigend,  $\lambda_n \rightarrow \infty$*

*Bsp:  $\lambda_n = (n\pi)^2, n = 1, 2, 3, \dots$*

• *Eigenfunktionen sind bis auf konstanten Faktor eindeutig*

*Bsp.:  $y_n = c \sin n\pi x$*

• *EF  $y_n$  hat in  $(a, b)$   $n - 1$  Nullstellen*

*Bsp.:  $y_3 = c \sin 3\pi x$*

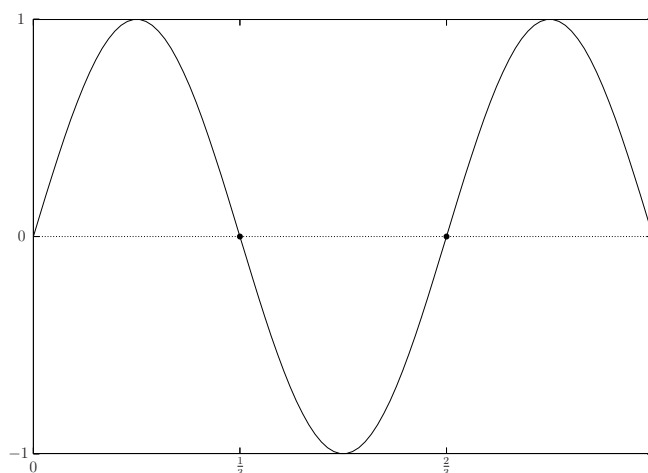


Abbildung 1.1:  $y(x) = \sin 3\pi x$

• *EF bilden (bei geeigneter Normierung) ein Orthonormalsystem mit Belegfunktion  $r(x)$*

$$\int_a^b r(x)y_n(x)y_m(x)dx = \delta_{nm}$$

Bsp.:  $y_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$

Sei  $n \neq m$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{2} \sin(n\pi x) \sqrt{2} \sin(m\pi x) dx &= \int_0^1 [\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x] dx \\ &= \frac{1}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{(n+m)\pi} \sin(n+m)\pi x \Big|_0^1 = 0 \end{aligned}$$

$n = m$ :

$$\int_0^1 2 \sin^2(n\pi x) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2n\pi x) dx = 1$$

- *EF*  $y_n$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Das bedeutet insbesondere für ein stückweise stetig in  $(a, b)$  differenzierbares  $f$ , welches die Randbedingungen erfüllt, dass  $f_N(x)$

$$f_N(x) := \sum_{n=0}^N c_n y_n(x)$$

mit

$$c_n := \int_a^b r(x)f(x)y_n(x)dx$$

gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiert (siehe auch Abb. 1.2). Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass für alle  $\epsilon$  ein  $N_0$  unabhängig von  $x \in (a, b)$  existiert, sodass  $\forall N', N > N_0$ , wo  $N' < N$

$$|f_N(x) - f_{N'}(x)| < \epsilon \quad \forall x \in (a, b)$$

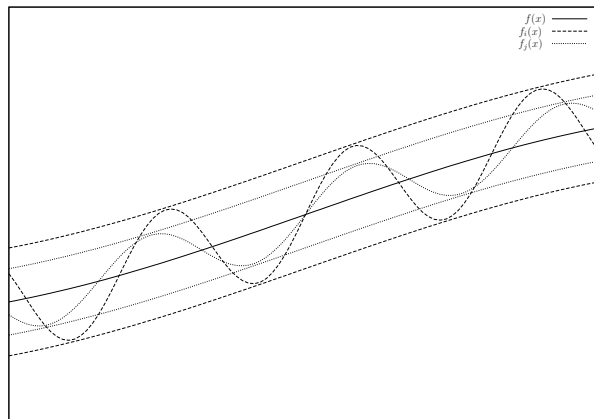


Abbildung 1.2: Gleichmäßige Konvergenz von  $f_N(x)$  gegen  $f(x)$  ( $i < j$ )

- *Beispiel:* Fourierreihenentwicklung von stetig differenzierbarem  $f(x)$ ,  $f(0) = f(1) = 0$ , konvergiert

gleichmäßig gegen  $f$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sqrt{2} \sin n\pi x$$
$$c_n = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \sin n\pi x \, dx$$

Wäre andererseits  $f$  in  $(a, b)$  lediglich Lebesgue-quadratintegrierbar (siehe 6.1), so konvergiert Fourierreihe  $f_N$  bloß im quadratischen Mittel gegen  $f$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b r(x) |f(x) - f_N(x)|^2 dx = 0$$

### 1.2.2 Verallgemeinerung der Randbedingungen

Es kann Stetigkeit, oder Endlichkeit, oder höchstens polynomiales Anwachsen bei  $a$  oder  $b$  gefordert werden.

Auch ein unendlich großes Intervall (z.B.  $a = 0$ ,  $b = \infty$ ) kann zugelassen sein.

### 1.2.3 Wichtige Beispiele

**Legendre-Polynome**  $P_n(x)$

$$((1 - x^2)y')' + \lambda y = 0, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\text{Randbedingung: } y(\pm 1) < \infty$$

ausschreiben und ausdifferenzieren:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Ohne Beweis: Randbedingung nur erfüllbar, wenn

$$\lambda = n(n + 1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$y_n \dots$  Legendre-Polynome

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Die Legendre Polynome kommen in der Lösung der Laplace Gleichung in Polarkoordinaten vor.

*Bemerkung.* DGL hat an sich zwei l. u. Lösungen, durch Randbedingung bleibt jedoch nur eine übrig.

**Besselfunktion**  $J_n$

$$(xy')' - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0, \quad x \in [0, 1]$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ist fix vorgegeben, darf nicht mit Eigenwert  $\lambda$  verwechselt werden

Randbedingung:  $y(1) = 0, y(0) < \infty$

mittels  $\xi = \sqrt{\lambda}x$  und  $y(x) := J(\xi)$  transformieren wir (siehe Übungen)

$$\xi^2 J''(\xi) + \xi J'(\xi) + (\xi^2 - n^2)J(\xi) = 0$$

transformierte Randbedingung:  $J(\sqrt{\lambda}) = 0, J(0) < \infty$

$$\Rightarrow \lambda_{n,m} = k_{n,m}^2, \quad k_{n,m} \dots \text{ Nullstellen von } J$$

$J_n$  heißen Besselfunktionen

$$y_n(x) = J_n(k_{n,m} x)$$

Die Besselfunktionen kommen in Lösungen der Laplace- und Schwingungsgleichung vor.

*Bemerkung.* Die zweite l. u. Lösung erfüllt die Randbedingung  $y(0) < \infty$  nicht.

### Hermite-Polynome $H_n$

$$(e^{-x^2} y')' + \lambda e^{-x^2} y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Randbedingung :  $y$  darf in  $\pm \infty$  höchstens wie endliche Potenz ansteigen (d.h.  $y$  ist Polynom)

Wir schreiben die Gleichung um, indem wir den Faktor  $e^{-x^2}$  abspalten:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Ohne Beweis:

$$\Rightarrow \lambda_n = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$y_n \dots$  Hermitepolynome  $H_n$

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2x$$

$$H_2 = 4x^2 - 2$$

Die Hermite Polynome kommen in der Lösung der Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators vor.

*Bemerkung.* Die zweite l. u. Lösung der DGL steigt nicht-polynomisch an.

### Laguerre-Polynome $L_n$

$$(xe^{-x} y')' + \lambda e^{-x} y = 0, \quad x \in [0, \infty]$$

Randbedingung :  $y(0) < \infty$  und  $y$  darf in  $\infty$  höchstens wie endliche Potenz ansteigen (d.h.  $y$  ist ein Polynom)

Wir schreiben die Gleichung um, indem wir den Faktor  $e^{-x}$  abspalten:

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$$

Ohne Beweis:

$$\Rightarrow \lambda_n = n$$

$y_n \dots$  Laguerre – Polynome  $L_n$

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = 1 - x$$

$$L_2 = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

Die Laguerre-Polynome kommen in der Lösung der Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms vor.

*Bemerkung.* Auch hier ist die zweite Lösung der DGL kein Polynom.

## Kapitel 2

# Fourierreihen, Fouriertransformation und Laplacetransformation

### 2.1 Fourierreihen

1822 postulierte Fourier (ohne stichhaltige Beweise):

„Jede beliebige Funktion  $f(x)$  mit Periode  $L$ , d. h.  $f(x) = f(x + L)$ , lässt sich in eine Reihe der Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right)$$

entwickeln, wo

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi nx}{L} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Analog gilt (siehe Übungen)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$$

wo

$$c_n = \int_0^L f(x) \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} dx$$

Beweise zu Fouriers Postulat – unter welchen Voraussetzungen die Reihe in welchem Sinne konvergiert:

Mitte 19. Jhd.: Dirichlet, Riemann

Anfang 20. Jhd.: Lebesgue, Riesz, Fischer

**Beispiel.**

$$f(x) = \left( \frac{\pi - x}{2} \right)^2 \quad x \in [0, 2\pi]$$

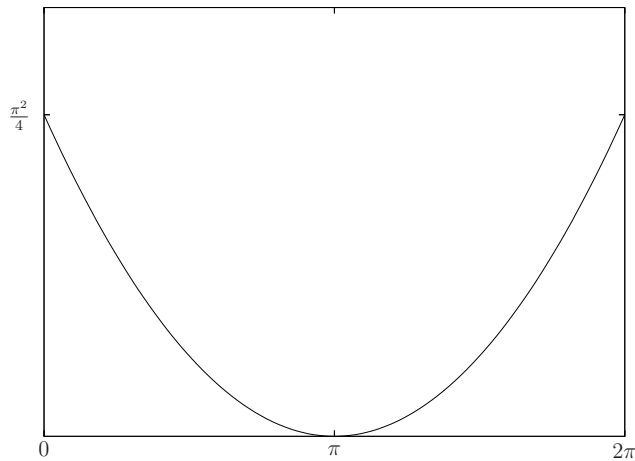


Abbildung 2.1:  $f(x) = \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$

Offensichtlich gilt  $f(0) = f(2\pi) = \frac{\pi^2}{4}$

Für  $n \neq 0$  ist

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \cos nx dx = \dots = \frac{1}{n^2}$$

$$b_n = \dots = 0$$

und

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 dx = \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Damit

$$f(x) \stackrel{?!?}{=} \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Mit Hilfe des folgenden Satzes wissen wir, dass  $\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  gleichmäßig gegen  $\left(\frac{\pi-x}{2}\right)$  konvergiert. Wollen folgenden Satz allgemein beweisen:

**Satz.** Sei  $f(x)$   $L$ -periodisch, stetig und stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe  $f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x}$  gleichmäßig gegen  $f$  (o. B. d. A.  $L = 1$ ).

Beweis in zwei Schritten:

1. Fourierreihe konvergiert gleichmäßig
2. Für festes  $x \in [0, 1]$  konvergiert Fourierreihe punktweise gegen  $f$ .

**Einige Hilfsüberlegungen:**

$$\int_c^{c+1} f(x) dx \stackrel{!}{=} \int_0^1 f(x) dx$$

wo  $c \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = f(x+1)$ .

$$\int_c^1 f(x) dx + \int_1^{c+1} f(x) dx = \int_c^1 f(x) dx + \int_0^c f(y+1) dy = \int_c^1 f(x) dx + \int_0^c f(y) dy = \int_0^1 f(x) dx$$

wo  $y = x - 1$  gesetzt und die Periodizität von  $y$  verwendet wurde.

### Bessel'sche Ungleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx \quad (2.1)$$

*Beweis.* Im folgenden ist  $\bar{c}_n$  das komplex Konjugierte von  $c_n$ .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 dx \left( f - \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n e^{-2\pi i n x} \right) \left( f - \sum_{m=-N}^N c_m e^{2\pi i m x} \right) \\ &= \int_0^1 dx f(x)^2 - \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx - \sum_{m=-N}^N c_m \int_0^1 f(x) e^{+2\pi i m x} dx \\ &\quad + \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \bar{c}_n c_m \int_0^1 e^{-2\pi i (n-m)x} dx \\ &= \int_0^1 dx f(x)^2 - \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n c_n - \sum_{m=-N}^N \bar{c}_m c_m + \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \bar{c}_n c_m \delta_{nm} \quad \forall N \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &\leq \int_0^1 f(x)^2 dx \end{aligned}$$

□

### Riemann-Lebesgue Lemma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (2.2)$$

*Beweis.* Da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx < \infty$$

muss  $c_n$  Nullfolge sein!

□

### Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n b_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N |b_n|^2} \quad (2.3)$$

Nun wollen wir zeigen, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert, d. h. für alle  $\epsilon$  existiert ein  $N_0$  unabhängig von  $x \in [0, 1]$ , sodass  $\forall N', N > N_0$ , wo  $N' > N$

$$|f_N(x) - f_{N'}(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

*Beweis.* Zunächst zeigen wir

$$\begin{aligned}
|f_N(x) - f_{N'}(x)| &= \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x} - \left( \sum_{n=-N'}^{-N-1} + \sum_{n=-N}^N + \sum_{n=N+1}^{N'} \right) c_n e^{2\pi i n x} \right| \\
&= \left| \sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} c_n e^{2\pi i n x} \right| \leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} |c_n|
\end{aligned} \tag{2.4}$$

□

Da laut Voraussetzung  $f$  stetig differenzierbar ist, können wir die Fourierkoeffizienten  $d_n := \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i n x} dx$  von  $f'$  betrachten. Es gilt die Ableitungsformel

$$d_n = 2\pi i n c_n \tag{2.5}$$

*Beweis.* Partielle Integration ergibt

$$d_n = \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i n x} dx = f(x) e^{-2\pi i n x} \Big|_0^1 - (-2\pi i n) \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = 0 + 2\pi i n c_n$$

wobei der erste Term aufgrund der Periodizität verschwindet .

□

Nun setzen wir die Ableitungsformel (2.5) in (2.4) ein, wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (2.3) an und erhalten die erste Zeile der folgenden Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
|f_N(x) - f_{N'}(x)| &\leq \sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} \left| \frac{1}{2\pi n} d_n \right| \leq \sqrt{\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} \left| \frac{1}{2\pi n} \right|^2} \sqrt{\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} |d_n|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} \left| \frac{1}{2\pi n} \right|^2} \sqrt{\sum_{N+1 \leq |n| \leq N'} |d_n|^2} \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{N}} \sqrt{\int_0^1 (f'(x))^2 dx} \\
&\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{N}} \cdot \text{const} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Weiters haben wir in der zweiten Zeile die Bessel'sche Ungleichung (2.1) für  $f'(x)$  sowie die folgende Überlegung verwendet:

$$\sum_{N+1 \leq |n|} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x-1} \Big|_{N+1}^{\infty} = \frac{2}{N}$$

Wir zeigen nun, dass für festes  $x \in [0, 1]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f_N(x) - f(x)) = 0$$

**Definition.** Dirichlet-Kern

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i n x}$$

Bemerkung.

$$D_N(x) = D_N(x + 1)$$

Sei  $x \in \mathbb{Z}$ . Dann ist

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} 1 = 2N + 1$$

Sei zunächst  $x \notin \mathbb{Z}$ . Dann gilt unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} D_N(x) &= e^{-2\pi i N x} \frac{1 - e^{2\pi i (2N+1)x}}{1 - e^{2\pi i x}} = \frac{e^{2\pi i (N+1)x} - e^{-2\pi i N x}}{e^{2\pi i x} - 1} \\ &= \frac{e^{\pi i x}}{e^{\pi i x}} \cdot \frac{e^{i\pi (2N+1)x} - e^{-i\pi (2N+1)x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \frac{\sin \pi (2N + 1)x}{\sin \pi x} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis bleibt auch - bei Verwendung des Satzes von L'Hospital - für  $x \in [0, 1]$  richtig, somit gilt allgemein

$$D_N(x) = \frac{\sin \pi (2N + 1)x}{\sin \pi x} \quad \forall x \in [0, 1]$$

Weiters

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \sum_{|n| \leq N} c_n e^{2\pi i n x} = \sum_{|n| \leq N} \int_0^1 dy f(y) e^{-2\pi i n y} e^{2\pi i n x} \\ &= \int_0^1 dy f(y) D_N(x - y) = \int_{-x}^{1-x} dy' f(x + y') D_N(y') = \int_{-1/2}^{1/2} dy f(x + y) D_N(y) \end{aligned}$$

wobei  $y' = y - x$ . In der letzten Gleichung wurde die Periodizität des Integranden unter  $y' \rightarrow y' + 1$  benutzt.

$$\begin{aligned} f_N(x) - f(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} dy \{f(x + y) - f(x)\} D_N(y) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} dy \frac{f(x + y) - f(x)}{\sin \pi y} \sin \pi (2N + 1)y \end{aligned}$$

Dabei ist der erste Faktor des Integranden stetig in  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Schließlich gilt, unter Benutzung des Riemann-Lebesgue-Lemmas (2.2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f_N(x) - f(x)) = 0$$

Weitere Verallgemeinerung:

**Satz.** Sei  $f(x)$   $L$ -periodisch und stetig bis auf endlich viele Unstetigkeitsstellen, die nur Sprungstellen sein sollen. Bis auf die Sprungstellen und weitere endlich viele Knicke sei  $f$  stetig differenzierbar und es sollen überall Links- und Rechtsableitungen existieren; sei  $f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n x}$ .

Dann

1. konvergiert  $f_N(x) \rightarrow f(x)$  gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Sprungstelle enthält.

2. konvergiert  $f_N(x)$  um die Sprungstelle  $x_0$  gegen

$$\frac{1}{2} (f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$$

den Mittelwert von  $\lim_{x \searrow x_0} f(x) =: f(x_0 + 0)$  und  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) =: f(x_0 - 0)$ .

*Bemerkung.* 1. Abgesehen von Knickstellen schon bewiesen; bisheriger Beweis bleibt gültig auch für Knickstellen, da die Bessel'sche Ungleichung und das Riemann-Lebesgue-Lemma auch für diesen Fall gültig sind (ohne Beweis).

**Gibbs-Phänomen (ohne Beweis)** In der Nähe einer Sprungstelle wird  $f(x)$  von den Partialsummen  $f_N(x)$  um ca. 8,9% der Sprungweite übertroffen,  $x_{\max} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$ .

**Beispiel.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f_N(x_{\max}) - f(x_{\max}) = 0.179 \dots + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$x_{\max} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

## 2.2 Fourier-Transformation

Für eine stetige und stetig differenzierbare,  $L$ -periodische Funktion  $f(x)$  gilt ( bzgl. gleichmäßiger Konvergenz)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-L/2}^{L/2} f(y) \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}y} dy \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) e^{-i\frac{2\pi n}{L}y} dy \right) e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

Intuitiv: wenn  $L \rightarrow \infty$

$$k \approx \frac{2\pi n}{L}$$

$$dk \approx \frac{2\pi}{L}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dk$$

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx}$$

In welchem Sinn gilt nun die Näherung und für welche  $f(x)$  existiert  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ ? Diese Fragen wollen wir hier nicht in voller Allgemeinheit studieren, sondern beschränken uns auf einen wichtigen Spezialfall:

**Definition.** Sei  $S$  die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass  $f$  und alle ihre Ableitungen schneller als jede Potenz bei  $|x| \rightarrow \infty$  gegen Null geht; das bedeutet mathematisch

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < \infty \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

oder: es existiert ein  $x_0 > 0$ , sodass für  $|x| > x_0$

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \text{const} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

oder

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p f^{(q)}(x)| = 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &\in S \\ \frac{1}{1+x^2} &\notin S \\ e^{-x} &\notin S \\ e^{-|x|} &\notin S \end{aligned}$$

*Bemerkung.*

$$\begin{aligned} f \in S &\Rightarrow f^{(n)} \in S \\ f \in S &\Rightarrow p(x)f(x) \in S \end{aligned}$$

wo  $p(x)$  Polynom.

**Definition** (Fouriertransformation). Fouriertransformation  $\mathcal{F}f$  und inverse Fouriertransformation  $\mathcal{F}^{-1}f$  lauten

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad k \in \mathbb{R} \\ (\mathcal{F}^{-1}f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{ikx} dk \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Satz.** Wenn  $f \in S$ , dann existiert  $\mathcal{F}f$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}f)(k)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0 \leq |x| \leq x_0} |f(x)| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > x_0} |f(x)| dx < \infty \end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, dass der vorletzte Term wegen der Stetigkeit von  $f$  endlich ist. Da  $f \in S$  kann

man  $x_0$  so wählen, dass  $|f(x)| \leq \frac{c}{x^2}$  für  $|x| > x_0$  ist; somit

$$\int_{|x|>x_0} |f(x)| dx < \int_{|x|>x_0} \frac{c}{x^2} dx = \frac{2c}{x_0} < \infty$$

□

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2/2} \\ \Rightarrow (\mathcal{F}f)(k) &= e^{-k^2/2} \end{aligned}$$

Siehe dazu auch die Übungen!

*Bemerkung.*  $(\mathcal{F}f)(k)$  konvergiert für  $f \in S$  absolut, ist dabei  $k$ -unabhängig und somit gleichmäßig konvergent in  $k$ .

**Definition** (Gleichmäßige Konvergenz).

$$\int_a^\infty f(x, y) dx$$

konvergiert gleichmäßig in  $y \in [y_0, y_1]$  falls es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N$  gibt, sodass für alle  $N_1, N_2 > N$ ,  $y \in [y_0, y_1]$  gilt

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon$$

Weiters kann aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  die Stetigkeit von

$$g(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

gefolgt werden und es gilt die Ableitungsformel

$$g'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

### 2.2.1 Ableitungsformeln bei Fouriertransformation

Sei  $f \in S$ , dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f')(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right] \\ &= ik(\mathcal{F}f)(k) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei wurde partiell integriert (das ist erlaubt, da  $(\mathcal{F}f')(k)$  gleichmäßig konvergent in  $k$  ist). Der erste Term fällt dann weg, da  $f(x) \in S$ .

Iteration führt zu höheren Ableitungen:

$$\left( \mathcal{F}f^{(p)} \right) (k) = (ik)^p (\mathcal{F}f)(k)$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f)'(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \frac{d}{dk} e^{-ikx} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix) e^{-ikx} dx \\
&= (\mathcal{F}(-ixf))(k)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Hier ist mit  $f(x) \in S$  auch  $ixf(x) \in S$ . Da  $(\mathcal{F}(-ixf))(k)$  gleichmäßig konvergent in  $k$ , durfte unter dem Integralzeichen differenziert werden.

Iteration:

$$(\mathcal{F}f)^{(q)}(k) = (\mathcal{F}((-ix)^q f))(k)$$

Insgesamt

$$(-ik)^p (\mathcal{F}f)^{(q)}(k) = (ik)^p (\mathcal{F}((-ix)^q f))(k) = \mathcal{F}\left(\left((-ix)^q f\right)^{(p)}\right)(k) \quad p, q \in \mathbb{N}$$

**Satz.** *Fouriertransformation bildet  $S$  auf sich selbst ab, d. h. wenn  $f \in S$ , dann auch  $\mathcal{F}f \in S$ . (siehe Übungen)*

**Satz.** *(ohne Beweis) Wenn  $f \in S$ , dann gilt  $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f$ .*

**Satz** (Plancherel-Gleichung). *(ohne Beweis.) Für  $f \in S$  gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(k)|^2 dk$$

## 2.2.2 Faltungsformeln

**Satz** (Faltungstheorem). *Für  $f, g \in S$  gilt*

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g \tag{2.8}$$

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \tag{2.9}$$

wo die Faltung zweier Funktionen gegeben ist durch

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x')dx' = (g \circ f)(x) \tag{2.10}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} f(x') dx' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky'} g(y') dy' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x'+y')} f(x')g(y') dx' dy' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} (g \circ f)(x) = \mathcal{F}((g \circ f))(k) \\
&= \mathcal{F}((f \circ g))(k)
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir  $x = x' + y'$ ,  $y = y'$  und  $dx'dy' = dx dy$  verwendet. □

### 2.2.3 Anwendungsbeispiel der Fouriertransformation

Auffinden spezieller Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, z. B.

$$y'' - y = f$$

bei vorgegebenem  $f \in S$ .

Fouriertransformation der Gleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{F}y'' - \mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\ -k^2\mathcal{F}y - \mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\ -(1+k^2)\mathcal{F}y &= \mathcal{F}f \\ \mathcal{F}y &= -\frac{1}{1+k^2}\mathcal{F}f\end{aligned}$$

Rücktransformation und Anwendung des Faltungstheorems 2.9 ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}y = y &= -\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) \circ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f \\ y(x) &= -\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) \circ f\right)(x) \\ y(x) &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x'|}f(x')dx'\end{aligned}$$

da  $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+k^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$  (siehe Übungen).

*Bemerkung.* Vgl. frühere Formel für spezielle Lösungen:

Homogene Lösung  $y'' - y = 0$

$$\begin{aligned}y_1 &= e^x \\ y_2 &= e^{-x} \\ W &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \\ y_{\text{spez}}(x) &= -e^x \int_{c_2}^x \frac{e^{-x'}f(x')}{-2} dx + e^{-x} \int_{c_1}^x \frac{e^{x'}f(x')}{-2} dx\end{aligned}$$

$y_{\text{spez}}(x)$  hängt mit obiger, durch Fouriertransformation gefundener, Lösung zusammen:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x'|}f(x')dx' &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^{-x+x'}f(x')dx' + \frac{1}{2}\int_x^{\infty} e^{x-x'}f(x')dx' \\ &= -\frac{1}{2}\int_{c_1}^x e^{-x+x'}f(x')dx' + \frac{1}{2}\int_{c_2}^x e^{x-x'}f(x')dx' + K_1e^{-x} + K_2e^x\end{aligned}$$

Dabei sind  $K_1$  und  $K_2$  endlich, da  $f(x) \in S$ .

## 2.2.4 Mehrdimensionale Fouriertransformation

**Definition.** Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist  $f(\mathbf{x}) \in S$ , wenn  $f$  beliebig hohe partielle Ableitungen besitzt und für  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  sowie für alle  $k \in \mathbb{N}$  und für alle  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ ,  $p_i \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| r^k \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \right| = 0$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} e^{-r^2} &\in S \\ x_1^2 e^{-r^2} &\in S \end{aligned}$$

Dagegen  $e^{-x_1^2} \notin S$ , da es mit  $x_1 = 0$  bei  $r \rightarrow \infty$  nicht abfällt.

**Definition** (Mehrdimensionale Fouriertransformation). Sei  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n x \\ (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n k \end{aligned}$$

**Beispiel.**  $n = 3$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= e^{-\mathbf{x}^2/2} = \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2/2} \\ (\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) &= \prod_{i=1}^3 e^{-k_i^2/2} = e^{-\mathbf{k}^2/2} \end{aligned}$$

Bei allgemeinen  $f(\mathbf{x})$  faktorisiert  $(\mathcal{F}f)(\mathbf{k})$  nicht!

### 2.2.4.1 Fouriertransformation einer radialsymmetrischen Funktion

Sei  $n = 3$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  und  $f(\mathbf{x}) = f(r)$ . Denken wir uns  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  fest,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\mathbf{x} &= kr \cos \theta \\ d^3 x &= r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = r^2 dr d \cos \theta d\phi \end{aligned}$$

wo  $k = |\mathbf{k}|$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) &\stackrel{!}{=} (\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d \cos \theta e^{-ikr \cos \theta} r^2 f(r) \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty dr \left[ \frac{1}{ikr} e^{-ikr \cos \theta} \right]_{\cos \theta=-1}^{\cos \theta=1} r^2 f(r) \\
 (\mathcal{F}f)(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty dr f(r) r \sin kr
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Analog die Rücktransformation

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^\infty dk f(k) k \sin kr \tag{2.12}$$

Wählen Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \sin \theta \cos \phi \\
 x_2 &= r \sin \theta \sin \phi \\
 x_3 &= r \cos \theta
 \end{aligned}$$

mit  $0 \leq \theta \leq \pi$  und  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ; weiters

$$d^3x = dx_1 dx_2 dx_3 r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

Wählen  $x_1, x_2, x_3$ -Achsen so, dass  $\mathbf{k} \parallel x_3$ -Achse

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 0 \\
 k_2 &= 0 \\
 k_3 &= k
 \end{aligned}$$

Außerdem  $k = |\mathbf{k}|$ .

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
 f(r) &= e^{-ar} \quad a > 0 \\
 \sqrt{\frac{\pi}{2}} |\mathbf{k}| (\mathcal{F}f)(|\mathbf{k}|) &= \int_0^\infty dr \sin(|\mathbf{k}|r) e^{-ar} r = \text{Im} \int_0^\infty dr e^{-(a-i|\mathbf{k}|)r} r \\
 &= \text{Im} \frac{1}{a-i|\mathbf{k}|} \int_0^\infty dr e^{-(a-i|\mathbf{k}|)r} = \text{Im} \frac{1}{(a-i|\mathbf{k}|)^2} \cdot \frac{(a+i|\mathbf{k}|)^2}{(a+i|\mathbf{k}|)^2} \\
 &= \frac{2a|\mathbf{k}|}{(a^2+k^2)^2} \\
 (\mathcal{F}f)(|\mathbf{k}|) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2a}{(a^2+k^2)^2}
 \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde dabei partiell integriert.

## 2.3 Laplacetransformation

**Definition** (Laplace-Transformation).

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx, \quad s \in \mathbb{C}$$

**Satz.** Wenn  $f$  stetig und  $|f(x)| \leq \text{const} \cdot e^{\sigma_0 x}$  für  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  und  $x \geq 0$ , so existiert  $(\mathcal{L}f)(s)$  für alle solche  $s \in \mathbb{C}$ , wo  $\text{Re } s > \sigma_0$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \right| &\leq \int_0^{\infty} |f(x)| e^{-(\text{Re } s)x} dx \\ &\leq \text{const} \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\text{Re } s - \sigma_0)x} dx \\ &= -\text{const} \cdot \frac{1}{\text{Re } s - \sigma_0} e^{-(\text{Re } s - \sigma_0)x} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{\text{const}}{\text{Re } s - \sigma_0} < \infty \end{aligned}$$

□

### 2.3.1 Beispiele zur Laplace-Transformation

**Beispiel.**

$$f(x) = 1$$

$$f(x) = 1 = e^{0 \cdot x} \Rightarrow \sigma_0 = 0$$

Also existiert  $(\mathcal{L}(1))(s)$ , wenn  $\text{Re } s > 0$

$$(\mathcal{L}(1))(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Damit also

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

**Beispiel.**

$$f(x) = x$$

$$x \leq \text{const} \cdot e^{\sigma_0 x} \quad \forall \sigma_0 > 0$$

Also existiert  $\mathcal{L}(x)$ , wenn  $\text{Re } s > 0$

$$(\mathcal{L}(x))(s) = \int_0^{\infty} x e^{-sx} dx = -\frac{x e^{-sx}}{s} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx}}{s} dx = \frac{1}{s^2}$$

Im ersten Schritt haben wir partiell integriert, im zweiten fällt  $\frac{x e^{-sx}}{s} \Big|_0^{\infty} = 0$  weg. Insgesamt erhalten wir also

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2}$$

**Beispiel.**

$$f(x) = e^{ax}, \quad a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sigma_0 = a$$

$\mathcal{L}(e^{ax})$  existiert, wenn  $\operatorname{Re} s > a$ .

$$\mathcal{L}(e^{ax}) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx = \frac{1}{s-a}$$

**Beispiel.**

$$f(x) = \cos \omega x, \quad \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \sigma_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} s > 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos \omega x) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( e^{-(s-i\omega)x} + e^{-(s+i\omega)x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \tag{2.13}$$

### 2.3.2 Ableitungsformeln

$$\mathcal{L}(f') = -f(0) + s \cdot \mathcal{L}(f) \tag{2.14}$$

Man beachte besonders den ersten Term. Vergleiche außerdem Formel 2.14 mit der Ableitungsformel für die Fouriertransformation  $\mathcal{F}(f') = ik\mathcal{F}f$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(x) e^{-sx} dx &= f(x) \cdot e^{-sx} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-sx} dx \\ &= -f(0) + s \cdot \mathcal{L}(f) \end{aligned}$$

Dabei haben wir zunächst partiell integriert. Im zweiten Schritt haben wir benutzt, dass  $f(x) \cdot e^{-sx} \Big|_0^{\infty} = -f(0)$  für  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ .

□

Aus 2.14 folgt weiters

$$\mathcal{L}(f'') = -f'(0) + s\mathcal{L}(f') = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}(f)$$

oder umgeordnet

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - f'(0) - sf(0) \tag{2.15}$$

### 2.3.3 Zusammenhang mit der Fourier-Transformation

Sei  $s = \sigma + ik$ , wobei  $\sigma, k \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(\mathcal{L}f)(\sigma + ik) = \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}(f(x)e^{-\sigma x}\Theta(x)))(k) \tag{2.16}$$

*Beweis.* Wir schreiben zunächst die rechte Seite explizit an:

$$\sqrt{2\pi} (\mathcal{F}(f(x) \cdot e^{-\sigma x} \cdot \Theta(x))) (k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx - \sigma x} \Theta(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx - \sigma x} dx = (\mathcal{L}f)(\sigma + ik) = (\mathcal{L}f)(s)$$

Im zweiten Schritt haben wir die *Heaviside-Funktion*  $\Theta(x)$  eingesetzt,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Diese verhindert Beiträge von negativen  $x$ .

□

### 2.3.4 Umkehrtransformation der Laplace-Transformation

Zunächst folgt für  $\sigma > \sigma_0$  und stetiges und stückweise differenzierbares  $f$  aus 2.16 mittels Fourier-Rücktransformation (für  $x > 0$ ), dass

$$f(x)e^{-\sigma x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{L}f)(\sigma + ik) dk$$

bzw.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{L}f)(\sigma + ik) e^{(\sigma + ik)x} dk$$

Dies ist die Parameterdarstellung eines komplexen Integrals mit Weg  $\gamma$  (vgl. Abb. 2.2 links):

$$s(k) = \sigma + ik, \quad k \in (-\infty, \infty)$$

$$\dot{s} = i$$

und damit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mathcal{L}f)(s) e^{sx} ds, \quad x > 0$$

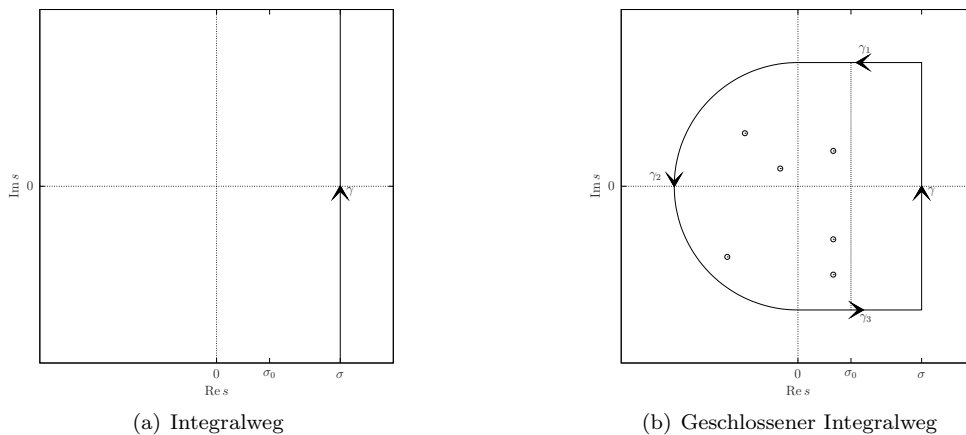


Abbildung 2.2: Illustrationen zum Integrationsweg

Allgemein gilt der folgende

**Satz.**  $(\mathcal{L}f)(s)$  ist analytisch für  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ .

(ohne Beweis) sowie der

**Satz.** Ist  $(\mathcal{L}f)(s)$  analytisch bis auf endlich viele isolierte Singularitäten  $s_1, \dots, s_m$  mit  $\operatorname{Re} s_k \leq \sigma_0$  und gilt  $(\mathcal{L}f)(s) \rightarrow 0$  für  $|s| \rightarrow \infty$ , so kann man den Integrationsweg  $\gamma$  durch einen unendlich großen linken Halbkreis  $\gamma_2$  sowie Strecken  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  schließen (vgl. Abb. 2.2 rechts) und den Residuensatz anwenden, sodass für  $x > 0$

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}((\mathcal{L}f)(s)e^{sx}, s = s_k)$$

(ohne Beweis)

**Beispiel.**

$$f(x) = 1, \quad \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{s}e^{sx}, s = 0\right) = 1$$

**Beispiel.**

$$f(x) = e^{ax}, \quad \mathcal{L}(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{sx}}{s-a}, s = a\right) = e^{ax}$$

### 2.3.5 Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung gewöhnlicher DGL mit konstanten Koeffizienten

1. DGL Laplace-transformieren
2. Ableitungsformel
3. Lösen der transformierten Gleichung (rein algebraisch)
4. Rücktransformation

**Beispiel.**

$$y'' + \omega_0^2 y = \cos \omega x$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'') + \omega_0^2 \mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(\cos \omega x) \\
s^2 \mathcal{L}(y) - y'(0) - s \cdot y(0) + \omega_0^2 \mathcal{L}(y) &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\
\mathcal{L}(y) \cdot (s^2 + \omega_0^2) &= s + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\
\mathcal{L}(y) &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt auf die linke Seite die Ableitungsformel 2.15 und auf die rechte Seite Gl. 2.13 angewendet. Im zweiten Schritt haben wir die Anfangsbedingungen eingesetzt und  $s$  addiert. Nun wenden wir auf den zweiten Term rechts eine Partialbruchzerlegung an und transformieren schließlich den ganzen Ausdruck zurück:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y) &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right) \\
y &= \cos \omega_0 x + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega x - \cos \omega_0 x)
\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Die Anfangsbedingung ist hier automatisch inkludiert!

# Kapitel 3

## Spezielle Funktionen

Funktionen wie die *Legendre-Polynome* (3.1), die *Besselfunktionen* (3.2), die *Hermite-Polynome* (3.3) oder die *Laguerre-Polynome* (3.4) können mittels erzeugender Funktionen definiert werden. Wir studieren zunächst Eigenschaften dieser Polynome und beweisen abschließend, dass diese Polynome mit den Lösungen diverser Randwertprobleme zusammen hängen.

### 3.1 Legendre-Polynome

**Definition.** Erzeugende Funktion der Legendre-Polynome ist<sup>1</sup>:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

Wenn  $|-2xt+t^2| < 1$ , ergibt sich nach Taylor-Entwicklung und unter Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$\begin{aligned}(1-2xt+t^2)^{-1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{l} (-2xt+t^2)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} t^{2k} (-2xt)^{l-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} \binom{l}{k} t^{l+k} (-2x)^{l-k}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Wir fordern, dass Doppelsumme absolut konvergent ist, also dass  $|t^2| < 1$ ,  $|2x| < 1$ , und können umordnen

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$$

**Beispiel.** Näherungsweise Berechnung

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \dots$$

---

<sup>1</sup>Tipp:  $x$  ist immer das, woraus die Polynome werden

wo  $\varepsilon = -2xt + t^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = 1 + xt + \frac{1}{2}(3x^2 - 1)t^2 + \dots$$

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$\vdots$

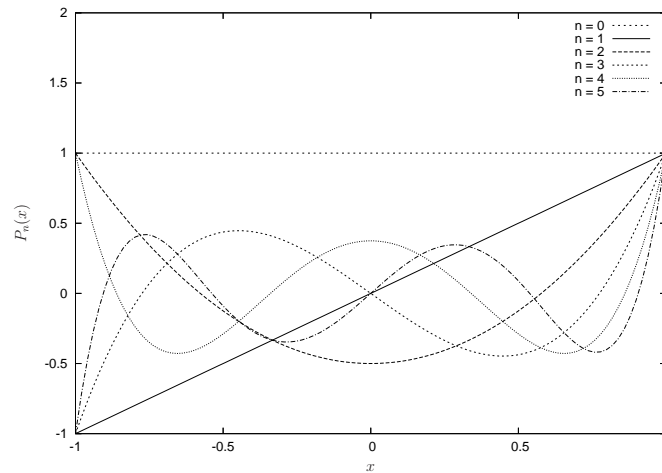


Abbildung 3.1: Die ersten sechs Legendre-Polynome  $P_n$

**Beispiel.** Seien  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$ ,  $R = |\mathbf{x}'|$ ,  $r = |\mathbf{x}|$  und sei  $R > r$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha}} \\ &= \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right) \cos \alpha + \left(\frac{r}{R}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \left(\frac{r}{R}\right)^l \end{aligned} \tag{3.2}$$

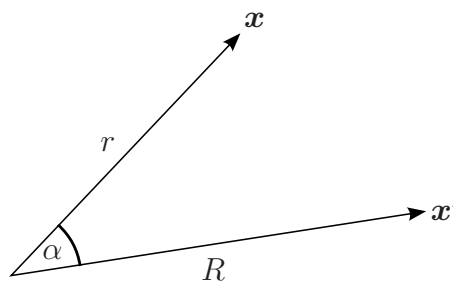


Abbildung 3.2: Definition von  $R$ ,  $r$ ,  $\cos \alpha$

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall und führen den neuen Summationsindex  $n = l + k$  in 3.1 ein:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_{\max}}$$

Da  $k \leq l = n - k$ , gilt

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} \binom{l}{k} t^{l+k} (-2x)^{l-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_{\max}} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} \binom{n-k}{k} (-2)^{n-2k} x^{n-2k} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \end{aligned}$$

Hier ist

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} \binom{n-k}{k} (-2)^{n-2k} x^{n-2k}$$

Wir betrachten die einzelnen Faktoren:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \underbrace{\left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( -\frac{1}{2} - n + k + 1 \right)}_{(n-k) \text{ Faktoren}} / (n-k)!$$

$$\binom{n-k}{k} = \frac{(n-k)!}{(n-2k)! k!}$$

$$(-2)^{n-2k} = \frac{(-2)^{n-k} 2^{n-k} (-1)^k}{2^n}$$

und erhalten damit

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} \binom{n-k}{k} (-2)^{n-2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2k-1) \cdot (2n-2k) \cdot (2n-2k-2) \cdot \dots \cdot 2}{(n-k)! (n-2k)! k! 2^n} (-1)^k$$

und daraus schließlich die

### 3.1.1 Explizite Formel für die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} (-1)^k \frac{(2n-2k)! x^{n-2k}}{(n-k)! (n-2k)! k! 2^n}$$

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

### 3.1.2 Formel von Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.3)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n &= \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{k_{\max}} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{n!}{(n-k)! k!} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \end{aligned}$$

mit

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

□

### 3.1.3 Integraldarstellung der $P_n$

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{2^n (z - x)^{n+1}} dz$$

$C$  ... geschlossener Weg um  $x$

Beweis mittels Cauchy'scher Formel für Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - x)^{n+1}}$$

wo  $f(z) = \frac{1}{2^n n!} (z^2 - 1)^n$  gesetzt wird.

### 3.1.4 Legendre Polynome $P_n$ und DGL

Es gilt

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \quad (3.4)$$

*Beweis.* Sei  $\gamma$  ein geschlossener Weg um  $x$ : Aus Integraldarstellung folgt

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n (n+1)}{2^n (z - x)^{n+2}} dz \\ P_n''(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n (n+1)(n+2)}{2^n (z - x)^{n+3}} dz \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n &= \frac{n+1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2-1)^n dz}{2^n(z-x)^{n+3}} [(1-x^2)(n+2) - 2x(z-x) + n(z-x)^2] \\
&= \frac{n+1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2-1)^n dz}{2^n(z-x)^{n+3}} [2(n+1)z(z-x) - (n+2)(z^2-1)] \\
&= \frac{n+1}{2\pi i 2^n} \int_{\gamma} dz \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-x)^{n+2}} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

### 3.1.5 Normierung, Orthogonalität

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \quad (3.5)$$

*Beweis.* Wir multiplizieren die DGL für die Legendre-Polynome (3.4)  $P_n$  mit  $P_m$  und jene für  $P_m$  mit  $P_n$ ; dann bilden wir die Differenz der so erhaltenen Produkte:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right\} \right] P_m - \left[ \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right\} \right] P_n + [n(n+1) - m(m+1)]P_nP_m &= 0 \\
\left[ \frac{d}{dx} (1-x^2) \left( P_m \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dP_m}{dx} \right) \right] + [n(n+1) - m(m+1)]P_nP_m &= 0 \\
\left[ (1-x^2) \left( P_m \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dP_m}{dx} \right) \right]_{-1}^1 + [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx &= 0
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde zwischen  $-1$  und  $1$  integriert; der linke Term verschwindet dadurch offensichtlich.

Damit nun

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

muss gelten, falls  $m \neq n$ , dass

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

Für  $m = n$  gilt unter Verwendung der Formel von Rodrigues (3.3) und weiters durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \left( \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \right) \left( \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \right) dx \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2-1)^n dx \\
&= \dots = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n dx \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass

$$\begin{aligned}
(x^2-1)^n &= x^{2n} - x^{2(n-1)} + \dots + (-1)^n \\
\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n &= (2n)!
\end{aligned}$$

Weiters gilt, wieder unter Verwendung partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-1} (x+1)^{n+1} dx = \dots \\ &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} dx \\ &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung 3.6 ein, so ergibt sich schließlich

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

Damit stellen die Legendre-Polynome  $P_n(x)$  ein *orthogonales, normiertes Funktionensystem* dar. □

*Bemerkung* (Entwicklung von Polynomen nach Legendre-Polynomen). Sei  $p_n(x)$  ein Polynom  $n$ -ter Ordnung in  $x$ . Dann lässt sich  $p_n(x)$  durch die Legendre-Polynome  $P_0(x), \dots, P_n(x)$  ausdrücken:

$$p_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) \quad (3.7)$$

Für die Koeffizienten  $a_m$  folgt durch Integration von Gleichung 3.7 und Anwendung von Gleichung 3.5

$$\int_{-1}^1 p_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2m+1} a_m$$

*Bemerkung* (Entwicklung von Funktionen nach Legendre-Polynomen). Sei  $f(x)$  eine Funktion in  $x$ . Sätze über Konvergenz (ohne Beweis) ähnlich wie bei Fourierreihenentwicklung.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \\ a_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \end{aligned}$$

Es gilt z. B. gleichmäßige Konvergenz für eine auf  $[-1, 1]$  stetige, stetig differenzierbare Funktion.

**Definition** (Assoziierte Legendre-Polynome).

$$P_n^m(x) := (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

**Beispiel.**

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}$$

**Beispiel.** Die assoziierten Legendre-Polynome  $P_n^m$  bilden eine Orthonormalbasis (ohne Beweis). Es gilt z. B.

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_l^m(x) dx = \delta_{nl} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Bemerkung.  $P_n^m(x) = 0$  wenn  $m > n$

Differentialgleichung Assoziierte Legendre-Funktionen  $P_l^m$

$$((1-x^2)P_l^m)' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_l^m = 0 \quad (3.8)$$

(Beweis mittels Integraldarstellung)

### 3.2 Besselfunktion $J_n(x)$

Erzeugende Funktion:

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Entwicklung in Laurentreihe:

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$

zur Erinnerung:  $f(z)$  singulär bei  $z = 0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

$\gamma$  ... geschlossener Weg um 0

daraus folgt:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{x}{2}(w-\frac{1}{w})}}{w^{n+1}} dw$$

substituieren  $w = \frac{2z}{x}$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{\gamma} e^{z-\frac{x^2}{4z}} z^{-n-1} dz$$

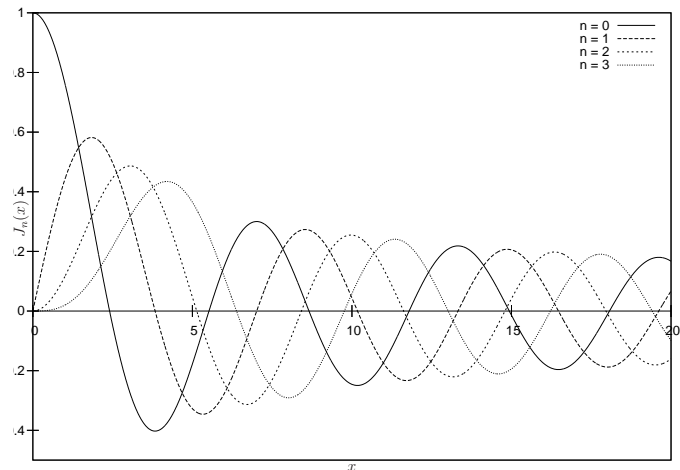


Abbildung 3.3: Die ersten drei Bessel-Funktionen  $J_n$

Entwickeln und einsetzen (es heben sich alle Potenzen weg, außer jene, wo  $\frac{1}{z}$  stehen bleibt):

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$e^{-\frac{x^2}{4z}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{x^{2r}}{(4z)^r}$$

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_{\gamma} dz z^{-n-r+k-1}}_{\text{wenn } n \geq 0: \delta_{k, n+r}}$$

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! (n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad \text{konvergiert } \forall x$$

(siehe dazu auch Übungsbeispiele für  $n < 0$ :  $J_n(x) = (-1)^n J_{|n|}(x)$ )

**Behauptung.**  $J_n$  erfüllen die Bessel'sche DGL

$$J_n'' + \frac{1}{x} J_n' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0$$

Beweis: analog zu Legendre-Polynomen mittels Integralformel für  $J_n(x)$  (siehe auch hier Übungen; man verwendet  $\int_{\gamma} dz \frac{d}{dz} \left(e^{z - \frac{x^2}{4z}} z^{-n-1}\right) = 0$ ).

Auch die Besselfunktionen bilden eine Orthonormalbasis.

### 3.3 Hermite-Polynome

**Definition.**

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} e^{-t^2+2tx} &= 1 - t^2 + 2tx + \frac{1}{2}4t^2x^2 + \dots \\ &= 1 + 2xt + \frac{1}{2}(4x^2 - 2)t^2 + \dots \end{aligned}$$

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2x$$

$$H_2 = 4x^2 - 2$$

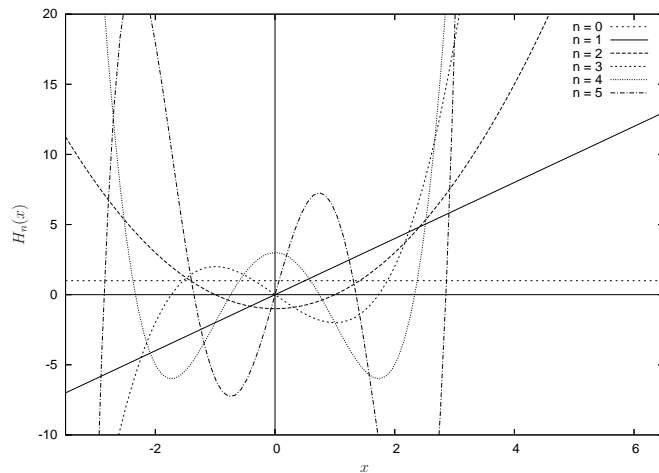


Abbildung 3.4: Die ersten sechs Hermite-Polynome  $H_n$

Behauptung.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-(x-t)^2} \Big|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2} \Big|_{t=0} (-1)^n \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left( e^{x^2 - (x-t)^2} \right) \Big|_{t=0} = \frac{d^n}{dt^n} \left( e^{-t^2 + 2tx} \right) \Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{k!} \frac{d^n}{dt^n} t^k \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{k!} \delta_{nk} k! = H_n(x) \end{aligned}$$

□

### 3.3.1 Integraldarstellung

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz$$

$\gamma$  ... geschlossener Weg um  $x$

### 3.3.2 Differentialgleichung

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

(ohne Beweis; analog zu Legendre-Polynome, Besselfunktionen)

## 3.4 Laguerre-Polynome $L_n(x)$

### 3.4.1 Erzeugende Funktion

$$\frac{e^{-x} \frac{1}{1-t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \quad |t| < 1$$

Die  $L_n(x)$  sind die Koeffizienten der Taylor-Reihe.

### 3.4.2 Integraldarstellung

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-x} \frac{z}{1-z}}{(1-z)z^{n+1}} dz$$

$C$  ... geschlossener Weg um 0 ohne 1 zu umschließen

**Behauptung.**

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

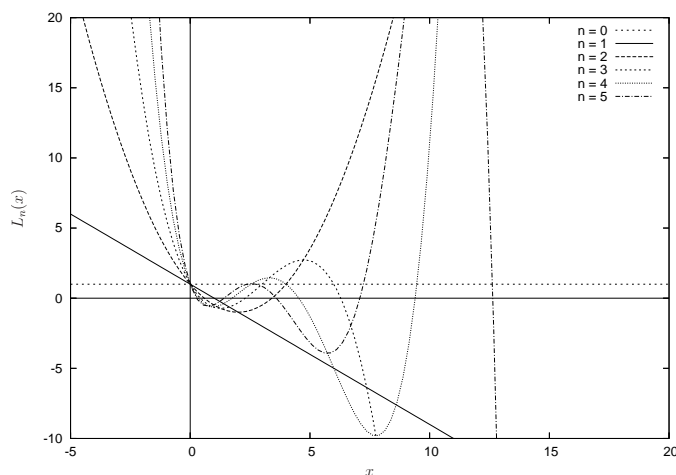


Abbildung 3.5: Die ersten sechs Laguerre-Polynome  $L_n$

*Beweis.* Einsetzen in Integralformel

$$z = \frac{w-x}{w} \quad \text{bzw.} \quad w = \frac{x}{1-z}$$

$$dz = \frac{dw w - (w-x)dw}{w^2} = \frac{x}{w^2} dw$$

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-x \frac{w-x}{w}} \frac{1}{1 - \frac{w-x}{w}}}{(1 - \frac{w-x}{w})^{n+1}} \frac{x \, dw}{w^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i} e^x \int_{\gamma} e^{-w+x} w^{1-2+n+1} \frac{1}{(w-x)^{n+1}} dw \\
&= e^x \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} w^n e^{-w} \frac{1}{(w-x)^{n+1}} dw \\
&= \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})
\end{aligned}$$

□

### 3.4.3 Assoziierte Laguerre-Polynome

$$L_n^m(x) := (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x)$$

### 3.4.4 Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n &= 0 \\
xL_n^{m''} + (1+m-x)L_n^{m'} + nL_n^m &= 0
\end{aligned}$$

(Beweis mittels Integraldarstellung)

## 3.5 Kugelfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$

**Definition.**

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} & m \geq 0 \\ (-1)^m (Y_l^{-m}(\vartheta, \varphi))^* & m < 0 \end{cases}$$

wo

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

$$\vartheta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \underbrace{P_0^0(\cos \vartheta)}_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \\
Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}
\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Die Kugelfunktionen sind bezüglich des vollständigen Orthonormalsystems der (assozierten) Legendrepolynome definiert.

Sie bilden daher selbst ein vollständiges ONS für Funktionen, die auf der Einheitskugel definiert sind (d.h. von  $(\vartheta, \varphi)$  abhängen).

Insbesondere kann man zeigen, dass:

$$\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_n^{*m}(\vartheta, \varphi) Y_{n'}^{m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (3.9)$$

**Es gilt das wichtige Additionstheorem:**

$$P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\vartheta, \varphi) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.10)$$

wo  $\alpha$  der Winkel zwischen  $(r, \vartheta, \varphi)$  und  $(R, \theta, \phi)$  ist

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \sin \vartheta \sin \theta (\cos \varphi \cos \phi + \sin \varphi \sin \phi) + \cos \vartheta \cos \theta \\ &= \sin \vartheta \sin \theta \cos(\varphi - \phi) + \cos \vartheta \cos \theta \end{aligned}$$

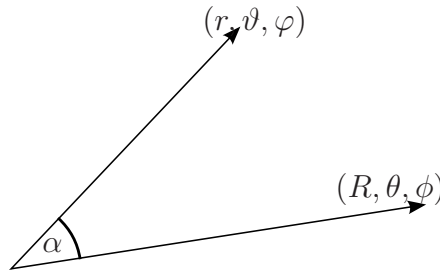


Abbildung 3.6: Additionstheorem der Kugelfunktionen

*Beweis.* 1.  $\sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\vartheta, \varphi) Y_l^m(\theta, \phi)$   
ist unter Drehungen des Koordinatensystems invariant (Darstellungstheoreme, Drehgruppe)

2. wählen  $\vartheta = 0$ , also  $\cos \alpha = \cos \theta$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(0, \varphi) Y_l^m(\alpha, \phi) &= \sum_{m=-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(1) e^{-im\varphi} P_l^m(\cos \alpha) e^{im\phi} \\ &= \sum_{m=-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \delta_{m0} P_l^m(\cos \alpha) e^{im(\phi-\varphi)} \\ &= \frac{2l+1}{4\pi} P_l^0(\cos \alpha) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \alpha) \end{aligned}$$

□

### 3.6 Gammafunktion $\Gamma(x)$

Wir betrachten zunächst für  $\alpha > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

differenzieren  $n$ -mal nach  $\alpha$

$$\int_0^{\infty} (-t)^n e^{-\alpha t} dt = (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 1}{\alpha^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

multiplizieren mit  $(-1)^n$  und setzen

$$\alpha = 1: \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n! \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Definition.**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad x \in \mathbb{R}^+$$

**Beispiel.**

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2/2} d\tau \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

mit  $t = \frac{\tau^2}{2}$ ,  $dt = \tau d\tau = \sqrt{2}t^{1/2}d\tau$ .

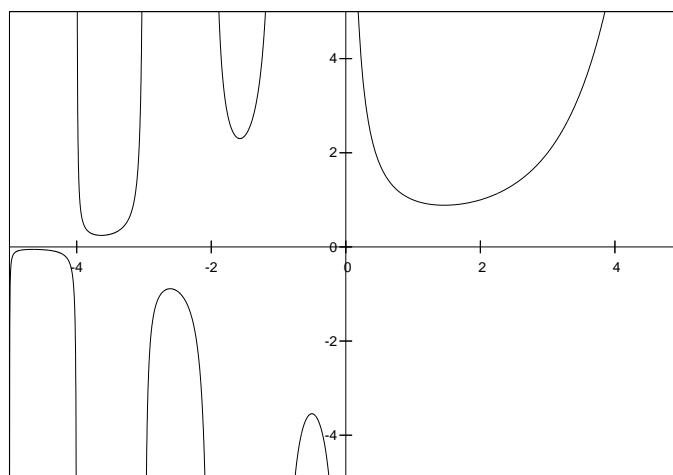


Abbildung 3.7: Die Gammafunktion  $\Gamma(x)$

Es gilt:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \underbrace{t^x}_u \underbrace{e^{-t}}_{v'} dt &= \underbrace{t^x(-e^{-t})|_0^\infty}_0 - \int_0^\infty dt \, x t^{x-1}(-e^{-t}) \\ &= x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

**Beispiel.** Später werden wir der Differentialgleichung der *sphärischen* Besselfunktion  $J_{l+\frac{1}{2}}(x)$  begegnen. Diese ist mittels der  $\Gamma$ -Funktion definiert

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(l+\frac{1}{2}+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2r}$$

wo

$$\left(l + \frac{1}{2} + r\right)! = \Gamma\left(l + \frac{1}{2} + r + 1\right)$$

Wir bezeichnen  $J_{l+\frac{1}{2}}(x) := j_l(x)$  als *sphärische Besselfunktion*.

**Definition.** Wenn  $x \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$  können wir  $\Gamma(x) := \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$  definieren.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Für  $x \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$  ist  $\Gamma(x)$  singulär!

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(\epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(1 + \epsilon)}_1 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

# Kapitel 4

## Theorie der Distributionen

MOTIVATION: Wir wollen anstelle von unpräzisen Definitionen und Manipulationen von verallgemeinerten „Funktionen“ im Gegensatz zu gängigen Formelsammlungen und Handbüchern für PhysikerInnen (wo zum Beispiel mit der Dirac'sche Delta„funktion“  $\delta$  unverzeihlich salopp verfahren wird) einen mathematisch rigorosen Formalismus verwenden. Dieser umfasst die große Klasse der *temperierten Distributionen* und gestattet allgemeine Rechenregeln ABZULEITEN.

WESENTLICHE IDEE: Verallgemeinerte „Funktionen“ werden nicht punktweise definiert, sondern *indirekt* durch ihre Wirkung auf „genügend brave“ Funktionen, die sogenannten Testfunktionen.

Als wichtige Anwendung der Theorie der Distributionen werden wir die Greensfunktionsmethode zum Lösen von inhomogenen DGL besprechen.

### 4.1 Grundlegende Definitionen

Wir wiederholen zunächst die Definition von Funktionen der *Schwarz'schen* Klasse  $S$ , die schon in Abschnitt 2.2 eingeführt wurden und die - bei gleicher Bedeutung - in diesem Abschnitt auch den Namen Raum der Testfunktionen erhalten.

**Raum der Testfunktionen  $S$  (Schwarz'sche Klasse)** Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass  $f$  und alle ihre Ableitungen schneller als jede Potenz von  $x$  bei  $|x| \rightarrow \infty$  gegen Null geht.

**Beispiel.**  $e^{-x^2} \in S$ ,  $x^5 e^{-x^2} \in S$ ,  $e^{-x} \notin S$

Abbildungen von reellen Zahlen in komplexe Zahlen heißen Funktionen, Abbildungen von Funktionen in die komplexen Zahlen heißen Funktionale (z. B. das bestimmte Integral über die Funktion). Wir formalisieren:

**Definition.** Eine Abbildung  $g : S \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma \in S \mapsto g(\gamma) \in \mathbb{C}$  heißt *Funktional* über  $S$

**Definition.**  $g$  heißt *lineares Funktional* über  $S$ , falls  $g$  *Funktional* über  $S$  ist und

$$g(\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) = \lambda g(\gamma_1) + \mu g(\gamma_2) \quad \text{wo } \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \gamma_1, \gamma_2 \in S$$

**Definition.** Eine Folge  $\{g_n\}$  von Funktionen  $g_n \in S$  heißt *regulär*, wenn für jedes  $\gamma \in S$  ein eindeutiger Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\gamma(x) dx$  existiert.

**Definition.** Zwei reguläre Folgen  $\{g_n\}, \{h_n\}$  heißen äquivalent, wenn  $\forall \gamma \in S$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\gamma(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\gamma(x) dx$$

*Bemerkung.* Reguläre Folgen sind somit in Äquivalenzklassen einteilbar.

### Raum der temperierten Distributionen $S'$

**Definition.** Ein lineares Funktional  $g$  über  $S$  heißt temperierte Distribution, wenn es durch eine *reguläre* Folge  $g_n \in S$  auf folgende Weise definiert werden kann

$$g(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\gamma(x) dx \quad \forall \gamma \in S$$

Alle regulären Folgen aus einer Äquivalenzklasse definieren dieselbe Distribution. Man bezeichnet  $\gamma \in S$  als *Testfunktion* und nennt den Raum aller temperierten Distributionen  $S'$ .

*Bemerkung.* Anstelle der eben gegebenen Definition temperierter Distributionen mit Hilfe regulärer Folgen ist auch eine Definition temperierter Distributionen mittels *stetiger linearer Funktionale* über  $S$  möglich. Diese Zugang ist jedoch anspruchsvoll und formal und wurde hier nicht gewählt. Der Vollständigkeit halber führen wir nur die grundlegende Definition an und weisen auf den Zusammenhang zu den bei uns verwendeten regulären Folgen hin:

**Definition.**  $g$  heißt *stetiges lineares Funktional* über  $S$ , falls  $g$  *lineares Funktional* über  $S$  ist und für Folgen  $\gamma_n \in S$ , die gegen  $\gamma \in S$  im Sinne von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \mathbb{R}} \left| |x|^p \frac{d^m}{dx^m} (\gamma_n(x) - \gamma(x)) \right| = 0 \quad \forall p, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

konvergieren, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\gamma_n) = g(\gamma)$$

*Bemerkung.* Beachte die unterschiedlichen Limesbildungen von  $g(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\gamma(x) dx$  in Bezug auf Folgen  $g_n \in S$  sowie andererseits  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\gamma_n) = g(\gamma)$  in Bezug auf Folgen  $\gamma_n \in S!$

**Satz.** *Jedes* stetige lineare Funktional  $g$  über  $S$  ist eine temperierte Distribution und es gibt eine reguläre Folge  $g_n \in S$ , sodass

$$g(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\gamma(x) dx \quad \forall \gamma \in S$$

Nach dieser Einführung in die Konzepte der Distributionstheorie wollen wir das wichtige Beispiel der Dirac'schen Deltafunktion  $\delta$  betrachten. Wir sagen *Deltafunktion*, obwohl richtigerweise *Delta-distribution* zu verwenden wäre.

**Beispiel.**

$$\left\{ \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-x^2 n} \right\}$$

definiert die **Dirac'sche Deltafunktion**  $\delta$

$$\delta(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-x^2 n} \gamma(x) dx$$

Es gilt die wichtige Formel

$$\delta(\gamma) = \gamma(0)$$

welche die gesuchte rigorose Definition der Dirac'schen Deltafunktion  $\delta$  darstellt.

*Beweis.*

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 n} \gamma(x) dx = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 n} (\gamma(x) - \gamma(0)) dx + \gamma(0) \underbrace{\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 n} dx}_{\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

weilers:

$$|\gamma(x) - \gamma(0)| = \left| \int_0^x \frac{d\gamma}{dx'} dx' \right| \leq \text{const.} \cdot |x|$$

da  $\frac{d\gamma}{dx'} \in S$  gilt  $\frac{d\gamma}{dx'} \leq \text{const.}$  (jede Funktion aus  $S$  ist stetig und fällt gegen 0 ab, muss dazwischen Max/Min haben)

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 n} (\gamma(x) - \gamma(0)) dx \right| \leq \text{const.} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{n}{\pi}} 2 \int_0^{\infty} e^{-nx^2} x dx}_{-\frac{1}{n} e^{-nx^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{n}} = \frac{\text{const.}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

*Bemerkung.*  $\left\{ \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-x^2 n} \right\}$  und  $\left\{ \sqrt{\frac{3n}{\pi}} e^{-3x^2 n} \right\}$  sind äquivalente Folgen für  $\delta$ .

## 4.2 Konventionelle Funktionen als Distributionen

Eine besondere einfache Klasse von temperierten Distributionen kann gewonnen werden, wenn eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben ist, die für ein  $\mu \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)| dx}{(1+x^2)^\mu} < \infty$$

erfüllt. In diesem Fall kann man eine reguläre Folge  $g_n \in S$  explizit angeben (wir lassen die Details hier in der Vorlesung allerdings aus), die im  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  eine Distribution mittels des *konventionellen* Integrals über  $f(x)$  definiert.

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \gamma(x) dx$$

Wir bezeichnen diese Distribution in ihrer Wirkung auf eine Testfunktion  $\gamma$  in suggestiver Weise mit  $f(\gamma)$ . Zu beachten ist, dass  $f(x)$  die vorgegebene Funktion bezeichnet,  $f(\gamma)$  hingegen die zugehörige temperierte Distribution. Das Integral über  $f(x)$  ist ein *konventionelles* Integral.

**Beispiel.**  $f(x) = 1$

1 kann auch als auch temperierte Distribution betrachtet werden, da für  $\mu = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 \, dx}{1+x^2} < \infty$$

endlich ist und gemäß vorigem Satz eine temperierte Distribution definiert

$$1(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \gamma(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) \, dx$$

Tatsächlich existiert eine reguläre Folge, die das bewirkt:  $\left\{ e^{-\frac{x^2}{n}} \right\}$

*Beweis.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/n} \gamma(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2/n} - 1) \gamma(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) \, dx$$

$$\left| e^{-\frac{x^2}{n}} - 1 \right| = \left| \int_0^x \frac{d}{dx'} (e^{-x'^2/n}) dx' \right| = \left| \int_0^x \frac{-2x' e^{-x'^2/n}}{n} dx' \right| \leq \left| \int_0^x \frac{2x'}{n} dx' \right| = \frac{x^2}{n}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2/n} - 1) \gamma(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2 \gamma(x)}_{\in \mathcal{S}} \, dx = \frac{\text{const.}}{n} \rightarrow 0$$

□

weitere Beispiele:

**Beispiel.**  $f(x) = x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x| \, dx}{(1+x^2)^2} < \infty$$

$$x(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} x \gamma(x) \, dx$$

**Beispiel.**  $f(x) = \Theta(x)$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(x) \, dx}{1+x^2} < \infty$$

$$\Theta(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \gamma(x) \, dx = \int_0^{\infty} \gamma(x) \, dx$$

**Beispiel.**  $f(x) = \ln|x|$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|x|| \, dx}{1+x^2} < \infty$$

$$\ln|x|(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \gamma(x) \, dx$$

Häufige SCHREIBWEISEN für Distributionen:

$$\begin{aligned}
 g(\gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) \, dx \\
 (g, \gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) \, dx \\
 g(x)(\gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) \, dx \\
 (g(x), \gamma(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) \, dx \\
 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \gamma(x) \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) \, dx
 \end{aligned}$$

Alle diese SCHREIBWEISEN bedeuten das gleiche, nämlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \gamma(x) \, dx$ . Die letzte SCHREIBWEISE  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \gamma(x) \, dx$  wird sehr gerne von PhysikerInnen verwendet, ist aber missverständlich, man beachte die zugehörige Definition mittels regulärer Folgen! Nur im Falle von Funktionen, die selber Distributionen sind, ist tatsächlich ein konventionelles Integral gemeint!

### 4.3 Rechenregeln

Regulären Folgen definieren temperierte Distributionen. Durch Manipulationen dieser Folgen (Addition, lineare Transformationen, Produktbildung, Ableitung, Fouriertransformation und Faltung) können entsprechende Rechenregeln für temperierte Distributionen hergeleitet werden.

#### 4.3.1 Summe

Seien:

$\{g_n\}$  reguläre Folge für  $g$

$\{h_n\}$  reguläre Folge für  $h$

**Definition.**

$$\begin{aligned}
 (g + h)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (g_n(x) + h_n(x)) \gamma(x) \, dx = g(\gamma) + h(\gamma) \\
 (g + h)(\gamma) &= g(\gamma) + h(\gamma)
 \end{aligned}$$

#### 4.3.2 Lineare Transformationen

Sei  $\{g_n\}$  reguläre Folge für  $g$

**Definition.**

$$\begin{aligned}
 (g(ax + b), \gamma(x)) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(ax + b) \gamma(x) \, dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x') \frac{1}{|a|} \gamma\left(\frac{x' - b}{a}\right) \, dx' \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \frac{1}{|a|} \gamma\left(\frac{x - b}{a}\right) \, dx
 \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde  $x' = ax + b$  gesetzt, wobei auch  $g_n(x') \in S$ .

$$(g(ax + b), \gamma(x)) = \left( g(x), \frac{1}{|a|} \gamma\left(\frac{x-b}{a}\right) \right)$$

**Beispiel.**

$$(\delta(x - x_0), \gamma(x)) = (\delta(x), \gamma(x + x_0)) = \gamma(x_0)$$

In anderer SCHREIBWEISE:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \gamma(x) dx = \gamma(x_0)$$

**Beispiel.**

$$(\delta(ax), \gamma(x)) = \left( \delta(x), \frac{1}{|a|} \gamma\left(\frac{x}{a}\right) \right) = \frac{1}{|a|} \gamma(0)$$

In anderer SCHREIBWEISE:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) \gamma(x) dx = \frac{1}{|a|} \gamma(0)$$

### 4.3.3 Produkt

Das Produkt zweier Distributionen ist im Allgemeinen nicht definierbar, wohl aber das Produkt einer sogenannten *schwach wachsenden* Funktion mit einer Distribution:

**Beispiel.**

$$\{g_n\} = \left\{ \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-x^2 n} \right\} \dots \delta\text{-Funktion}$$

$$\begin{aligned} g^2(\gamma) &\stackrel{???}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n^2(x) \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} e^{-x^2 2n} \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \gamma(0) = \infty \end{aligned}$$

**Definition.** Eine Funktion  $\Psi(x)$  heißt *schwach wachsend*, wenn sie unendlich oft differenzierbar ist und wenn für alle  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  ein festes  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^{-n_0} \frac{d^k}{dx^k} \Psi(x) \right| = 0$$

**Beispiel.**

$$\begin{array}{ll} \Psi(x) = ax^2 - 5x^9 & \text{Polynome sind schwach wachsend} \\ e^{-x^2} & \in S \text{ ist schwach wachsend} \\ e^{-x} & \text{ist nicht schwach wachsend} \end{array}$$

**Satz.** Wenn  $\gamma \in S$  und  $\Psi$  schwach wachsend, dann ist  $\Psi\gamma \in S$

*Beweis.* Z.z., dass  $\forall r, k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^r \frac{d^k}{dx^k} \Psi\gamma(x) \right| = 0$$

Ein typischer Term von  $\frac{d^k}{dx^k} \Psi\gamma$  ist  $\frac{d^s \Psi}{dx^s} \frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}} \gamma$ :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^r \frac{d^s \Psi}{dx^s} \frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}} \gamma \right| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x^{-n_0} \frac{d^s \Psi}{dx^s} x^{r+n_0} \frac{d^{k-s} \gamma}{dx^{k-s}} \right| = 0$$

Dabei geht der Faktor  $x^{-n_0} \frac{d^s \Psi}{dx^s}$  gegen Null, weil  $\Psi$  schwach wachsend, und der Faktor  $x^{r+n_0} \frac{d^{k-s} \gamma}{dx^{k-s}}$  geht gegen Null, weil  $\gamma \in S$  ist. □

**Definition.** Sei  $g$  temperierte Distribution und  $\Psi$  schwach wachsend

$$\begin{aligned} (\Psi g)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\Psi(x) g_n(x)}_{\in S} \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \underbrace{\Psi(x) \gamma(x)}_{\in S} dx \\ &= g(\Psi\gamma) \\ (\Psi g)(\gamma) &= g(\Psi\gamma) \end{aligned}$$

**Beispiel.**

$$(x\delta)(\gamma) = \delta \left( \underbrace{x\gamma}_{\in S} \right) = x\gamma(x)|_{x=0} = 0$$

kurz

$$\begin{aligned} x\delta &= 0 \\ (x\delta)(\gamma) &= 0(\gamma) \\ 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot \gamma(x) dx = 0 \end{aligned}$$

#### 4.3.4 Differentiation von Distributionen

**Definition.**

$$\begin{aligned} g'(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g'_n(x)}_{\in S} \gamma(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ g_n(x)\gamma(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\gamma'(x) dx \right] \\ &= 0 - g(\gamma') \end{aligned}$$

Der linke Term verschwindet, da der Integrand Element von  $S$  ist.

$$g'(\gamma) = -g(\gamma')$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}\Theta'(\gamma) &= -\Theta(\gamma') = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\gamma'(x) dx \\ &= -\int_0^{\infty} \gamma'(x) dx = -\underbrace{\gamma(x)}_{\in S} \Big|_0^{\infty} = +\gamma(0) = \delta(\gamma)\end{aligned}$$

also kurz:

$$\Theta' = \delta$$

**Beispiel.**

$$\delta'(\gamma) = -\delta(\gamma') = -\gamma'(0)$$

Wir können mittels Ableitung weitere Distributionen definieren

**Beispiel.**

$$x^{-1}(\gamma) := \ln|x|'(\gamma)$$

Der natürliche Logarithmus  $\ln|x|$  ist hier als temperierte Distribution – wie bereits bekannt – gemeint.

Kurz:

$$x^{-1} = \ln|x|'$$

In den Übungen wird gezeigt, dass

$$x x^{-1}(\gamma) = 1(\gamma)$$

Kurz:

$$x x^{-1} = 1$$

*Bemerkung.* Wenn  $g$  temperierte Distribution und  $\Psi$  schwach wachsend gilt:

$$(\Psi g)' = \Psi'g + \Psi g'$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}(\Psi g)'(\gamma) &= -\Psi g(\gamma') = -g(\Psi\gamma') = -g(-\Psi'\gamma + (\Psi\gamma)') \\ &= -g(-\Psi'\gamma) - g((\Psi\gamma)') = \Psi'g(\gamma) + g'(\Psi\gamma) = \Psi'g(\gamma) + \Psi g'(\gamma)\end{aligned}$$

□

**Beispiel.**

$$(x\Theta)' = 1\Theta + x\Theta' = \Theta + \underbrace{x\delta}_0 = \Theta \tag{4.1}$$

Wer's nicht glaubt:

$$\begin{aligned} (x\Theta)'(\gamma) &= -x\Theta(\gamma') = -\Theta(x\gamma') = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)x\gamma' dx = -\int_0^{\infty} x\gamma'(x) dx \\ &= -x\gamma|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \gamma(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\gamma(x) dx = \Theta(\gamma) \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Temperierte Distributionen haben beliebig hohe Ableitungen

**Beispiel.**

$$g''(\gamma) = -g'(\gamma') = +g(\gamma'')$$

$$\delta''(\gamma) = \delta(\gamma'') = \gamma''(0)$$

**Satz.** (ohne Beweis)

*Jede temperierte Distribution ist darstellbar als (mehrfache) Ableitung einer stetigen, höchstens schwach wachsenden Funktion*

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} \delta &= (x\Theta)'' \\ (x\Theta)'' &= \underbrace{((x\Theta)')}'_{\Theta} = \Theta' = \delta \end{aligned}$$

unter Benutzung von Gleichung 4.1.

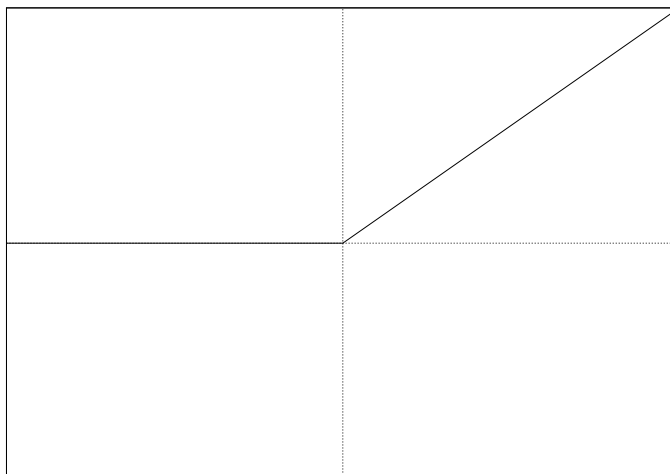


Abbildung 4.1:  $x\Theta(x)$

## 4.4 Fouriertransformation von Distributionen

### 4.4.1 Kurze Wiederholung der Fouriertransformation

Siehe auch Abschnitt 2.2; mit  $f \in S$ ,  $k \in \mathbb{R}$ :

$$(\mathcal{F}f)(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

$(\mathcal{F}f)(k)$  ist kein Funktional, sondern Definition der Fouriertransformation an der Stelle  $k \in \mathbb{R}$ . Diese

- ist gleichmäßig konvergent in  $k \in \mathbb{R}$
- bildet  $S$  auf sich selbst ab, d.h. wenn  $f \in S \Rightarrow \mathcal{F}f \in S$

**Beispiel.**  $f(x) = e^{-x^2/2} \Rightarrow (\mathcal{F}f)(k) = e^{-k^2/2}$

#### Umkehrtransformation

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{+ikx} dk$$

**Rechenregeln** Es gilt für  $f, g \in S$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = f$$

#### Differentiation

$$(\mathcal{F}f')(k) = ik(\mathcal{F}f)(k) \tag{4.2}$$

$$(\mathcal{F}f)'(k) = (\mathcal{F}(-ixf))(k) \tag{4.3}$$

#### Faltungsformeln

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}f \circ \mathcal{F}g \tag{4.4}$$

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \tag{4.5}$$

wo

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x') dx' = (g \circ f)(x) \tag{4.6}$$

#### Multiplikation

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}g)(x) dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}^{-1}f)(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}^{-1}g)(x) dx$$

#### 4.4.2 Fouriertransformation einer temperierten Distribution

**Definition.**

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}g)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}g_n)(x)\gamma(x) \, dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)(\mathcal{F}\gamma)(x) \, dx \\
 &= g(\mathcal{F}\gamma)
 \end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}g)(\gamma) = g(\mathcal{F}\gamma)$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}\delta)(\gamma) &= \delta(\mathcal{F}\gamma) = (\mathcal{F}\gamma)(0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) \underbrace{e^{i0x}}_1 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\gamma)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}1)(\gamma) &= 1(\mathcal{F}\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot (\mathcal{F}\gamma)(x) \, dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\gamma)(k) \, dk = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\gamma)(k) e^{ik0} \, dk \\
 &= \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\gamma))(0) = \sqrt{2\pi}\gamma(0) \\
 &= \sqrt{2\pi}\delta(\gamma)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}1 = \sqrt{2\pi}\delta$$

**Definition.**

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}^{-1}g)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}^{-1}g_n)(x)\gamma(x) \, dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)(\mathcal{F}^{-1}\gamma)(x) \, dx \\
 &= g(\mathcal{F}^{-1}\gamma)
 \end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(\gamma) = g(\mathcal{F}^{-1}\gamma)$$

Es gilt:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) = g$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g) = g$$

*Beweis.*

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g)(\gamma) = (\mathcal{F}^{-1}g)(\mathcal{F}\gamma) = g(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\gamma)) = g(\gamma)$$

□

Weitere Formeln:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g' &= ix\mathcal{F}g \\ (\mathcal{F}g)' &= \mathcal{F}(-ixg)\end{aligned}$$

## 4.5 Faltung von Distributionen

**Definition.** Seien  $\Psi$  eine schwach wachsende Funktion mit zugehöriger regulärer Folge  $\{\Psi_n\}$ , wo  $\Psi_n \in S$ , sowie Funktion  $f \in S$  gegeben. Dann gilt

$$\underbrace{(\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}f)}_{\in S'}(\underbrace{k}_{\in \mathbb{R}}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(\mathcal{F}\Psi_n)}_{\in S}(p) \underbrace{(\mathcal{F}f)}_{\in S}(k-p) dp$$

Einschub:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(k-p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-p)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}e^{ipx} dx \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(f(x)e^{-ikx}))(p)\end{aligned}$$

somit:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}f)(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(p) (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(f(x)e^{-ikx}))(p) dp \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(p) \underbrace{f(p)e^{-ikp}}_{\in S} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(p)f(p)e^{-ikp} dp = \mathcal{F}(\Psi f)(k)\end{aligned}$$

also:

$$(\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}f)(k) = \mathcal{F}(\Psi f)(k) \tag{4.7}$$

**Definition** (Faltung von Distributionen). Ähnlich wie das Produkt ist auch die Faltung von Distributionen nur eingeschränkt möglich.

Sei  $g$  temperierte Distribution,  $\{g_n\}$  die zugehörige reguläre Folge,  $g_n \in S$ ,  $\Psi$  schwach wachsende Funktion. Dann ist, unter Verwendung von Gl. 4.7,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}g)(\gamma) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}g_n)(x) \gamma(x) \, dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}(\Psi g_n))(x) \gamma(x) \, dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n \Psi(x) (\mathcal{F}\gamma)(x) \, dx \\
&= \Psi g(\mathcal{F}\gamma) \\
&= (\mathcal{F}(\Psi g))(\gamma) \\
\mathcal{F}\Psi \circ \mathcal{F}g &= \mathcal{F}(\Psi g) \tag{4.8}
\end{aligned}$$

**Beispiel.**  $\Psi = 1, g = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}1 \circ \mathcal{F}1 &= \mathcal{F}1 \\
\sqrt{2\pi}\delta \circ \sqrt{2\pi}\delta &= \sqrt{2\pi}\delta \\
\delta \circ \delta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta
\end{aligned}$$

**Beispiel.**  $\psi = 1, g = \mathcal{F}^{-1}h$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\delta \circ h &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}h) = h \\
\delta \circ h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}h
\end{aligned}$$

**Beispiel.**  $\psi = \mathcal{F}^{-1}f, f \in \mathcal{S}, g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \implies \mathcal{F}g = \delta$

$$f \circ \delta = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f$$

**Behauptung.**

$$(\mathcal{F}\psi \circ \mathcal{F}g)' = (\mathcal{F}\psi)' \circ \mathcal{F}g = \mathcal{F}\psi \circ (\mathcal{F}g)'$$

*Beweis.* Wir benutzen Gleichungen (4.5) und (4.3)

$$(\mathcal{F}\psi \circ \mathcal{F}g)' = (\mathcal{F}(\psi g))' = \mathcal{F}(-ix(\psi g))$$

Nun ist einerseits

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(-ix(\psi g)) &= \mathcal{F}((-ix\psi)g) \\
&= \mathcal{F}(-ix\psi) \circ \mathcal{F}g \\
&= (\mathcal{F}\psi)' \circ \mathcal{F}g
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(-ix(\psi g)) &= \mathcal{F}(\psi(-ixg)) \\ &= \mathcal{F}\psi \circ \mathcal{F}(-ixg) \\ &= \mathcal{F}\psi \circ (\mathcal{F}g)'\end{aligned}$$

□

Korollar:  $(\mathcal{F}\psi \circ g)' = (\mathcal{F}\psi)' \circ g = \mathcal{F}\psi \circ g'$

#### 4.5.1 Wiederholung formale Diskussion / heuristische Notation

Für Distributionen  $g \in S'$ , Testfunktionen  $\gamma \in S$

$$g(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\gamma(x)dx$$

wird häufig auch die rein symbolische *Notation*, die das gleiche bedeutet, verwendet:

$$g(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\gamma(x)dx$$

wie z.B.

$$\delta(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\gamma(x)dx$$

Analog *schreiben* wir  $\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , bzw.  $(\mathcal{F}\delta)(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}1(\gamma)$  symbolisch als

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\delta)(k)\gamma(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\gamma(k)dk$$

oder wir *schreiben* symbolisch

$$(\mathcal{F}\delta)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ja sogar

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

so, als ob wir  $e^{-ikx}|_{x=0} = 1$  verwendet hätten.

Ähnlicherweise *schreibt* sich

$$\mathcal{F}1 = \sqrt{2\pi}\delta$$

als

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi} \delta(k)$$

sodass formal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \delta(k)$$

In äquivalenter Notation *schreibt* sich

$$\delta \circ \delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta$$

als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') \delta(x - x') dx' &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') \delta(x - x') dx' &= \delta(x) \end{aligned}$$

so als ob wir

$$\delta(x - x')|_{x'=0} = \delta(x)$$

verwendet hätten, ähnlich

$$\begin{aligned} \delta \circ h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') h(x - x') dx' &= h(x) \end{aligned}$$

so als ob wir

$$h(x - x')|_{x'=0} = h(x)$$

verwendet hätten.

## 4.6 Nichtlineare Variablentransformation der $\delta$ -Funktion

**Satz.** Wenn  $f(x)$   $n$  Nullstellen  $x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n}$  hat, stetig differenzierbar und monoton in Umgebungen der Nullstellen  $x_{0_i}$  ist, weiters  $f'(x_{0_i}) \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  dann gilt

$$\delta(f)(\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(x_{0_i})|} \gamma(x_{0_i})$$

**Beispiel.**

$$\delta(x^2 - a^2)(\gamma) = \frac{1}{2|a|} [\gamma(a) + \gamma(-a)]$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - a^2, \quad x_{0_1} = -a, \quad x_{0_2} = a \\ f'(x) &= 2x, \quad f'(a) \neq 0, \quad f'(-a) \neq 0 \end{aligned}$$

*Beweis.* (für eine Nullstelle  $x_0$ )

$$(\delta(f(x)), \gamma(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-(f(x))^2 n} \gamma(x) dx$$

Sattelpunktmethode

sei  $F(x) \geq 0$ ,  $\gamma \in S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(x)n} \gamma(x) dx \approx \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-F(x_0)n} \gamma(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2 F''(x_0)n} dx$$

wo  $x_0$  Extremwert von  $F$ , d.h.  $F'(x_0) = 0$  und Taylorreihenentwicklung verwendet wurde

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \underbrace{F'(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 F''(x_0) + \dots$$

Hier:

$$\begin{aligned} F &= f^2 \\ F' &= 2ff' \\ F'' &= 2(f')^2 + 2ff'' \end{aligned}$$

Die Nullstelle  $x_0$  von  $f$  ist Minimum von  $F$  da

$$F'(x_0) = 2f(x_0)f'(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x_0) &= f(x_0)^2 = 0 \\ F'(x_0) &= 0 \\ F''(x_0) &= 2(f'(x_0))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(f)(\gamma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(x_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2 2(f'(x_0))^2 n} dx}_{\sqrt{\frac{n}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{|f'(x_0)|}} \\ &= \frac{1}{|f'(x_0)|} \gamma(x_0) \end{aligned}$$

□

## 4.7 Temperierte Distributionen im $\mathbb{R}^n$

**Definition.** Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist  $f(\mathbf{x}) \in S$ , wenn  $f$  beliebig partielle Ableitungen besitzt und für  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| r^k \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \right| = 0 \quad \forall k, \forall p_1 + p_2 + \dots + p_n \in \mathbb{N}$$

**Beispiel.**  $e^{-r^2} \in S$ ,  $x_1^2 e^{-r^2} \in S$

**Beispiel.**  $e^{-x_1^2} \notin S$  (fällt nicht ab, wenn  $x_1 = 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ )

**Definition** (Temperierte Distribution). Mittels regulärer Folgen und Testfunktionen aus  $S$  kann direkt für  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinert werden.

Es reicht, für  $\gamma(\mathbf{x}) \in S$  die spezielle Wahl  $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma_1(x_1) \gamma_2(x_2) \dots \gamma_n(x_n)$  wo alle  $\gamma_i(x_i) \in S$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  Rechenregeln im  $\mathbb{R}^n$  analog zu vorher.

**Definition.** Direktes Produkt von temperierten Distributionen.

Sei  $g_1, g_2$  temperierte Distribution auf  $\mathbb{R}^n$

Sei  $\gamma_1, \gamma_2$  Testfunktion auf  $\mathbb{R}^n$

$$(g_1 g_2)(\gamma_1 \gamma_2) = g_1(\gamma_1) g_2(\gamma_2)$$

**Beispiel.**  $\delta^3$  Funktion im  $\mathbb{R}^3$

$$\delta^3(\gamma) = \delta_1(\gamma_1) \delta_2(\gamma_2) \delta_3(\gamma_3)$$

*Bemerkung.*  $f(\mathbf{x})$  ist selbst Distribution

$$f(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}) d^n x$$

wenn  $\exists \nu \in \mathbb{R}$ , sodass  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\mathbf{x})| d^n x}{(1+r^2)^\nu} < \infty$

**Beispiel.**  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{r}$  ist selbst Distribution (für die Wahl  $\nu = 2$ ):

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta}_{4\pi} \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r} \frac{1}{(1+r^2)^2} = 4\pi \int_0^\infty dr \frac{r}{(1+r^2)^2} < \infty$$

Wichtige Formel: Sei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3 \quad (4.9)$$

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi \delta^3, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

$\frac{1}{|\mathbf{x}|}$  ist Distribution und gleichzeitig selbst Funktion im  $\mathbb{R}^3$

*Beweis.*

$$\left( \Delta \frac{1}{r} \right) (\gamma) = \frac{1}{r} (\Delta \gamma) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \gamma$$

$\gamma$  und alle Ableitungen stetig, also z.B. periodisch in  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

auch

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) = \sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \Big|_0^\pi = 0$$

sodass

$$\begin{aligned} \left( \Delta \frac{1}{r} \right) (\gamma) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \gamma \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[ \frac{1}{r} r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial r} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dr \left( -\frac{1}{r^2} \right) r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta [0 - \gamma(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \Big|_{r=0}] \\ &= -4\pi \gamma(0, 0, 0) \\ &= -4\pi \delta^3(\gamma) \end{aligned}$$

□

## 4.8 Greensfunktionsmethode

Erlaubt spezielle Lösungen von inhomogenen, linearen gewöhnlichen, aber auch insbesondere von inhomogenen, linearen, partiellen DGL zu finden.

$$Dy = f$$

$D$  ... linearer Differentialoperator

$y$  ... gesuchte Funktion

$f$  ... inhomogener Term der DGL

**Beispiel.**

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, D = \Delta$$

$$\Delta y = e^{-\mathbf{x}^2}$$

**Definition.** Eine temperierte Distribution  $G$ , welche die DGL

$$DG = \delta$$

löst, heißt Greenfunktion der DGL  $Dy = f$

**Satz.** Wenn  $f = \mathcal{F}\Psi$ , wo  $\Psi$  schwach wachsende Funktion ist, dann gilt:

$$y_{\text{spez}} = \sqrt{2\pi} f \circ G$$

*Beweis.* Wiederholtes Anwenden der Ableitungsformel für Faltung ergibt:

$$D y_{\text{spez}} = \sqrt{2\pi} f \circ (DG) = \sqrt{2\pi} f \circ \delta = \sqrt{2\pi} f \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = f$$

□

**Beispiel.**

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Delta y = f, \quad \in S$$

wissen schon:  $\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta^3$

$$\Rightarrow G = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|}$$

$$\Rightarrow y_{\text{spez}} = \sqrt{2\pi} \left( -\frac{1}{4\pi} \right) f \circ \frac{1}{|\mathbf{x}|}$$

Diese Lösung ist im Distributionssinn zu verstehen:

$$\Rightarrow y_{\text{spez}}(\gamma) = \sqrt{2\pi} \left( -\frac{1}{4\pi} \right) f \circ \frac{1}{|\mathbf{x}|}(\gamma)$$

In den Übungen wird gezeigt, dass

$$y_{\text{spez}}(\gamma) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}') \gamma(x)$$

im Sinne konventioneller Integration gilt, sodass die zugehörige Lösungsfunktion

$$y_{\text{spez}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}') \quad (4.10)$$

erhalten wird.

# Kapitel 5

## Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung im $\mathbb{R}^3$

Mehrere Variable  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ; eine unbekannte Funktion  $y(x_1, x_2, \dots, x_k)$ :

$$F\left(x_i, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \dots\right) = 0$$

### 5.1 Einleitung

In der folgenden Übersicht ist  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

**Statische PDG** (zeitunabhängig)

$$\text{Laplace-Gleichung} \quad \Delta\phi(\mathbf{x}) = 0$$

$$\text{Poisson-Gleichung} \quad \Delta\phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x})$$

$$\text{Schwingungsgleichung} \quad (\Delta + \mu^2)\phi(\mathbf{x}) = 0$$

**Evolutionsgleichungen** (beschreiben zeitliche Entwicklung)

$$\text{Wärmeleitungsgleichung} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\phi(t, \mathbf{x}) = 0$$

$$\text{Schrödinger-Gleichung} \quad \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta - V(\mathbf{x})\right)\phi(t, \mathbf{x}) = 0$$

$$\text{Wellengleichung} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi(t, \mathbf{x}) = 0$$

In Analogie zur Klassifikation quadratischer Formen bezeichnet man Differentialoperatoren der Form

$$D = a_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + b_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c(t, \mathbf{x})$$

(wo  $a_i, b_i$  Konstante) als

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{elliptisch} \\ \text{parabolisch} \\ \text{hyperbolisch} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder: } a_0 = b_0 = 0, a_{i=1,2,3} \text{ gleiches Vorzeichen} \\ \text{oder: } a_0 \text{ und } a_i \text{ gleiches Vorzeichen} \\ a_0 = 0, b_0 \neq 0, a_{i=1,2,3} \text{ gleiches Vorzeichen} \\ a_0 > 0, a_{i=1,2,3} < 0 \end{array} \right.$$

Es sind:

- elliptisch: Laplace-, Poisson- und Schwingungsgleichung
- parabolisch: Wärmeleitungs- und Schrödingergleichung, Fokker-Planck-Gleichung
- hyperbolisch: Wellengleichung

## 5.2 Laplace-Gleichung

### 5.2.1 Randwertproblem, Eindeutigkeit der Lösung

Suchen Lösung  $\phi$  der Laplace-Gleichung  $\Delta\phi = 0$  im Gebiet  $V \subset \mathbb{R}^3$ . Je nach Randbedingung (Vorgabe von Werten auf der Oberfläche) heißt das Problem:

$\phi \dots$  Dirichlet-Problem

$\nabla\phi\mathbf{n} \dots$  Neumann-Problem

(Im zweiten Fall bezeichnet  $\mathbf{n}$  den nach außen gerichteter Normalenvektor von  $O$ )

Um die Eindeutigkeit der Lösung in beiden Fällen zu zeigen, benötigen wir die *Green'schen Sätze*. Dazu beginnen wir beim *Satz von Gauss*:

$$\int_V \nabla \mathbf{A}(\mathbf{x}) d^3x = \int_O \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{n} dO$$

und setzen

$$\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$$

$$\nabla \mathbf{A} = (\nabla \phi)(\nabla \psi) + \phi \Delta \psi$$

1. Green'scher Satz

$$\int_V [(\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \phi \Delta \psi] d^3x = \int_O [\phi \nabla \psi \mathbf{n} dO]$$

2. Green'scher Satz (durch Substitution von  $\phi \leftrightarrow \psi$  und Subtraktion von der ursprünglichen Gleichung)

$$\int_V [\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi] d^3x = \int_O [(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \mathbf{n} dO]$$

**Eindeutigkeit der Lösung der Laplace-Gleichung** Es seien  $\phi_1, \phi_2$  zwei Lösungen in  $V$ , sodass

$$\Delta \phi_1 = 0$$

$$\Delta \phi_2 = 0$$

### 1. Dirichlet-Randbedingungen

Auf der Oberfläche  $O$  von  $V$  sind die Werte vorgegeben:

$$\phi_1 = \phi_2$$

Sei  $u = \phi_2 - \phi_1$

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{in } V \\ u &= 0 && \text{auf } O\end{aligned}$$

#### 1. Green'scher Satz $\phi = \psi = u$

$$\begin{aligned}\int_V [(\nabla u)^2 + u\Delta u] d^3x &= \int_O u(\nabla u)\mathbf{n}dO \\ \int_V (\nabla u)^2 d^3x &= 0\end{aligned}$$

da gemäß Voraussetzung  $\Delta u$  in  $V$  und  $u$  auf der Oberfläche verschwindet. Daraus folgt weiter  $\nabla u = 0$  und damit  $u = \text{const}$  in  $V$ , und, da  $u = 0$  auf  $O \subset V$ ,  $u = 0$  in  $V$  bzw.

$$\phi_1 = \phi_2$$

### 2. Neumann-Randbedingungen

Diesmal gilt auf der Oberfläche  $O$  und, wiederum mit  $u = \phi_2 - \phi_1$

$$\begin{aligned}(\nabla\phi_1)\mathbf{n} &= (\nabla\phi_2)\mathbf{n} \\ \Delta u &= 0 && \text{in } V \\ (\nabla u)\mathbf{n} &= 0 && \text{auf } O\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_V [(\nabla u)^2 + u\Delta u] d^3x &= \int_O u(\nabla u)\mathbf{n}dO \\ \nabla u &= 0\end{aligned}$$

Also ist wiederum  $u = \text{const}$  in  $V$ ; aber  $(\nabla u)\mathbf{n} = 0$  liefert keine weitere Einschränkung, daher ist Eindeutigkeit nur bis auf eine Konstante gegeben:

$$\phi_2 = \phi_1 + \text{const}$$

Wir besprechen im folgenden einige Ansätze zur Lösung der Laplace-Gleichung; wenn ein Dirichlet- oder Neumann-Problem lösbar ist, wissen wir, dass wir die *eindeutige* Lösung erhalten haben!

## 5.2.2 Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

So heißt die radialsymmetrische Lösung im  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(r)$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \phi(r) \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{d}{dr} \phi &= \text{const} \\
\frac{d}{dr} \phi &= \frac{\text{const}}{r^2} \\
\phi(r) &= \frac{c_1}{r} + c_2
\end{aligned}$$

**Beispiel.** Randbedingungen für  $\phi$  seien auf Kugelschale gegeben:

$$\begin{aligned}
\phi(R_1) &= \phi_1 \\
\phi(R_2) &= \phi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{c_1}{R_1} + c_2 \\
\phi_2 &= \frac{c_1}{R_2} + c_2 \\
\phi(r) &= \phi_2 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)
\end{aligned}$$

### 5.2.3 Produktansatz in Polarkoordinaten

Studieren nun die allgemeine Lösung der Laplace Gleichung, falls Randbedingungen für  $\phi$  auf Kugeloberfläche vorliegen. In diesem Fall ist Wahl von Polarkoordinaten günstig

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi(r, \vartheta, \varphi) \\
\Delta \phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0
\end{aligned}$$

#### 5.2.3.1 Produktansatz

$$\begin{aligned}
\phi(r, \vartheta, \varphi) &= R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) \\
\Theta \Phi \frac{1}{r^2} (r^2 R')' + R \Phi \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} (\sin \vartheta \Theta')' + R \Theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \Phi'' &= 0 \quad \left| \frac{r^2}{R \Theta \Phi} \right. \\
\frac{1}{R} (r^2 R')' + \frac{1}{\Theta \sin \vartheta} (\sin \vartheta \Theta')' + \frac{\Phi''}{\Phi \sin^2 \vartheta} &= 0 \quad \left| \sin^2 \vartheta \right. \\
\lambda \sin^2 \vartheta + \frac{1}{\Theta} \sin \vartheta (\sin \vartheta \Theta')' + \frac{1}{\Phi} \Phi'' &= 0
\end{aligned}$$

Dabei haben wir  $\lambda = \frac{1}{R} (r^2 R')'$  gesetzt; weiters  $\mu = -\frac{1}{\Phi} \Phi''$ . Zu lösen sind daher

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\mu \tag{5.1}$$

$$\frac{\sin \vartheta}{\Theta} (\sin \vartheta \Theta')' + \lambda \sin^2 \vartheta = \mu \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{R} (r^2 R')' = \lambda \tag{5.3}$$

Zunächst zu Gl. (5.1):

$$\begin{aligned}\Phi'' + \mu\Phi &= 0 \\ \Phi(\varphi) &= e^{\pm i\sqrt{\mu}\varphi}\end{aligned}$$

Wir verlangen Periodizität:  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ , daraus folgt  $\sqrt{\mu} = m \in \mathbb{Z}$ .

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nun setzen wir  $\mu = m^2$  in die Differentialgleichung für  $\Theta$  (5.2) ein und multiplizieren mit  $\frac{\Theta}{\sin^2 \vartheta}$ :

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta = 0$$

Wir setzen  $\cos \vartheta = x$

$$\begin{aligned}\Theta(\vartheta) &= \bar{\Theta}(x) \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \Theta(\vartheta) &= \frac{1}{\sin \vartheta} \underbrace{\frac{dx}{d\vartheta}}_{-\sin \vartheta} \frac{d\bar{\Theta}(x)}{dx} = -\frac{d\bar{\Theta}(x)}{dx}\end{aligned}$$

$$((1-x^2)\bar{\Theta}'(x))' + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \bar{\Theta} = 0$$

Vgl. Differentialgleichung Assoziierte Legendre-Polynome (3.8)

$$((1-x^2)P_l^m)' + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_l^m = 0$$

Endlichkeit der Lösung bei  $x = \pm 1$  gefordert (dies entspricht Endlichkeit bei  $\vartheta = 0, \pi$ ) und wir wissen, dass  $\lambda = l(l+1)$  sein muss und haben als Lösung

$$\Theta(\vartheta) = P_l^m(\cos \vartheta)$$

Zuletzt:  $\lambda = l(l+1)$  in radiale Gleichung (5.3) einsetzen

$$\begin{aligned}(r^2 R')' - l(l+1)R &= 0 \\ r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R &= 0\end{aligned}$$

Ansatz:

$$R(r) = r^\alpha$$

$$\underbrace{[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1)]}_{=0} r^\alpha = 0$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \alpha - l(l+1) &= 0 \\ \alpha_1 &= l \\ \alpha_2 &= -l - 1\end{aligned}$$

und somit

$$R(r) = \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases}$$

Wir fassen die winkelabhängigen Lösungen zu Kugelfunktionen  $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  (vgl. Abschnitt 3.5) zusammen.

Damit lautet die Lösung der Laplace-Gleichung:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ a_l^m r^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) + b_l^m \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \right] \quad (5.4)$$

**Beispiel.**  $l = m = 0$ :  $Y_0^0 = \text{const}$

$$a_l^m = b_l^m = 0 \quad \text{wenn } (l, m) \neq (0, 0)$$

Fundamentallösung:

$$\phi = c_1 + \frac{c_2}{r}$$

### 5.2.3.2 Randbedingung

auf Oberfläche der Kugel mit Radius  $R$ :

$$\phi(R, \vartheta, \varphi) = V(\vartheta, \varphi)$$

- Interessiert man sich für Lösungen innerhalb der Kugel, so darf die Lösung nicht bei  $r = 0$  singulär werden  $\Rightarrow b_l^m = 0$
- Ist die Lösung außerhalb der Kugel gesucht, darf sie nicht in  $\infty$  divergieren  $\Rightarrow a_l^m = 0$

Wenn z.B. Lösung innerhalb der Kugel gesucht ist:

$$V(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^m R^l Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Die  $a_l^m$  können mit Gl. (3.9) erhalten werden

$$a_{l'}^{m'} = \frac{1}{R^{l'}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta Y_{l'}^{*m'}(\vartheta, \varphi) \cdot V(\vartheta, \varphi)$$

*Bemerkung.* Die verallgemeinerte Fundamentallösung

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{c_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + c_2$$

ist ebenfalls Lösung der Laplace-Gleichung für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ , wo  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$  fix vorgegeben.

*Beweis.*

$$\Delta = \nabla^i \nabla^i$$

$$\begin{aligned} \nabla_x^i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \nabla_y^k \frac{1}{|\mathbf{y}|} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \nabla_y^k (x^i - x'^i) = \nabla_y^k \frac{1}{|\mathbf{y}|} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \delta^{ik} \\ &= \nabla_y^i \frac{1}{|\mathbf{y}|} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \\ \nabla_x^i \nabla_x^i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \Delta_y \frac{1}{|\mathbf{y}|} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'} = 0 \end{aligned}$$

□

Die verallgemeinerte Fundamentallösung  $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$  stimmt nach Entwicklung in Kugelfunktionen mit der Separationslösung (5.4) überein:

Zur Erinnerung:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \vartheta, \varphi)$ ,  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(R, \theta, \phi)$ ; Entwicklung nach Gl. (3.2) und Gl. (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^l & r < R \\ \frac{1}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^l & r > R \end{cases} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^{*m}(\vartheta, \varphi) Y_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^l & r < R \\ \frac{1}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^l & r > R \end{cases} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vartheta, \varphi) Y_l^{*m}(\theta, \phi) \begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^l & r < R \\ \frac{1}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^l & r > R \end{cases} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \begin{cases} a_l^m r^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) & r < R \\ b_l^m \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vartheta, \varphi) & r > R \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei wir in der letzten Zeile  $Y_l^{*m}(\theta, \phi)$  in den Koeffizienten zusammengefasst haben, da  $\mathbf{x}'$  und damit  $\theta$  und  $\phi$  konstant sind.

#### 5.2.4 Produktansatz in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi \\ x_2 &= \rho \sin \varphi \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

Falls Randbedingung für  $\phi$  auf Zylinderfläche vorliegt, ist Verwendung von Zylinderkoordinaten vorteilhaft.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

### 5.2.4.1 Produktansatz (für innere Lösung)

$$\phi(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

$$\begin{aligned}\Phi Z(P'' + \frac{1}{\rho}P') + PZ\frac{1}{\rho^2}\Phi'' + P\Phi Z'' &= 0 \\ \frac{1}{P}(P'' + \frac{1}{\rho}P') + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\Phi'' + \frac{1}{Z}Z'' &= 0 \\ -\frac{\rho^2}{P}(P'' + \frac{1}{\rho}P') + k^2\rho^2 + \frac{1}{\Phi}\Phi'' &= 0\end{aligned}$$

Diesmal ist

$$k^2 = \frac{1}{Z}Z'' \quad (5.6)$$

$$v = -\frac{1}{\Phi}\Phi'' < 0 \quad (5.7)$$

$$-\frac{\rho^2}{P}(P'' + \frac{1}{\rho}P') + k^2\rho^2 + \frac{1}{\Phi}\Phi'' = 0 \quad (5.8)$$

und damit für Gl. (5.6)

$$\begin{aligned}Z'' - k^2Z &= 0 \\ Z_{1,2} &= e^{\pm kz}\end{aligned}$$

(und damit sind auch die Linearkombinationen  $Z_{\pm} = \frac{1}{2}(e^{kz} \pm e^{-kz}) = \begin{cases} \cosh kz \\ \sinh kz \end{cases}$  Lösungen)

sowie für Gl. (5.7) (vgl. Gl. 5.1)

$$\begin{aligned}\Phi &= e^{\pm i\sqrt{v}\varphi} \\ \Phi &= e^{in\varphi}\end{aligned}$$

unter Voraussetzung der Periodizität, mit  $v = n^2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Die radiale Gleichung (5.8) multiplizieren wir mit  $\frac{P}{\rho^2 k^2}$  und setzen im nächsten Schritt  $k\rho = x$  und  $P(\rho) = \bar{P}(x)$  (und daher  $\frac{1}{k}\frac{dP(\rho)}{d\rho} = \frac{d\bar{P}(x)}{dx}$ ):

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2}\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{k^2}\frac{dP}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2 k^2}\right)P &= 0 \\ \frac{d^2\bar{P}(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\bar{P}(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\bar{P}(x) &= 0\end{aligned}$$

Dies ist eine Bessel'sche DGL, daher:

$$\begin{aligned}\bar{P}(x) &= J_n(x) \\ P(\rho) &= \bar{P}(k\rho) = J_n(k\rho)\end{aligned}$$

*Bemerkung.*  $J_n(k\rho) \Leftrightarrow$  innere Lösung, bei  $\rho = 0$  endlich

### 5.2.4.2 Lösung des RWP

Wir betrachten die Randbedingungen

$$\phi(\rho, \varphi, 0) = 0$$

$$\phi(1, \varphi, z) = 0$$

sodass

$$\Rightarrow Z(z) = \sinh kz$$

$$\Rightarrow J_n(k) = 0$$

mit  $k = k_{nm}$ , den Nullstellen der  $J_n$  und  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Somit ist

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(k_{nm}\rho) \cdot \sinh(k_{nm}z) \cdot (a_{nm} \sin n\varphi + b_{nm} \cos n\varphi)$$

schließlich

$$\phi(\rho, \varphi, L) = V(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(k_{nm}\rho) \cdot \sinh(k_{nm}L) \cdot (a_{nm} \sin n\varphi + b_{nm} \cos n\varphi)$$

und durch Multiplikation/Integration mit  $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin l\varphi \cdot \int_0^1 J_l(k_{lm}\rho) \rho d\rho$  und mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^1 J_l(k_{lm}\rho) J_l(k_{ln}\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2} \delta_{mn} (J'_l(k_{lm}))^2$$

folgen die  $a_{l'}$  und analog die  $b_{l'}$  mit  $\int_0^{2\pi} \cos l\varphi d\varphi \dots$

## 5.2.5 Produktansatz in kartesischen Koordinaten

Wenn die Randbedingung auf Quaderoberfläche vorliegt, sind kartesische Koordinaten vorteilhaft.

### 5.2.5.1 Produktansatz

$$\phi(\mathbf{x}) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Wir dividieren die Laplace-Gleichung durch  $XYZ$ :

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Wir setzen und erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -\frac{X''}{X} & \beta^2 &= -\frac{Y''}{Y} & \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{Z''}{Z} \\ X &= e^{\pm i\alpha x} & Y &= e^{\pm i\beta y} & Z &= e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \end{aligned}$$

### 5.2.5.2 Randbedingung

Wir betrachten die Randbedingung

$$\phi = 0 \text{ bei } \begin{cases} x = 0, 1 \\ y = 0, 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\phi(x, y, 1) = V(x, y)$$

Damit haben wir

$$\begin{cases} X = \sin n\pi x & \alpha_n = n\pi \\ Y = \sin m\pi y & \beta_m = m\pi \\ Z = \sinh \pi \sqrt{n^2 + m^2} z \end{cases}$$

$$\phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sinh \pi \sqrt{n^2 + m^2} z$$

$$z = 1 : \quad V(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin(n\pi x) \sin(m\pi y) \sinh \pi \sqrt{n^2 + m^2}$$

Analog zu früher erhalten wir diesmal durch Multiplikation/Integration mit  $\int_0^1 \sin k\pi x dx \cdot \int_0^1 \sin l\pi y dy$  und Anwendung der Orthogonalitätsbedingungen die Koeffizienten  $a_{kl}$ .

## 5.3 Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

In der Elektrodynamik heißt  $\phi(\mathbf{x})$  *Potential* (an der Stelle  $\mathbf{x}$ ) einer Ladungsverteilung, die durch die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{x})$  beschrieben wird.

### 5.3.1 Randwertprobleme und Eindeutigkeit

Genauso wie bei Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta\phi_1 &= -4\pi\rho \\ \Delta\phi_2 &= -4\pi\rho \\ u &= \phi_2 - \phi_1 \\ \Delta u &= 0 \\ &\dots\end{aligned}$$

### 5.3.2 Green-Funktion

Wir wissen (4.9):  $\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta^3$  bzw.

$$\begin{aligned}\Delta\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) &= \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ \phi(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}')\end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$  Potential (an der Stelle  $\mathbf{x}$ ) einer in  $\mathbf{x}'$  befindlichen, punktförmigen Einheitsladung.

$$\begin{aligned}\Delta\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} &= -4\pi\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ \text{d.h. } \rho(\mathbf{x}) &= \underbrace{1}_{\text{Einheitsladung}} \cdot \underbrace{\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}_{\text{Punktförmig in } \mathbf{x}'}\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Für festes  $\mathbf{x}'$  ist

$$\lim_{|\mathbf{x}|\rightarrow\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = 0$$

und für  $\rho(\mathbf{x}) \in S$  erfüllt  $\phi(\mathbf{x})$  die Dirichlet-Bedingung

$$\lim_{|\mathbf{x}|\rightarrow\infty} \phi(\mathbf{x}) = 0$$

Wie kann allgemeinere Dirichlet-Randbedingung berücksichtigt werden?

### 5.3.3 Dirichlet-Green-Funktion

Die Green-Funktion der Poissongleichung ist nicht eindeutig, da immer eine beliebige Lösung der Laplace-Gleichung addierbar ist.

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\right) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

wo  $\Delta F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ .

Diese Freiheit ermöglicht das Auffinden der so genannten Dirichlet-Green-Funktion  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$

$$\begin{cases} \Delta \left(-\frac{1}{4\pi}\right) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \end{cases} \quad \text{wenn } \mathbf{x} \in O$$

und gestattet, Lösung für allgemeine Dirichlet-Randbedingungen anzugeben.

*Bemerkung.* In der Definition von  $G_D$  kommt nur  $O$  vor, nicht der Wert von  $\phi$  auf  $O$ .

Wir setzen die Lösung  $\phi$  der Poissongleichung sowie  $\psi(\mathbf{x}) = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  in den 2. Green'schen Satz ein, wobei

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \qquad \Delta\psi = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\begin{aligned} \int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) d^3x &= \int_O (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \mathbf{n} dO \\ \int_V [\phi(\mathbf{x})(-4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(-4\pi\rho(\mathbf{x}))] d^3x &= \int_O [\phi(\mathbf{x})\nabla G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\nabla\phi(\mathbf{x})] \mathbf{n} dO \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ , da dort  $\mathbf{x} \in O$ .

$$\phi(\mathbf{x}') = \int_V G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}) d^3x - \frac{1}{4\pi} \int_O \phi(\mathbf{x})\nabla G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{n} dO$$

Hier ist  $\phi(\mathbf{x})$  für  $\mathbf{x} \in O$  bei Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben.

Wir benennen  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$  um und verwenden  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ ; dann ist die eindeutige Lösung der Poissongleichung bei Dirichlet-Randbedingungen:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_O \phi(\mathbf{x}')\nabla_{\mathbf{x}'} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{n} dO'$$

### 5.3.4 Spiegelungsmethode

Zur Konstruktion von  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  ersetzen wir  $V$  mit Randbedingungsfläche durch ein größeres Volumen ohne Randbedingungsfläche, aber mit zusätzlicher Ladung *im hinzugefügten Volumen*. Diese zusätzliche Ladung wird so gewählt, dass ihr Effekt die Randbedingung simuliert

**Beispiel.**

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\} \quad \text{Halbraum}$$

$$O = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\}$$

$$\Rightarrow G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{-1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_s|} \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &\dots \text{ Potential einer Einheitsladung bei } \mathbf{x}' \\ \frac{-1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_s|} &\dots \text{ Potential einer negativen Einheitsladung bei gespiegelter Stelle } \mathbf{x}'_s \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}'_s = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ -x'_3 \end{pmatrix}$$

Tatsächlich ist  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ , wenn  $x_3 = 0$ .

*Bemerkung.*

$$\mathbf{x}'_s \notin V \Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{x}'_s| \neq 0 \Rightarrow \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_s|} = 0$$

**Beispiel** (Kugel).

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| < 1\}$$

$$O = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1\}$$

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\left(-\frac{1}{|\mathbf{x}'|}\right)}{\left|\mathbf{x} - \frac{1}{|\mathbf{x}'|^2} \mathbf{x}'\right|} \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V$$

### 5.3.5 Multipolentwicklung

Betrachten Poissongleichung mit Randbedingung  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}) = 0$ , wo  $\rho = 0$  außerhalb eines endlichen Volumens  $V$ ; verwenden 5.5

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') Y_l^{*m}(\vartheta', \varphi') Y_l^m(\vartheta, \varphi) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Q_l^m Y_l^m(\vartheta, \varphi) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \end{aligned}$$

wobei wir

$$Q_l^m = \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') Y_l^{*m}(\vartheta', \varphi') \in \mathbb{C}$$

gesetzt haben.

Im Detail:

$$\begin{aligned} Q_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \\ Q_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_V d^3x' (x'_1 - ix'_2) \rho(\mathbf{x}') \\ Q_1^0 &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_V d^3x' x'_3 \rho(\mathbf{x}') \\ &\vdots \end{aligned}$$

sei  $\mathbf{d} := \int_V d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \dots$  elektrisches Dipolmoment

Also ebenso:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \dots$$

## 5.4 Schwingungsgleichung

### 5.4.1 Homogene Schwingungsgleichung

$$(\Delta + \mu^2) \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mu \in \mathbb{R}$$

### 5.4.2 Fundamentallösung

Radialsymmetrische Lösung der Schwingungsgleichung in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\phi = \phi(r) \Rightarrow \frac{1}{r^2}(r^2 \phi')' + \mu^2 \phi = 0$$

setzen:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{u(r)}{r} \\ \phi'(r) &= \frac{u'r - u}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}(u'r - u)' + \mu^2 \frac{u}{r} &= 0 \\ u''r + u' - u' + \mu^2 r u &= 0 \\ u'' + \mu^2 u &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= c_1 \cos \mu r + c_2 \sin \mu r \\ \phi(r) &= c_1 \frac{\cos \mu r}{r} + c_2 \frac{\sin \mu r}{r} \end{aligned}$$

**Beispiel.** Mit Dirichlet-Randbedingung auf Kugelschale

$$(\Delta + \mu^2)\phi = 0 \quad 0 < |\mathbf{x}| \leq R$$

$$\phi(R_1) = \phi_1, \quad \phi(R_2) = \phi_2$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi_1 &= c_1 \frac{\cos \mu R_1}{R_1} + c_2 \frac{\sin \mu R_1}{R_1} \\ \phi_2 &= c_1 \frac{\cos \mu R_2}{R_2} + c_2 \frac{\sin \mu R_2}{R_2} \end{aligned}$$

ist ein Gleichungssystem für  $c_1$  und  $c_2$ , dessen Determinante zu berechnen ist

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\cos \mu R_1}{R_1} & \frac{\sin \mu R_1}{R_1} \\ \frac{\cos \mu R_2}{R_2} & \frac{\sin \mu R_2}{R_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_1 R_2} \sin \mu(R_1 - R_2)$$

Ist  $\mu$  Eigenwert des RWP – in unserem Beispiel, wenn  $\mu_n = n\pi / (R_1 - R_2)$ , sodass  $\sin \mu_n (R_1 - R_2) = 0$  – so existiert bei homogenen Randbedingungen  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  eine nichttriviale Lösung der Schwingungs-

gleichung mit einem unbestimmten Koeffizienten. Bei inhomogenen Randbedingungen muss Lösung nicht immer existieren.

**Beispiel.**  $R_1 = 0, c_1 = 0$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{R_2}$$

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= c_2 \frac{\sin \mu_n r}{r} \\ \Phi(R_2) &= c_2 \frac{\sin n\pi}{R_2} = 0 \end{aligned}$$

$c_2$  ist unbestimmt

Ist  $\mu$  kein EW des RWP, so ist Schwingungsgleichung eindeutig lösbar, es bleiben keine Koeffizienten unbestimmt.

### 5.4.3 Produktansatz in Polarkoordinaten

Wenn z.B. die Randbedingung auf Kugeloberfläche vorliegt, Lösung im Inneren gesucht ist

Anwendung: z.B. Luftschwingungen in einem Hohlraum

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$$

Winkelabhängiger Teil wie bei Laplace-Gleichung

$$\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) = Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad l = 0, 1, \dots \quad m = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

Radiale Gleichung

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR(r)}{dr} + [\mu^2 r^2 - l(l+1)]R(r) = 0$$

setzen

$$r = \frac{x}{\mu}$$

$$y(x) = R(r(x))$$

$$y'(x) = \frac{dR}{dr} \frac{1}{\mu}$$

$$y''(x) = \frac{d^2 R}{dr^2} \frac{1}{\mu^2}$$

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right]y = 0$$

setzen  $y(x) = x^{-1/2}J(x)$

$$y' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}J + x^{-1/2}J'$$

$$y'' = \frac{3}{4}x^{-5/2}J - x^{-3/2}J' + x^{-1/2}J''$$

$$x^{-\frac{1}{2}} \left\{ J'' + \frac{1}{x}J' + \left( 1 - \frac{l(l+1) + \frac{1}{4}}{x^2} \right) J \right\} = 0$$

$$J'' + \frac{1}{x}J' + \left( 1 - \frac{\left( l + \frac{1}{2} \right)^2}{x^2} \right) J = 0$$

dies ist die Differentialgleichung der Besselfunktion  $J_{l+\frac{1}{2}}(x)$

Diese ist mittels der  $\Gamma$ -Funktion definiert

$$\left( l + \frac{1}{2} + r \right)! = \Gamma \left( l + \frac{1}{2} + r + 1 \right)$$

Wir bezeichnen  $J_{l+\frac{1}{2}}(x) = j_l(x)$  als *sphärische Besselfunktion*.

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} j_l(\mu r) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

**Beispiel.**

$$\phi(R, \vartheta, \varphi) = V(\vartheta, \varphi)$$

und  $\mu$  sei kein EW, d.h.  $j_l(\mu R) \neq 0 \forall l = 0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow$  alle  $a_{lm}$  können aus Orthogonalitätsrelation der Kugelfunktionen hergeleitet werden

**Beispiel.**

$$\phi(R, \vartheta, \varphi) = 0$$

mit Eigenwert  $\mu$

Z. B. für

$$j_5(\mu R) = 0$$

sind alle  $a_{5m}$  mit  $m = -5, -4, \dots, 4, 5$ .

unbestimmbare freie Parameter und die Lösung lautet

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{m=-5}^5 a_{5m} j_5(\mu r) Y_5^m(\vartheta, \varphi)$$

#### 5.4.4 Inhomogene Schwingungsgleichung

$$(\Delta + \mu^2)\phi(\mathbf{x}) = -4\pi\tau(\mathbf{x})$$

Lösung mittels Greenfunktion ist gesucht

**Behauptung.**

$$(\Delta + \mu^2) \frac{e^{\pm i\mu r}}{r} = -4\pi\delta^3$$

Beweis.

$$\left(\Delta \frac{e^{\pm i\mu r}}{r}, \gamma\right) = \left(\frac{e^{\pm i\mu r}}{r}, \Delta\gamma\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Distr.} &\stackrel{\text{Fkt.}}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{\pm i\mu r}}{r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \gamma \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^\infty (-1) dr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{\pm i\mu r}}{r} \right) r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial r} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \left[ - \int_0^\infty dr (-1 \pm i\mu r) e^{\pm i\mu r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \left\{ -\gamma|_{r=0} + \int_0^\infty dr [\pm i\mu \pm i\mu(-1 \pm i\mu r)] e^{\pm i\mu r} \gamma \right\} \\ &= -4\pi\gamma(\mathbf{0}) - \mu^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{\pm i\mu r}}{r} \gamma(\mathbf{x}) \\ &= (-4\pi\delta^3, \gamma) - \mu^2 \left( \frac{e^{\pm i\mu r}}{r}, \gamma \right) \end{aligned}$$

$$\phi_{\pm}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{\pm i\mu|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

□

## 5.5 Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta \phi(\mathbf{x}, t) \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \in S \end{cases}$$

wo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$ ,  $a^2 > 0$ ,  $f(\mathbf{x}) \in S \dots$  vorgegebene Temperaturverteilung

Neue Lösungsmethode: Fouriertransformation bzgl.  $\mathbf{x}$ . Zweimalige Anwendung von 4.2 auf die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= a^2 \Delta \phi(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial (\mathcal{F}\phi)(\mathbf{k}, t)}{\partial t} &= -a^2 \mathbf{k}^2 (\mathcal{F}\phi)(\mathbf{k}, t) \end{aligned}$$

wobei wir die erste Zeile mit  $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x$  integriert und  $(\mathcal{F}\phi)(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t) d^3x$  verwendet haben.

Integration dieser gewöhnlichen DGL ergibt

$$(\mathcal{F}\phi)(\mathbf{k}, t) = c(\mathbf{k}) e^{-a^2 \mathbf{k}^2 t}$$

Nun ist

$$(\mathcal{F}\phi)(\mathbf{k}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \underbrace{\phi(\mathbf{x}, 0)}_{f(\mathbf{x})} d^3x = (\mathcal{F}f)(\mathbf{k})$$

$$(\mathcal{F}\phi)(\mathbf{k}, t) = (\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) e^{-a^2 \mathbf{k}^2 t}$$

Produkt zweier Funktionen in  $k$ : Faltung

Rücktrafo (vgl. Faltungsformel 2.10; hier  $\mathcal{F}^{-1}$  statt  $\mathcal{F}$ ):

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) \circ \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-a^2 \mathbf{k}^2 t} \right) = f \circ \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-a^2 \mathbf{k}^2 t} \right)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left( e^{-a^2 \mathbf{k}^2 t} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)t} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} d^3k$$

Dieser Ausdruck faktorisiert in 3 Integrale über  $k_1, k_2, k_3$

Ein Integral herausgegriffen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 p^2 t + i p x} dp &= \frac{1}{\sqrt{2ta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p'^2}{2} + i p' \frac{x}{\sqrt{2ta}}} dp' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2ta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{2ta}} \right)^2} dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2ta}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{2ta}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2ta}} e^{-\frac{x^2}{4ta^2}} \end{aligned}$$

wo  $p = \frac{1}{\sqrt{2ta}} p'$  und  $dp = \frac{1}{\sqrt{2ta}} dp'$ ; weiters  $q = p' - i \frac{x}{\sqrt{2ta}}$  (und  $dq = dp'$ ) und nach Auswertung des Gauss'schen Integrals über  $q$

Dreimal dasselbe Procedere ( $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ ):

$$\mathcal{F}^{-1} \left( e^{-a^2 \mathbf{k}^2 t} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{2ta}} \right)^3 e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4ta^2}}$$

$$\Rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2ta}} \right)^3 \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2}{4ta^2}} f(\mathbf{x}') d^3x'$$

Faltung = Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit AWP

## 5.6 Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \left( -\frac{1}{2} \Delta + V(\mathbf{x}, t) \right) \psi(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Falls  $V$  zeitunabhängig ist, d.h.  $V = V(\mathbf{x})$ , ist Produktansatz möglich

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}) f(t)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 i\phi\dot{f} &= \left(-\frac{1}{2}\Delta\phi + V(\mathbf{x})\phi\right) f \\
 \frac{i\dot{f}}{f} &= \frac{-\frac{1}{2}\Delta\phi + V\phi}{\phi} = E = \text{const} \\
 i\dot{f} &= Ef \\
 f(t) &= e^{-iEt} \\
 \left(-\frac{1}{2}\Delta + V - E\right) \phi(\mathbf{x}) &= 0
 \end{aligned}$$

Zeitunabhängige Schrödingergleichung (elliptischer Typ)

Wegen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik verlangen wir, dass  $\phi(\mathbf{x})$  quadratintegabel ist:  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \phi d^3x = 1$ ; dies ist ein verallgemeinertes Sturm-Liouville-Problem (Polynomlösung!)

**Beispiel.** H-Atom

$$V = -\frac{1}{r}$$

Separationsansatz für  $\phi$  in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{r} - E\right) \phi(\mathbf{x}) &= 0 \\
 \phi(\mathbf{x}) &= R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)
 \end{aligned}$$

Wissen schon von Laplace-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) &= Y_l^m(\vartheta, \varphi) \\
 l &= 0, 1, 2, \dots \\
 m &= -l, \dots, l
 \end{aligned}$$

mit

$$-\frac{1}{2}R'' - \frac{1}{r}R' + \left(-\frac{1}{r} - E + \frac{l(l+1)}{2r^2}\right)R = 0$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned}
 R(r) &= \frac{y(r)}{r} \\
 R'(r) &= \frac{y'}{r} - \frac{y}{r^2} \\
 R''(r) &= \frac{y''}{r} - \frac{2y'}{r^2} + \frac{2y}{r^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \left( \frac{y''}{r} - \frac{2y'}{r^2} + \frac{2y}{r^3} \right) - \frac{y'}{r^2} + \frac{y}{r^3} + \left( -\frac{1}{r} - E + \frac{l(l+1)}{2r^2} \right) \frac{y}{r} &= 0 \\
y'' + \left( \frac{2}{r} + \underbrace{2E}_{\varepsilon} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y &= 0 \\
y'' + \left( \varepsilon + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y &= 0
\end{aligned}$$

und setzen weiters

$$y(r) = x^{l+1} e^{-x/2} L(x)$$

$$x = 2r\sqrt{-\varepsilon}$$

$$xL''(x) + (2l+2-x)L'(x) + \left( \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} - l - 1 \right) L(x) = 0$$

Nur wenn  $\left( \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} - l - 1 \right) = 0, 1, 2, \dots$  liegt die Lösung in Form eines Polynoms (genauer: Laguerrepolynom) vor. Fordern also  $\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} = n = \{1, 2, 3, \dots\}$ , sodass  $\phi$  quadratintegabel wird (wichtig für Wahrscheinlichkeitsinterpretation in QM).

$$\Rightarrow L(x) = L_{n-l-1}^{2l+1}(x)$$

$$\Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = \sum_n \sum_l \sum_m a_{nlm} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{l+1} e^{-r/n}}{r} L_{n-l-1}^{2l+1} \left( \frac{2r}{n} \right)$$

bzw. wir erhalten

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l b_{nlm} e^{\frac{it}{2n^2}} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \cdot r^l e^{-\frac{r}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1} \left( \frac{2r}{n} \right)$$

$\Rightarrow$  siehe auch diesbezügliches Bsp. in den Übungen

## 5.7 Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

### 5.7.1 Radialsymmetrische Lösung

beschreibt kugelsymmetrische Ausbreitung von Schallwellen im  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi &= 0 \\
\phi(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(r) \\
\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, 0) &= 0
\end{aligned}$$

setzen

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{y(r, t)}{r}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0$$

$$y(r, 0) = r\varphi(r)$$

$$\dot{y}(r, 0) = 0$$

ist eine eindimensionale Wellengleichung

führen neue Variable ein:

$$\xi = r + t$$

$$\eta = r - t$$

$$u(\xi, \eta) = y(r(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

$$\Rightarrow y(r, t) = F(r + t) + G(r - t) \quad \text{D'Alembert'sche Lösung für 1-dimensionale Wellengleichung}$$

Um Anfangsbedingungen

$$y(r, 0) = r\varphi(r)$$

$$\dot{y}(r, 0) = 0$$

zu erfüllen, bekommen wir

$$F(r) = \frac{1}{2}(c + r\varphi(r))$$

$$G(r) = \frac{1}{2}(-c + r\varphi(r))$$

und

$$y(r, t) = \frac{1}{2}[(r + t)\varphi(r + t) + (r - t)\varphi(r - t)]$$

$$\phi(r, t) = \frac{1}{2r}[(r + t)\varphi(r + t) + (r - t)\varphi(r - t)]$$

### 5.7.2 Stationäre Lösung

beschreibt stehende Wellen in Hohlräumen

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} - \Delta \phi = 0$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ an der Stelle } |\mathbf{x}| = R$$

Produktansatz:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})f(t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}\psi - f\Delta\psi &= 0 \\ \underbrace{\frac{\ddot{f}}{f}}_{-\mu^2} &= \underbrace{\frac{\Delta\psi}{\psi}}_{-\mu^2} \end{aligned}$$

Schwingungsgleichung:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x})|_{|\mathbf{x}|=R} &= 0 \\ f(t) &= a \sin \mu t + b \cos \mu t, \quad \Delta\psi + \mu^2\psi = 0 \end{aligned}$$

### 5.7.3 Ebene Wellen

Produktansatz:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$$

wo  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  ... fixer Vektor  $\equiv$  Ausbreitungsrichtung der Wellen

$$\Rightarrow \underbrace{(-\omega^2 + \mathbf{k}^2)}_{=0} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} = 0$$

Wieso heißt  $\phi(\mathbf{x}, t) = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$  ebene Welle?

$$\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t = k(\mathbf{n}\mathbf{x} - t)$$

wobei  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  und  $|\mathbf{n}| = 1$

$\mathbf{x}$  seien Orte konstanter Phase:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\mathbf{x} - t &= \text{const} \\ \mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(t + \text{const})) &= 0 \\ \mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) &= 0 \\ \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{n}(\text{const} + t) \end{aligned}$$

ist Ebenengleichung für  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_0$  (und somit die Ebene) bewegt sich in Richtung  $\mathbf{n}$  mit Geschwindigkeit 1

### 5.7.4 Inhomogene Wellengleichung

$$\left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{x}, t) = -4\pi \varrho(\mathbf{x}, t)$$

Vorzeichen sind analog zu Poissongleichung

retardierte Greenfunktion

(kann ja mehrere verschiedene Greenfunktionen für Wellengleichung wählen, aber diese hier ist besonders praktisch, weil die Laufzeit darin berücksichtigt ist, die die zu  $(\mathbf{x}, t)$  ausgesandte Welle (Störung) benötigt, an den Punkt  $(\mathbf{x}', t')$  zu kommen)

2 Bedingungen an Greenfunktion:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$$

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\partial}{\partial t} G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0 \quad \text{für } t < t'$$

**Behauptung.**

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - t + t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

*Beweis.* (Beweisskizze)

Betrachten Testfunktionen  $\gamma(\mathbf{x}), \tau(t) \in S$

zu zeigen:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_{\text{ret}}(\gamma(\mathbf{x})\tau(t)) = \gamma(\mathbf{0})\tau(0)$$

Mit Ableitungsformel für Distributionen erhalten wir sofort

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_{\text{ret}}(\gamma\tau) = G(\tau\Delta\gamma - \gamma\ddot{\tau})$$

benutzen  $G_{\text{ret}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(r-t)}{r}$

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_{\text{ret}}(\gamma\tau) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} (\tau(r)\Delta\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x})\tau''(r)) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^\infty dr r \left( \tau \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial r}) - \gamma(\mathbf{x})\tau''(r) \right) \\ &= \dots = \gamma(\mathbf{0})\tau(0) \end{aligned}$$

nach Umformungen analog zur Greenfunktion des Laplace Operators.

□

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - t + t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \varrho(\mathbf{x}', t') \\ \phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

Ladungsdichte des gesamten Raumes trägt bei, allerdings ist der Beitrag jedes Punktes von entsprechend früherer Zeit: endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (=1 in unseren Einheiten) der Störung ist berücksichtigt!

### 5.7.5 Allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

2. Greenscher Satz  $\int_0^\tau dt$ ,  $\tau > t'$

$$\int_0^\tau dt \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d^3x = \int_0^\tau dt \int_O (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \mathbf{n} d\sigma$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -4\pi G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, -t, \mathbf{x}', -t')$$

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\mathbf{x}, t) = -4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{für } t > t'$$

$\psi(\mathbf{x}, t)$  ... Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\mathbf{x}, t) = -4\pi \rho(\mathbf{x}, t)$$

Linke Seite:

$$4\pi \psi(\mathbf{x}', t') - 4\pi \int_0^\tau dt \int_V d^3x \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - t' + t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{p.I. bez. dt}}{+} \int_0^\tau dt \int_V d^3x \left[ \phi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t) \right]$$

$\tau > t'$  haben wir so gewählt

Kopien

Gemischte Ableitungsterme heben sich weg

$$\int_V d^3x \left[ \phi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) \right]_0^\tau$$

Beachte, dass  $\phi(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, \tau) = 0$ , weil  $\tau > t'$

$$= - \int_V d^3x \left[ \phi(\mathbf{x}, 0) \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) - \psi(\mathbf{x}, 0) \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \right]$$

Beschränken uns auf  $V = \mathbb{R}^3$

Allgemeine Anfangsbedingungen

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x})$$

Nehmen an, dass  $f(\mathbf{x})$  und  $h(\mathbf{x})$  für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  geeignet abfallen, sodass R.S. = 0!

Somit ergibt sich:

$$\psi(\mathbf{x}', t') = \int d^3x \frac{\rho(\mathbf{x}, t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \int d^3x \left[ \phi(\mathbf{x}, 0) h(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \right]$$

In den rechten Term setzen wir  $\phi$  und  $\frac{\partial}{\partial t} \phi$  ein;  $d^3x$ : Polarkoordinaten um Mittelpunkt  $\mathbf{x}' \Rightarrow dr$  mit  $\delta$ -Distr. integrieren!

$$\frac{1}{4\pi} \left[ \int_O \frac{h(\mathbf{x}) d\sigma}{t'} + \frac{\partial}{\partial t'} \int_O \frac{f(\mathbf{x}) d\sigma}{t'} \right]$$

$O \dots$  Kugelschale um  $\mathbf{x}'$ , Radius  $t'$

vertauschen der Übersichtlichkeit halber  $(\mathbf{x}, t) \leftrightarrow (\mathbf{x}', t')$  und erhalten *Poisson'sche Lösung* der Wellengleichung:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi} \left[ \int_O \frac{h(\mathbf{x}') d\sigma'}{t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_O \frac{f(\mathbf{x}') d\sigma'}{t} \right]$$

# Kapitel 6

## Lineare Operatoren im Hilbertraum

Funktionsräume sind unendlich-dimensionale Vektorräume. Was genau ist ein linearer Operator in einem Hilbertraum? Was heißt selbstadjungierter Operator?

### 6.1 Grundtatsachen der Lebesgue'schen Integrationstheorie

1. Approximation des Integrals durch Rechtecksummen, wo (anstatt wie beim Riemann-Integral die  $x$ -Achse) die  $y$ -Achse unterteilt wird.

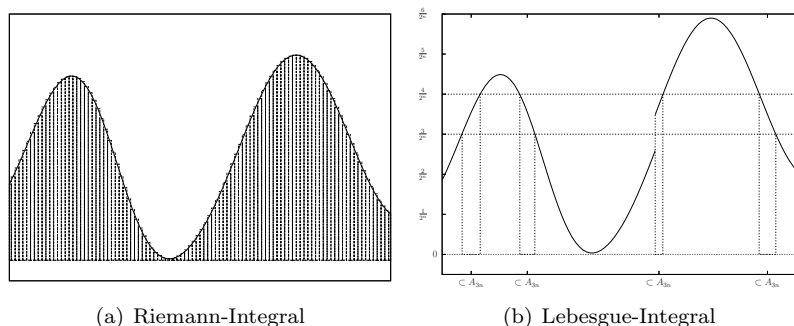


Abbildung 6.1: Unterschiedliche Arten von Integration (schematisch)

2. Suchen Verallgemeinerung des Begriffs der Länge  $\mu$  von allgemeinen Punktmengen.  
Zunächst:

$$\begin{aligned}\mu(I) &= b - a \\ \mu(\text{Punkt}) &= 0\end{aligned}$$

wo  $I$  offenes oder abgeschlossenes Intervall.

**Definition** ( $\sigma$ -Algebra). Gegeben sei eine Menge  $X$ .  $\mathcal{A}$  heißt  $\sigma$ -Algebra wenn  $X \in \mathcal{A}$ , sowie mit  $A \in \mathcal{A}$  auch  $A^C := X \setminus A \in \mathcal{A}$  ist, sowie mit  $A_{i=1,2,3,\dots} \in \mathcal{A}$  auch  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$  ist.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}X &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\A_1 &= \{1, 3, 5\} \\A_2 &= \{2, 4\} \\ \mathcal{A} &= \{\emptyset, X, A_1, A_2\}\end{aligned}$$

Hier ist  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -Algebra.

Folgerung:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$  ( $\emptyset = X^C$ )
2.  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$  ( $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$ )

**Definition** (Borelmenge). *Borelmengen* sind die Elemente der kleinsten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$ , die alle offenen Intervalle enthält.

Folgerung: auch jedes abgeschlossene Intervall ist Borelmenge, da  $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$

**Definition** (Nullmengen). Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert eine Überdeckung der Nullmenge  $N$  mit offenen Intervallen  $I_n$ , sodass  $N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \varepsilon$ .

**Beispiel.** Punkt ist Nullmenge

**Beispiel.** Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist Nullmenge (siehe Übungen)

**Definition** (Lebesgue-Maß). *Lebesgue'sches Maß*  $\mu$  einer Borel'schen Menge  $A \in \mathcal{B}$ :  $\mu(A) := \inf(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n))$ , wo Infimum über alle Überdeckungen von  $A$  mit offenen Intervallen zu bilden ist.

**Eigenschaften von  $\mu$**  Ohne Beweis, anschaulich klar:

- $0 \leq \mu(A)$   $A \in \mathcal{B}$
- Wenn  $A_i \in \mathcal{B}$  mit  $A_n \cap A_m = \emptyset \forall n \neq m$  gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

**Beispiel.**

$$\mu(\emptyset) = 0$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}X &= X \cup \emptyset \\ \emptyset &= X \cap \emptyset \\ \mu(X) &= \mu(X \cup \emptyset) = \mu(X) + \mu(\emptyset) \\ \mu(\emptyset) &= 0\end{aligned}$$

□

- $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
- Wenn  $A \subset B$ :  $\mu(A) \leq \mu(B)$
- $\mu(\text{Nullmenge}) = 0$  (Infimum ist 0)

**Beispiel.**

$$\mu([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 1$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} [0, 1] &= ([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \\ \mu([0, 1]) &= 1 = \mu([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) + \mu([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

und, da  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  (die Menge der rationalen Zahlen im Intervall  $[0, 1]$ ) als abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst eine Nullmenge ist:

$$\begin{aligned} \mu([0, 1] \cap \mathbb{Q}) &= 0 \\ \mu([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) &= 1 \end{aligned}$$

□

**Definition** (Messbarkeit). Die reellwertige Funktion  $f$  heißt *messbar*, wenn  $\{x \mid y_1 \leq f(x) \leq y_2\} \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  Borelmenge ist.

**Definition** (Lebesgue Integral). Für die positive, reellwertige, messbare Funktion  $f$  definieren wir

$$\begin{aligned} A_{kn} &= \left\{ x \mid \frac{k}{2^n} \leq f \leq \frac{k+1}{2^n} \right\} \\ A_{\infty} &= \{x \mid f(x) = \infty\} \end{aligned}$$

wo  $k, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\int f(x) \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu(A_{kn})$$

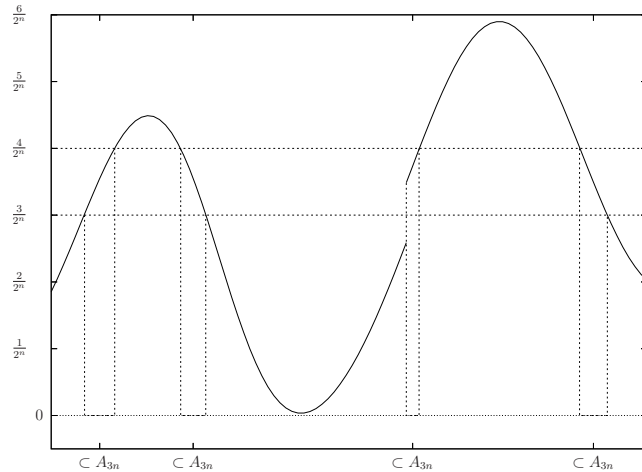


Abbildung 6.2: Lebesgue-Integration

*Bemerkung.* Wenn  $f(x)$  nicht positiv ist, gilt

$$\int f \, dx = \int f_+ \, dx - \int f_- \, dx$$

$$f_+ = \max(f, 0)$$

$$f_- = \max(-f, 0)$$

**Definition.** Wenn  $A_\infty$  eine Nullmenge ist, d.h.  $\mu(A_\infty) = 0$ :

$$\infty \cdot \mu(A_\infty) := 0$$

**Definition.**

$$\int_A f(x) \, dx = \int f(x) C_A(x) \, dx$$

$$\text{wo } C_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

**Definition.**  $f$  heißt *integrierbar auf  $A$* , wenn

$$\int_A f \, dx < \infty$$

**Definition.** Eine komplexwertige Funktion  $f$  heißt *quadratintegrabel auf  $A$* , wenn

$$\int_A f^*(x) f(x) \, dx < \infty$$

**Satz.** (ohne Beweis)

Sei  $f$  auf kompaktem Intervall messbar, beschränkt, reellwertig. Ist  $f$  Riemann-integrabel, so ist  $f$  auch Lebesgue-integrabel, und die Integrale stimmen überein.

**Satz.** (ohne Beweis)

Sei  $f$  messbar. Wenn das uneigentliche Riemann-Integral von  $|f|$  existiert, so existiert auch das Lebesgue'sche, und stimmt überein.

*Bemerkung.* Die Umkehrung gilt nicht: nicht jede Lebesgue-integrierbare Funktion ist auch Riemann-integrierbar!

**Beispiel.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$$

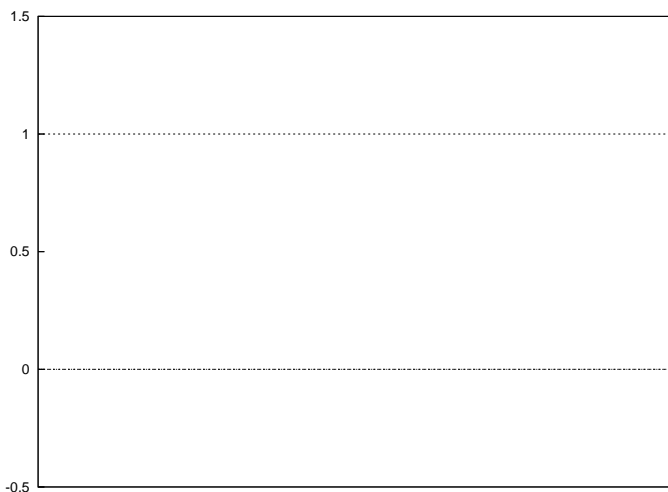


Abbildung 6.3:  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \cdot \mu([0, 1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Dabei ist  $\mu([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ , da  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  eine abzählbare Vereinigung von Punkten darstellt. Die Funktion  $f(x)$  ist also Lebesgue-integrierbar (aber nicht Riemann-integrierbar!).

Es folgen zwei wichtige Sätze:

**Satz (Monotone Konvergenz).** Seien  $f_n(x) \geq 0$  messbar, konvergiere  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x$  punktweise, seien  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \forall x, \forall n$ , und sei  $\int f_n(x) dx < c \forall n$ : Dann gilt

- $\int |f(x)| dx < \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f(x) - f_n(x)| dx = 0$

**Satz (Dominierte Konvergenz).** Konvergiere  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x$  punktweise und seien  $|f_n(x)| < G(x) \forall n$  wo  $\int |G(x)| dx < \infty$ . Dann gilt

- $\int |f(x)| dx < \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f(x) - f_n(x)| dx = 0$

**Beispiel.** Sei  $f \geq 0$  messbar. Aus  $\int f(x) dx = 0$  folgt  $f(x) = 0$  für alle  $x$  bis auf eine Nullmenge. Wir sagen:  $f(x) = 0$  fast überall.

*Beweis.* Zu zeigen für  $N = \{x | f(x) > 0\}$  bzw. für  $X_N = \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & x \notin N \end{cases}$  gilt:

$$\int X_N(x) dx = \mu(N) = 0$$

Sei  $A_n = \{x | f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ ,  $X_n = \begin{cases} 1 & x \in A_n \\ 0 & x \notin A_n \end{cases}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} X_n &\geq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(x) &= X_N(x) \\ X_{n+1}(x) &\geq X_n(x) \end{aligned}$$

Nun folgt aus

$$f(x) \geq \frac{1}{n} X_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in A_n \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{n} \\ 0 & x \notin A_n \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < \frac{1}{n} \end{cases}$$

dass

$$0 = \int f(x) dx \geq \frac{1}{n} \int X_n(x) dx \geq 0$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen laut Voraussetzung und das letzte Ungleichheitszeichen laut Definition von  $X_n$ ; damit schließen wir

$$\int X_n(x) dx = 0 < 1 \quad \forall n$$

Unter Benutzung des Satzes über monotone Konvergenz 6.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx |X_N(x) - X_n(x)| &= 0 \\ \Rightarrow \int dx |X_N(x)| &= 0 \end{aligned}$$

□

*Bemerkung.* (ohne Beweis)

Die zwei Konvergenzsätze bleiben richtig, wenn statt „Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x$ “ „Konvergenz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  fast überall“ gesetzt wird.

## 6.2 Hilberträume

Motivation: In Quantenmechanik verwendet man, dass jede beliebige Wellenfunktion als Überlagerung von Energieeigenfunktionen dargestellt werden kann. Mathematische Grundlage ist die Theorie der Hilberträume.

**Definition.** Ein Hilbertraum

1. ist Vektorraum
2. hat inneres Produkt
3. ist vollständig

### Vektorraum

$$\begin{aligned}
 f, g \in \mathcal{H} & \quad f + g \in \mathcal{H} \\
 \exists \mathbf{0} & \quad f + \mathbf{0} = f \\
 \forall f \exists (-f) & \quad f + (-f) = \mathbf{0} \\
 \forall \alpha \in \mathbb{C} & \quad \alpha f \in \mathcal{H}
 \end{aligned}$$

Außerdem gelten Assoziativ- und Distributivgesetze.

### Inneres Produkt

$$\exists \langle f | g \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
 \langle g | f \rangle &= \langle f | g \rangle^* \\
 \langle f | g + h \rangle &= \langle f | g \rangle + \langle f | h \rangle \\
 \langle f | \alpha g \rangle &= \alpha \langle f | g \rangle
 \end{aligned}$$

**Definition** (Norm).  $\|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle}$

Es soll gelten:  $\|f\| = 0 \Rightarrow f = \mathbf{0}$

*Bemerkung.* In jedem VR mit Skalarprodukt gilt

1.  $|\langle f | g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$  *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*
2.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  *Dreiecksungleichung*

**Vollständigkeit** Wenn  $f_n \in \mathcal{H}$  eine *Cauchy-Folge* ist, d. h. wenn  $\forall \epsilon > 0 \exists N$ , sodass  $\forall m, n \geq N$   $\|f_m - f_n\| \leq \epsilon$ ; dann  $\exists f \in \mathcal{H}$ , wir schreiben  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  in dem Sinne, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$

### Beispiele für Hilberträume:

**Beispiel** ( $\mathbb{C}^n$ ).  $x^i, y^i \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
 x &= (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{C}^n \\
 y &= (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{C}^n \\
 \langle x | y \rangle &:= \sum_{i=1}^n x^{i*} y^i
 \end{aligned}$$

*Bemerkung.*  $\mathbb{C}^n$  ist vollständig!

**Beispiel** ( $\ell^2(\mathbb{N})$ ). Elemente  $x$  sind Folgen komplexer Zahlen  $x^i \in \mathbb{C}$ , die „quadratsummierbar“ sind:

$$x = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2 < \infty\}$$

$$x + y := \{x^i + y^i\}$$

$$\alpha x := \{\alpha x^i\}$$

$$\langle x \mid y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x^{i*} y^i$$

( $\ell^2(\mathbb{N})$ ) besprechen wir hier nicht)

**Beispiel** ( $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ). Der  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  ist die Äquivalenzklasse von Lebesgue-quadratintegrierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

wo

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

$$\langle f \mid g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f^*(x) g(x) dx$$

Wir identifizieren  $f \sim g$ , wenn  $f(x) = g(x)$  fast überall.

**Beispiel** ( $\mathcal{L}^2([a, b])$ ).

$$\mathcal{L}^2([a, b]) = \left\{ f \mid \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

$$f \sim g \text{ wenn } f(x) = g(x) \text{ f. ü. in } [a, b]$$

Um zu zeigen, dass  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{L}^2([a, b])$  vollständige Funktionenräume sind, müssten wir zunächst die Sätze zur monotonen und dominierten Konvergenz geeignet verallgemeinern. Um einen möglichst einfachen Einblick in die Methoden der funktionalanalytischen Beweisführung zu gewinnen, beschränken wir uns aber hier auf den Vollständigkeitsbeweis von  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .

**Definition** ( $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ). Dies ist die Äquivalenzklasse von Lebesgue-absolutintegrierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

wo

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

und  $f \sim g$  wenn  $f(x) = g(x)$  f. ü.

**Definition** (1-Norm).

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f| \, dx$$

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  ist linearer, normierter, vollständiger Funktionsraum (so genannter *Banachraum*). Er ist kein Hilbertraum, da kein Skalarprodukt definiert ist.

*Vollständigkeit des  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  (Satz von Riesz-Fischer).* Sei  $f_n \in \mathcal{L}^1$  eine Cauchy-Folge, wir können Teilfolge auswählen (wir bezeichnen sie der Einfachheit halber genauso), sodass

$$\|f_n - f_{n+1}\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$$

Es seien

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^m |f_n(x) - f_{n+1}(x)|$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|$$

(Wir lassen für  $g(x)$  auch eventuell Wert  $\infty$  zu)

Da  $g_{m+1}(x) \geq g_m(x)$  und

$$\begin{aligned} \|g_m\|_1 &= \int |g_m| \, dx \leq \sum_{n=1}^m \int |f_n - f_{n+1}| \, dx = \sum_{n=1}^m \|f_n - f_{n+1}\|_1 \\ &\leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \, \forall m \end{aligned}$$

gilt der Satz über monotone Konvergenz, daher  $g \in L^1$ , also  $g(x) < \infty$  f. ü.

Damit konvergiert

$$f_m(x) = f_1(x) - \sum_{n=1}^{m-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x))$$

punktweise f. ü. gegen ein  $f(x)$ ! Weiters

$$|f_m(x)| \leq \left| f_1(x) - \sum_{n=1}^{m-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x)) \right| \leq |f_1| + g \in \mathcal{L}^1 \, \forall m$$

Mit dem Satz für dominierte Konvergenz

- $f \in \mathcal{L}^1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = 0$

ergibt dies die Vollständigkeit.

□

### 6.3 Basissysteme im Hilbertraum

**Definition.** Eine Teilmenge  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  heißt *dicht*, falls es für alle  $f \in \mathcal{H}$  und für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $m \in \mathcal{M}$  mit  $\|f - m\| < \varepsilon$  gibt.

**Definition.**  $\mathcal{H}$  heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Menge  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  gibt.

**Satz.** (ohne Beweis)

$$\mathbb{C}^n, \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \mathcal{L}^2([a, b]) \text{ sind separabel}$$

**Definition.**  $f, g \in \mathcal{H}$  heißen *orthogonal*, wenn  $\langle f | g \rangle = 0$

**Definition.**  $\{e_k\}, e_k \in \mathcal{H}, k = 1, 2, 3, \dots$  heißt *Orthonormalsystem* (ONS), wenn  $\langle e_k | e_j \rangle = \delta_{kj}$

**Definition.** Für  $f \in \mathcal{H}, \{e_k\}$  ein ONS, heißen  $\hat{f}_k := \langle e_k | f \rangle \in \mathbb{C}$  *Entwicklungskoeffizienten* von  $f$

**Satz** (Bessel'sche Ungleichung).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2 \quad (6.1)$$

*Beweis.* Analog zum beim Beweis der Bessel'schen Ungleichung im Falle der Fourierreihen betrachten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \sum_{k=1}^n e_k \hat{f}_k \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{k=1}^n e_k \hat{f}_k \left| f - \sum_{j=1}^n e_j \hat{f}_j \right. \right\rangle \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_k | e_j \rangle \hat{f}_k^* \hat{f}_j - \sum_{k=1}^n \hat{f}_k^* \langle e_k | f \rangle - \sum_{j=1}^n \langle f | e_j \rangle \hat{f}_j \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{kj} \hat{f}_k^* \hat{f}_j - \sum_{k=1}^n \hat{f}_k^* \hat{f}_k - \sum_{j=1}^n \hat{f}_j^* \hat{f}_j = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{f}_k|^2 \quad \forall n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2$$

□

So wie im endlich dimensionalen Vektorraum oft mit den Koordinaten eines Vektors in Bezug auf eine Basis gerechnet wird, verwendet man im Hilbertraum oft eine analoge Entwicklung nach einer *Orthonormalbasis*.

**Definition** (Orthonormalbasis).  $\{e_k\} \quad k = 1, 2, 3, \dots$  heißt *Orthonormalbasis* (ONB, oder "vollständiges" Orthonormalsystem) eines separablen Hilbertraumes  $\mathcal{H}$ , wenn  $\{e_k\}$  ONS ist und aus

$$\langle f | e_k \rangle = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

folgt, dass  $f = \mathbf{0}$  ist.

**Satz.** Sei  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum und die  $\{e_k\}$  eine ONB; sei  $f \in \mathcal{H}$ . Dann gilt:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n e_k \hat{f}_k \right\| = 0 \quad (\text{im } \mathcal{L}^2 \text{ bedeutet dies Konvergenz im quadratischen Mittel})$$

$$2. \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \quad \text{Parseval'sche Gleichung}$$

*Beweis.* 1. Sei  $f_n = \sum_{k=1}^n e_k \hat{f}_k$

Wählen  $n > m$ , dann gilt für geeignet große  $n, m$  (wegen Bessel'scher Ungleichung (6.1) ist  $\hat{f}_k$  Nullfolge)

$$\|f_n - f_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n e_k \hat{f}_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\hat{f}_k|^2 \rightarrow 0$$

Also ist  $\{f_n\}$  Cauchy-Folge und konvergiert wegen Vollständigkeit von  $\mathcal{H}$  gegen ein  $\bar{f} \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \bar{f} - \sum_{j=1}^n e_j \hat{f}_j \right\| = 0$$

Auf Grund der Stetigkeit des Skalarprodukts (o. Bew.) gilt sodann für jedes  $g \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \bar{f} - \sum_{j=1}^n e_j \hat{f}_j \middle| g \right\rangle = 0$$

und insbesondere

$$\langle f - \bar{f} | e_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle f - \sum_{j=1}^n e_j \hat{f}_j \middle| e_k \right\rangle = \underbrace{\langle f | e_k \rangle}_{\hat{f}_k^*} - \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left\langle \sum_{j=1}^n e_j \hat{f}_j \middle| e_k \right\rangle}_{\hat{f}_k^*} = \hat{f}_k^* - \hat{f}_k^* = 0$$

Also

$$\langle f - \bar{f} | e_k \rangle = 0 \quad \implies f - \bar{f} = 0$$

weil  $\{e_k\}$  ONB ist (für  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2$  bedeutet dies  $f(x) = \bar{f}(x)$  f. ü.). Damit schlussendlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=1}^n e_j \hat{f}_j \right\| = 0$$

□

*Beweis.* 2. Bei der Herleitung der Bessel'schen Ungleichung (6.1) hatten wir

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n e_k \hat{f}_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\hat{f}_k|^2$$

gefunden; nun wenden wir  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  an:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n e_k \hat{f}_k \right\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \\ &= 0 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \end{aligned}$$

□

**Beispiel** (Fourierreihenentwicklung). Sei  $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ , in diesem Fall ist eine ONB gegeben durch (ohne Beweis)

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

somit also

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{+ikx} f(x) dx$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-n}^n e_j \hat{f}_j \right\| = 0$$

Konvergenz der Fourierreihe für ein  $f \in \mathcal{L}^2$  ist im Sinne des *quadratischen Mittels* gegeben.

## 6.4 Lineare Operatoren in endlich-dimensionalen Räumen

Sei  $V$  unitärer Raum (Vektorraum über  $\mathbb{C}$  mit Skalarprodukt), sei  $\dim V = n$

**Definition.**  $A : V \rightarrow V$  heißt linearer Operator, falls:

$$\begin{aligned} A(\alpha x) &= \alpha A(x) \quad \forall x \in V, \quad \alpha \in \mathbb{C} \\ A(x + y) &= A(x) + A(y) \quad \forall x, y \in V \end{aligned}$$

Wenn Basis  $\{b_i\}$  des Vektorraums gegeben ist, lässt sich dem Operator  $A$  eine  $n \times n$  Matrix  $M_A$  zuordnen

$$\begin{aligned} Ab_j &= \sum_{k=1}^n a_{kj} b_k \\ (M_A)_{ik} &= a_{ik} \end{aligned}$$

wir haben  $x = \sum_{j=1}^n x_j b_j$  (ab sofort verwenden wir die Summenkonvention!) sowie für

$$\begin{aligned} y &= Ax = Ax_j b_j = x_j Ab_j = x_j a_{kj} b_k = x_k a_{jk} b_j \\ y_j &= a_{jk} x_k \end{aligned}$$

aufgrund der Linearität und durch Umbenennen der Indizes.

**Definition** (adjungierter Operator). Sei  $x, y \in V$ ,  $A$  linearer Operator

$$\langle y | Ax \rangle = \langle A^\dagger y | x \rangle$$

Es gilt

$$M_{A^\dagger} = (M_A)^\dagger$$

$\dagger \dots$  adjungiert (transponiert und komplex konjugiert)

$$(M_{A^\dagger})_{ik} = a_{ki}^*$$

$A$  heißt *selbstadjungiert* wenn  $A = A^\dagger \Leftrightarrow M$  ist *hermitisch* ( $M_A = (M_A)^\dagger$ )

### 6.4.1 Eigenwerte, Eigenvektoren

**Definition.**  $\lambda$  heißt Eigenwert (EW) und  $x \neq \mathbf{0}$  heißt Eigenvektor (EV) von  $A$ , wenn

$$Ax = \lambda x$$

bzw.:

$$(A - \lambda \mathbf{1})x = \mathbf{0}$$

Für die Matrix-Darstellung folgt:

$$(M_A - \lambda \mathbf{1}_{n \times n})x = \mathbf{0}$$

Damit  $x \neq \mathbf{0}$  Lösung des homogenen GLS ist, muss gelten:

$$\det(M_A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

Das ist eine algebraische Gleichung  $n$ -ter Ordnung in  $\lambda$

**Satz.** Sei

$$A = A^\dagger$$

Dann gilt:

- EW sind reell
- EV zu verschiedenen EW sind orthogonal

EW reell.

$$\begin{aligned}\langle x|Ax \rangle &= \langle x|\lambda x \rangle = \lambda \langle x|x \rangle \\ &= \langle Ax|x \rangle = \langle \lambda x|x \rangle = \lambda^* \langle x|x \rangle\end{aligned}$$

$$(\lambda - \lambda^*) \langle x|x \rangle = 0$$

und, da  $\langle x|x \rangle \neq 0$

$$\lambda = \lambda^*$$

□

EV orthogonal. Sei  $Ax = \lambda x$ ,  $Ay = \mu y$ ,  $\lambda \neq \mu$

$$\begin{aligned}\langle x|Ay \rangle &= \langle x|\mu y \rangle = \mu \langle x|y \rangle \\ &= \langle Ax|y \rangle = \langle \lambda x|y \rangle = \lambda \langle x|y \rangle\end{aligned}$$

$$(\lambda - \mu) \langle x|y \rangle = 0$$

und da laut Voraussetzung  $\lambda - \mu \neq 0$

$$\langle x|y \rangle = 0$$

□

**Beispiel** (Projektor).

$$P^\dagger = P \qquad P^2 = P$$

EW eines Projektors  $P$  sind 0, 1

$$\begin{aligned} Px &= \lambda x \\ Px &= P^2x = P\lambda x = \lambda Px = \lambda^2x \end{aligned}$$

$$(\lambda - \lambda^2)x = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

**Satz** (Spektralsatz). Sei  $A$  ein selbstadjungierter Operator in einem  $n$ -dimensionalen unitären Raum  $V$ . Dann gibt es eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren  $e_{i=1, \dots, n}$  von  $A$  und

$$M_A = S^\dagger \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S$$

wo  $S$  jene unitäre Matrix mit  $S^\dagger S = \mathbf{1}$  ist, die aus den orthonormalen EV  $e_i$  gebildet wird:

$$S = (e_1, \dots, e_n)$$

*Bemerkung.* Wir bezeichnen mit  $\lambda_\alpha$  die unterschiedlichen EW, die  $n_\alpha$ -fach entartet sein können (d. h.  $n_\alpha$ -fache Nullstelle von  $\det(M_A - \lambda \mathbf{1}) = 0$  sind). Es gibt zu jedem  $\lambda_\alpha$  genau  $n_\alpha$  linear unabhängige Eigenvektoren. Man muss noch das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden, um  $n_\alpha$  orthonormale EV  $e_{i=1, \dots, n_\alpha}^{(\alpha)}$  zu erhalten.

*Bemerkung.* Der Spektralsatz gilt auch für „normale“ Operatoren, das heißt für solche  $A$ , für die  $A^\dagger A = AA^\dagger$  gilt.

**Korollar** (Spektraldarstellung).

$$M_A = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k e_k^\dagger$$

( $e_k$  ist in Matrixschreibweise eine 1-spaltige,  $e_k^\dagger$  eine 1-zeilige Matrix)  
oder insbesondere

$$M_A = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha P_\alpha$$

wo

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} e_i^{(\alpha)} e_i^{(\alpha)\dagger}$$

Projektoren auf  $V_\alpha = \{x \in V \mid Ax = \lambda_\alpha x\}$ ,  $\dim V_\alpha = n_\alpha$  sind, für die weiters gilt:

$$\sum_{\alpha=1}^k P_\alpha = \mathbf{1}$$

$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha$$

*Bemerkung.* Das Korollar folgt aus

$$(M_A)_{lm} = \sum_{k,j=1}^n (S)_{lk} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}_{kj} (S^\dagger)_{jm}$$

$$(S)_{lk} = (e_1, \dots, e_n)_{lk} = (e_k)_l$$

$$(S^\dagger)_{jm} = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ \vdots \\ e_n^\dagger \end{pmatrix}_{jm} = (e_j^*)_m$$

$$(M_A)_{lm} = \sum_{k,j=1}^n (e_k)_l \lambda_k \delta_{kj} (e_j^*)_m$$

$$M_A = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k e_k^\dagger$$

**Beispiel.**

$$M_A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = (M_A)^\dagger$$

$$\det(M_A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 11 - \lambda & 8 \\ 8 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda - 75 = 0$$

$$\lambda_1 = 15 \qquad \lambda_2 = -5$$

$\lambda_1 = 15$  einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  der normierte EV ist  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit  $\lambda_2 = -5$  folgt  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und schließlich

$$P_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1, 2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spektraldarstellung:

$$M_A = 15P_1 - 5P_2 = 15 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Man erkennt durch Einsetzen: es stimmt!

**Beispiel.** *Normale* (nicht aber selbstadjungierte) Matrix  $M_A$ :

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq (M_A)^\dagger$$

$$M_A M_A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_A^\dagger M_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i$$

$\lambda_1 = 1 + 2i$  einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ein EV ist z. B.: } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Mit  $\lambda_2 = 1 - 2i$  folgt  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  und damit

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1 \ -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$
$$S^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (1 \ i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Spektraldarstellung:

$$M_A = (1 + 2i)P_1 + (1 - 2i)P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6.5 Lineare beschränkte Operatoren im Hilbertraum

**Definition.** Ein Operator  $A : \mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H} \rightarrow W_A \subseteq \mathcal{H}$  heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl  $C > 0$  gibt, sodass

$$\|Af\| \leq C \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{D}_A$$

Die kleinste der Beschränktheits-Zahlen  $C$ , heißt *Norm*  $\|A\|$  des Operators  $A$

$$\|A\| = \inf_C \{ \|Af\| \leq C \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{D}_A \}$$

Es gilt auch

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathcal{D}_A, \|f\|=1} \|Af\| = \sup_{f \in \mathcal{D}_A, \|f\| \leq 1} \|Af\| = \sup_{f \in \mathcal{D}_A, f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|}$$

und

$$\|Af\| \leq \|A\| \|f\|$$

**Beispiel.** Multiplikationsoperator  $x$  in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$(Af)(x) = xf(x)$$

Wir wählen  $\mathcal{D}_A = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \mid xf \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ; damit ist  $x$  in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  nicht beschränkt.

Wir wählen nun  $\phi_a(x)$

$$\phi_a(x) = \begin{cases} 1 & a - \frac{1}{2} \leq x \leq a + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\|\phi_a\|^2 = \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} dx = a + \frac{1}{2} - (a - \frac{1}{2}) = 1$$

also

$$\phi_a \in \mathcal{D}_A \quad \forall a$$

Aber

$$\|x\phi_a\|^2 = \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} = a^2 \left(1 + \frac{1}{12a^2}\right) \rightarrow \infty$$

**Beispiel.** Multiplikationsoperator  $x$  in  $\mathcal{L}^2([0, 1])$  ist beschränkt.

**Beispiel** (Differentiationsoperator  $i \frac{d}{dx}$  in  $\mathcal{L}^2([0, a])$ ).

$$(Af)(x) = f'(x)$$

Wählen

$$\mathcal{D}_A = \{f \in \mathcal{L}^2([0, a]) \mid f' \in \mathcal{L}^2([0, a])\}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{2\pi i n x / a} \in \mathcal{D}_A \quad \forall n$$

Es ist  $i\frac{d}{dx}$  nicht beschränkt:

$$\left\| \frac{d}{dx} f_n \right\| = \frac{2\pi}{a} n \rightarrow \infty$$

**Definition.** Ein linearer, auf ganz  $\mathcal{H}$  definierter Operator heißt *kompakt*, wenn er jede beschränkte Menge aus  $\mathcal{H}$  in eine kompakte Menge abbildet.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$  heißt *beschränkt*, wenn  $\exists m \in \mathcal{M}, c \in \mathbb{R}^+$ , sodass  $\|m - f\| \leq c \forall f \in \mathcal{M}$
- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$  heißt *kompakt*, wenn jede unendliche Teilmenge aus  $\mathcal{M}$  eine Cauchy-Folge enthält.

*Bemerkung.* Ein kompakter Operator ist beschränkt.

**Definition.** Ein linearer, auf ganz  $\mathcal{H}$  definierter, beschränkter Operator  $A$  heißt *selbstadjungiert*, wenn für alle  $f, g \in \mathcal{H}$

$$\langle g | Af \rangle = \langle Ag | f \rangle$$

**Satz** (Spektralsatz für lineare, kompakte, auf ganz  $\mathcal{H}$  definierte, selbstadjungierte Operatoren). *Es gibt höchstens abzählbar viele, rein reelle EW  $\lambda$ , mit*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \rightarrow 0$$

*Alle jene  $\lambda_i$ , wo  $\lambda_i \neq 0$ , sind höchstens endlichfach entartet,  $\lambda = 0$  kann eventuell Häufungspunkt sein. Es gilt, ähnlich wie in endlich-dimensionalen Vektorräumen, für alle  $f \in \mathcal{H}$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| Af - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha P_\alpha f \right\| = 0$$

**Satz** (Spektralsatz für lineare, beschränkte, auf ganz  $\mathcal{H}$  definierte, selbstadjungierte Operatoren). *Benötigen Verallgemeinerung der Summe  $\sum_\alpha \lambda_\alpha P_\alpha$  zu Integral  $\int \lambda dE_\lambda$*

$$P_\alpha \hat{=} dE_\alpha \approx E_\alpha - E_{\alpha-1}$$

$$\sum_{\beta \leq \alpha} P_\beta \hat{=} E_\alpha$$

wobei  $E_\alpha$  Projektor auf den Eigenraum aller  $\lambda_\beta \leq \lambda_\alpha$  ist.

**Satz.** *Jedem linearen, auf ganz  $\mathcal{H}$  definierten, beschränkten, selbstadjungierten Operator kann eine Spektralschar  $E_\lambda$  zugeordnet werden (da  $A$  beschränkt ist  $M_1 \leq \lambda \leq M_2$ ), wo*

$$E_\alpha \text{ ist Projektor}$$

$$E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda, \lambda \leq \mu$$

$$E_{\lambda+0} = E_\lambda \text{ stetig von rechts}$$

$$E_\lambda = \begin{cases} 0 & \lambda < M_1 \\ 1 & \lambda > M_2 \end{cases}$$

sodass

$$\left\| Af - \int \lambda dE_\lambda f \right\| = 0$$

Verallgemeinerung des Begriffs Eigenwert

**Definition** (Spektrum  $\sigma(A)$ ).

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \text{ hat kein beschränktes Inverses}\}$$

*Bemerkung.* Spektrum umfasst die Eigenwerte, denn  $\nexists(A - \lambda)^{-1}$ . Zu  $\sigma(A)$  gehört noch mehr, z. B. jene  $\lambda$ , wo  $\exists(A - \lambda)^{-1}$ , aber nicht beschränkt ist.

**Definition** (Resolventenmenge  $\rho(A)$ ).

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda)^{-1} \exists \text{ und ist beschränkt}\}$$

## 6.6 Lineare unbeschränkte Operatoren

Typischerweise  $A$  nicht auf ganz  $\mathcal{H}$  definiert, sondern auf  $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{H}$  dicht!

**Definition** (Erweiterung eines linearen Operators).  $B$  heißt *Erweiterung* von  $A$  ( $B \supseteq A$ ) wenn  $\mathcal{D}_B \supseteq \mathcal{D}_A$ ,  $B|_{\mathcal{D}_A} = A$

**Beispiel** ( $\mathcal{L}^2([0, 1])$ ).

$$A = i \frac{d}{dx} \Big|_{\mathcal{D}_A} \quad \mathcal{D}_A = \{f \in \mathcal{L}^2([0, 1]) \mid f' \in \mathcal{L}^2([0, 1]), f(0) = f(1) = 0\} \quad (6.2)$$

$$B = i \frac{d}{dx} \Big|_{\mathcal{D}_B} \quad \mathcal{D}_B = \{f \in \mathcal{L}^2([0, 1]) \mid f' \in \mathcal{L}^2([0, 1]), f(0) = f(1)\} \quad (6.3)$$

und damit

$$B \supseteq A$$

**Definition** (Adjungierter Operator  $A^\dagger$ ). Ein linearen, dicht auf  $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H}$  def. Operator  $A$  kann man den adjungierten Operator  $A^\dagger$  auf  $\mathcal{D}_{A^\dagger} \subseteq \mathcal{H}$  zuordnen, mittels

$$\langle A^\dagger g \mid f \rangle = \langle g \mid Af \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}_A, g \in \mathcal{D}_{A^\dagger}$$

*Bemerkung.* • In  $\mathcal{D}_{A^\dagger}$  sollen *alle möglichen*  $g$  enthalten sein.

•  $\mathcal{D}_{A^\dagger}$  muss nicht dicht in  $\mathcal{H}$  sein.

**Definition** (Symmetrischer Operator). Ein linearer, dicht auf  $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H}$  definierter Operator  $A$  heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle Ag \mid f \rangle = \langle g \mid Af \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}_A$$

*Bemerkung.* Für symmetrische Operatoren gilt offensichtlich  $\mathcal{D}_{A^\dagger} \supseteq \mathcal{D}_A$ , also  $A^\dagger \supseteq A$

**Definition** (Selbstadjungierter Operator). Ein linearer, dicht auf  $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{H}$  definierter Operator  $A$  heißt *selbstadjungiert*, wenn er symmetrisch ist und wenn  $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^\dagger}$  gilt.

*Bemerkung.* Oft können symmetrische Operatoren durch Vergrößerung von  $\mathcal{D}_A$  (dies bewirkt Verkleinerung von  $\mathcal{D}_{A^\dagger}$ ) zu selbstadjungierten Operatoren erweitert werden.

**Beispiel.** Vorige zwei Differentialoperatoren (6.2, 6.3) auf  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ .

$A$  ist symmetrisch, nicht selbstadjungiert:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g^* i f' dx &= i g^* f|_0^1 + \int_0^1 (i g')^* f dx \\ &= i g^*(1) \underbrace{f(1)}_{=0} - i g^*(0) \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^1 (i g')^* f dx \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{A^\dagger} = \{g \in \mathcal{L}^2([0, 1]) \mid g' \in \mathcal{L}^2([0, 1])\} \supseteq \mathcal{D}_A$$

$B$  ist selbstadjungiert

$$\int_0^1 g^* i f' dx = i (g^*(1) - g^*(0)) f(0) + \int_0^1 (i g')^* f dx$$

Der linke Term verschwindet nur, wenn auch  $g(0) = g(1) \Rightarrow \mathcal{D}_{B^\dagger} = \mathcal{D}_B$

# Kapitel 7

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse

Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsdichte, Markov-Prozess („Zukunft hängt von der Vergangenheit nur über die Gegenwart ab.“)

### 7.1 Einführung (Brownsche Bewegung)

#### 7.1.1 Eindimensionale Irrfahrt

Teilchen bewegt sich auf x-Achse: wir werfen pro Zeiteinheit  $\tau$  eine Münze:

- bei Zahl: Sprung der Länge  $l$  nach rechts
- bei Wappen: Sprung der Länge  $l$  nach links

Gesucht: (bedingte) Wahrscheinlichkeit  $P(m, N | 0, 0)$ , dass Teilchen nach  $N$  Sprüngen (bzw. zur Zeit  $t = N\tau$ ) an der Stelle  $x = ml$ , wenn es anfänglich ( $t = 0$ ) bei  $x = 0$  war.

##### 7.1.1.1 Kombinatorische Herleitung

Wir bezeichnen mit  $P(m, N | 0, 0)$  die Wahrscheinlichkeit, von  $x = 0$  bei  $t = 0$  aus  $n_R$  Sprünge nach rechts und  $n_L = N - n_R$  Sprünge nach links zu machen.

Die Anzahl der Möglichkeiten,  $n_R$  Sprünge nach rechts und  $n_L$  Sprünge nach links zu machen, ist

$$P(m, N | 0, 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_R} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_L} \cdot \frac{N!}{n_R!n_L!} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \binom{N}{n_R}$$

mit

$$\begin{aligned} N &= n_R + n_L & m &= n_R - n_L \\ n_R &= \frac{N + m}{2} & m &= 2n_R - N \end{aligned}$$

$$P(m, N | 0, 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \binom{N}{\frac{N+m}{2}}, \quad m = -N, -N+1, \dots, N$$

*Bemerkung.* Erhaltung der Wahrscheinlichkeit ist erfüllt (irgendwo ist das Teilchen nach  $N$  Sprüngen sicher):

$$\sum_{m=-N}^N P(m, N | 0, 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 1$$

da  $\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N$ .

Es gilt weiters die *Chapman-Kolmogorow-Gleichung*:

$$P(m, N+1 | 0, 0) = \frac{1}{2} [P(m+1, N | 0, 0) + P(m-1, N | 0, 0)] \quad (7.1)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} P(m, N+1 | 0, 0) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \binom{N+1}{\frac{(N+1)+m}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^N \binom{N}{\frac{N+m+1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^N \binom{N}{\frac{N+m-1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} [P(m+1, N | 0, 0) + P(m-1, N | 0, 0)] \end{aligned}$$

□

### 7.1.1.2 Einsteins Herleitung

Wir betrachten  $P(m, N+1 | 0, 0)$  als die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, nach  $N+1$  Sprüngen zu  $x$  zu gelangen. Das ist äquivalent zur Summe über die Produkte aus

- der (bedingten) Wahrscheinlichkeit, nach  $N$  Sprüngen zu einem Nachbarn von  $x$  zu gelangen,  $P(m \pm 1, N | 0, 0)$  und
- der (bedingten) Wahrscheinlichkeit, von einem Nachbarn von  $x$  nach  $x$  zu gelangen,  $\frac{1}{2}$ :

$$P(m, N+1 | 0, 0) = \frac{1}{2} [P(m+1, N | 0, 0) + P(m-1, N | 0, 0)]$$

## 7.1.2 Eindimensionale Brown'sche Bewegung

### 7.1.2.1 Historische Entwicklung

Experiment:

1785 Jean Ingenhousz: Kohlestaub auf Alkohol lässt höchst unregelmäßige Bewegung zu erkennen.

1827 Robert Brown: Unregelmäßige Pollenbewegungen in Flüssigkeiten

Theorie:

1905 Albert Einstein

1906 Sinduckowski

1908 P. Langevin

### 7.1.2.2 Theorie

Wir betrachten nun den Kontinuumsimes  $\tau \rightarrow 0, l \rightarrow 0$  heuristisch, wo

$$D := \frac{l^2}{2\tau} \dots \text{Diffusionskonstante}$$

festgehalten wird.

*Bemerkung.* In diesem Grenzfall gibt es keine Geschwindigkeit des Teilchens, da  $\frac{l}{\tau} \rightarrow \infty$

Es sind

$$\tau = \frac{l^2}{2D} \rightarrow 0 \Rightarrow l \rightarrow 0$$

$$m = \frac{x}{l}$$

in  $P(m, N|0, 0)$ ;  $N$ ...Schrittzahl

**Definition** (Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte).

$$p(x, t|0, 0)\Delta x := \sum_{m'} P(m', N|0, 0) \simeq \frac{\Delta x}{l} P(m, N|0, 0)$$

wo  $x = ml, t = N\tau, \Delta x \gg l$ , aber dennoch so klein, dass  $P$  innerhalb von  $\Delta x$  konstant ist.

$$ml - \frac{\Delta x}{2} \leq m'l \leq ml + \frac{\Delta x}{2}$$

$$p(x, t|0, 0) \simeq \frac{1}{l} P(m, N|0, 0)$$

Wir betrachten also  $N = \frac{t}{\tau} = \frac{t2D}{l^2}$  und

$$p(x, t|0, 0) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} P\left(\frac{x}{l}, \frac{t2D}{l^2} | 0, 0\right)$$

mit der Stirling-Formel  $k! \simeq \sqrt{2\pi k} \frac{k^k}{e^k}$

$$p(x, t|0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

ist Lösung der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t|0, 0) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t|0, 0)$$

$$p(x, 0|0, 0) = \delta(x)$$

Die Diffusionsgleichung (identisch mit der Wärmeleitungsgleichung, Abschnitt 5.5) entsteht aus

$$\frac{p(x, t + \tau|0, 0) - p(x, t|0, 0)}{\tau}$$

unter Verwendung der Chapman-Kolmogorow-Gleichung (7.1)

$$p(x, t + \tau | 0, 0) = \frac{1}{2} [p(x + l, t | 0, 0) + p(x - l, t | 0, 0)]$$

$$\frac{p(x, t + \tau | 0, 0) - p(x, t | 0, 0)}{\tau} = \frac{l^2}{2\tau} \frac{p(x + l, t | 0, 0) - 2p(x, t | 0, 0) + p(x - l, t | 0, 0)}{l^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

**Definition** ((Bedingter) Erwartungswert des Ortes).

$$\langle x_t \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} dx x p(x, t | 0, 0) = 0$$

$$\langle x_t^2 \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 p(x, t | 0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \sqrt{4\pi Dt} \frac{1}{2} 4Dt = 2Dt$$

Da  $p(x, t | 0, 0)$  gerade in  $x$  ist und  $x$  ungerade, verschwindet das Integral und damit  $\langle x_t \rangle$ . Der Mittelwert des Quadrats des Abstandes des Teilchens vom Startpunkt verschwindet nicht; er nimmt *linear* in der Zeit zu! („*Diffusion*“)

### 7.1.3 Langevins Beschreibung der Brown'schen Bewegung

Langevin: Auf das Brown'sche Teilchen wirkt eine konventionelle Reibungskraft proportional zu seiner Geschwindigkeit und eine „fluktuierende“ Kraft  $\eta(t)$ , die die phänomenologische Beschreibung der zahlreichen Zusammenstöße des Teilchens mit den Flüssigkeitsmolekülen darstellt. Die Bewegungsgleichung (*Langevin-Gleichung*) lautet also

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -a \frac{dx(t)}{dt} + \eta(t) \quad (7.2)$$

wobei  $a = 12\pi jr$  mit der Zähigkeit  $j$  und dem Teilchenradius  $r$ . (Mathematisch exaktere Formulierung folgt später). Multiplikation mit  $x$  und Anwendung der Produktregel

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dx^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 2x \frac{dx}{dt} \right) = 2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2x \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ergibt

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot x = -a \frac{dx(t)}{dt} \cdot x + \eta(t) \cdot x$$

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{a}{2} \frac{dx^2}{dt} + \eta x$$

Wir bilden nun den Mittelwert  $\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2}$ . Dazu verwenden wir aus der statistischen Mechanik für die mittlere kinetische Energie  $\left\langle \left\langle \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle \right\rangle = \frac{1}{2} kT$  (mit der absoluten Temperatur  $T$  und der Boltzmann-Konstante  $k$ ); des weiteren, „wegen der Unregelmäßigkeit von  $\eta$ “:  $\langle \langle \eta x \rangle \rangle = 0$ , und, für ein Brown'sches

Teilchen,  $\frac{a}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \text{const} \cdot e^{-\frac{a}{m}t} \simeq 0$

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - kT &= -\frac{a}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} \\ \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} &= \frac{2kT}{m} + \text{const} \cdot e^{-\frac{a}{m}t} = \frac{2kT}{m} \\ \langle x^2 \rangle &\simeq 2 \frac{kT}{m} t = 2Dt \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Die mathematisch wohldefinierte Formulierung für die Ableitung der Langevin-Gleichung erfolgte erst 1951 (also ca. 40 Jahre später) in Form des stochastischen Differentialkalküls von K. Itô; mehr dazu später.

## 7.2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiment heißen *Elementarereignisse*  $\omega$ , die Menge aller Elementarereignisse *Stichprobenmenge*  $\Omega$

**Beispiel.** Einmal würfeln:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

*Beobachtbares* oder *interessantes* Ereignis  $A$ : ist eine Untermenge von  $\Omega$ ,  $A \subset \Omega$

**Beispiel.** Gewürfelte Augenzahl ist gerade:  $A = \{2, 4, 6\}$

Sei  $\mathcal{A}$  die Menge aller beobachtbaren oder interessanten Ereignisse

**Definition** (Wahrscheinlichkeit). Sei  $\Omega$  die Stichprobenmenge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra

$$P : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$$

heißt *Wahrscheinlichkeit*, wenn

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$  für alle  $A \in \mathcal{A}$
2.  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$
3.  $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$  falls  $A_n \cap A_m = \emptyset$  ( $n \neq m$ ),  $\forall A_n \in \mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*

**Definition** (Zufallsvariable). Sei der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  gegeben; eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \omega \rightarrow X(\omega)$$

ist eine *messbare* Abbildung von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel.** Nummer des Rings der Zielscheibe, in dem der Pfeil steckt.

**Definition** (Mehrdimensionale Zufallsvariable). Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  definierte Zufallsvariable

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n : \omega \rightarrow (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

**Beispiel.**  $\Omega = \{\text{Bevölkerung einer Stadt}\}$

$X_1 \dots$  Größe

$X_2 \dots$  Gewicht

$X_3 \dots$  Alter

**Definition** (Stetige Zufallsvariable).  $X$  heißt *stetige Zufallsvariable*, wenn es eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x)$  gibt, sodass

$$P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) < t\}) = P(X < t) = \int_{-\infty}^t p(x) dx$$

*Bemerkung.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) < t\}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

(irgendeinen Wert hat  $X$ )

*Bemerkung.*

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx$$

da, gemäß den Axiomen von  $P$ ,

$$P(X < a) + P(a \leq x \leq b) = P(x < b)$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(x < b) - P(X < a)$$

Mehrdimensionale, stetige Zufallsvariable

$$P(\{\omega \in \Omega | (X_1(\omega), X_n(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B\}) = P(X \in B) = \int_B p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

**Definition** (Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable  $X$ ).

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$$

beziehungsweise, falls  $Y = g(X)$ ,

$$\langle Y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x) dx$$

### 7.3 Stochastische Prozesse

**Definition** (Stochastischer Prozess). Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ . Wenn für jedes  $t \in I$  eine Zufallsvariable  $X_t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  existiert, dann heißt  $\{X_t\}_{t \in I}$  *stochastischer Prozess*.

**Beispiel.** Mein Kapital beim Pokerspiel als Funktion der Zeit.

Wir betrachten stochastische Prozesse, die durch Vorgabe *einer Familie von*  $p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)$  definiert sind. Dabei ist  $p$  die Dichte zur Wahrscheinlichkeit, dass  $x_1$  zu  $t_1$ ,  $x_2$  zu  $t_2, \dots$  angenommen wird, wobei folgende Eigenschaften der  $p$  gefordert werden:

1.  $p \geq 0$
2.  $p$  bleiben unverändert, wenn  $(x_k, t_k) \leftrightarrow (x_j, t_j)$  ausgetauscht werden

3.  $\int p(y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1}; y_n, t_n) dy_n = p(y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1})$  (Verträglichkeitsbedingung)
4.  $\int p(y, t) dy = 1$

**Satz** (Fundamentalsatz von Kolmogoroff (o. Bew.)). *Zu jeder Familie von  $p$  mit obigen Eigenschaften existiert ein Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und ein entsprechender stochastischen Prozess  $\{X_t\}_{t \in I}$ .*

*Bemerkung.* Für festes  $t_0$  ist  $X_{t_0}(\omega)$  eine Abbildung von  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}: \omega \rightarrow X_{t_0}(\omega)$ , eine Zufallsvariable.

Für festes  $\omega_0$  ist  $X_t(\omega_0)$  eine Abb.  $I \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow X_t(\omega_0)$ , ein stochastischer Prozess, genannt *Pfad* oder *Realisierung* des stoch. Prozesses.

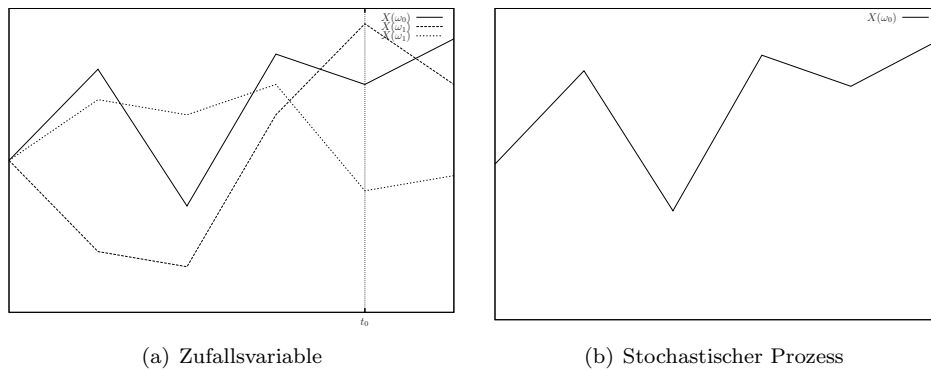


Abbildung 7.1: Zufallsvariable und stochastischer Prozess

**Definition** (bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte).

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots \mid y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots)}{p(y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots)}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte, dass  $x_1$  zu  $t_1$ ,  $x_2$  zu  $t_2$ , ... angenommen wird, wenn  $y_1$  zu  $\tau_1$ ,  $y_2$  zu  $\tau_2$ , ... angenommen wird.

**Definition** (Markov-Prozess).  $X_t$  heißt *Markov-Prozess*, wenn für  $\tau_1 < \dots < \tau_m < t_1 < \dots < t_n$  gilt:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n \mid y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots; y_m, \tau_m) = p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n \mid y_m, \tau_m)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte eines Markov-Prozesses ist ausschließlich durch aktuellste Bedingung bestimmt: "Zukunft hängt von der Vergangenheit nur über die Gegenwart ab."

**Beispiel** (Kapital beim Pokern). Nur zu dem Kapital, das ich gerade habe, kann ich etwas dazugewinnen, bzw. etwas davon verlieren.

**Satz.** *Ein Markov-Prozess ist durch  $p(x, t)$  und  $p(x_2, t_2 \mid x_1, t_1)$  vollständig bestimmt (o. Bew.)*

**Beispiel.** Sei  $t_1 < t_2 < t_3$

$$\begin{aligned} p(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= p(y_3, t_3 \mid y_1, t_1; y_2, t_2) \cdot p(y_1, t_1; y_2, t_2) \\ &= p(y_3, t_3 \mid y_2, t_2) p(y_2, t_2 \mid y_1, t_1) p(y_1, t_1) \end{aligned}$$

Können also auf Zwei-Punkt- und Ein-Punkt-Bedingung zurückführen.

**Chapman-Kolmogorow-Gleichung**  $p(x, t)$  und  $p(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  sind nicht beliebig wählbar, sondern erfüllen:

1. die Verträglichkeitsbedingung  $p(y_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_1, t_1; y_3, t_3) dy_1$  bzw.

$$p(y_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_3, t_3 | y_1, t_1) p(y_1, t_1) dy_1$$

2. Für Markovprozesse und mit  $t_1 < t_2 < t_3$  gilt

$$\begin{aligned} p(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= p(y_3, t_3 | y_2, t_2) p(y_2, t_2 | y_1, t_1) p(y_1, t_1) \\ \frac{p(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3)}{p(y_1, t_1)} &= p(y_3, t_3 | y_2, t_2) p(y_2, t_2 | y_1, t_1) \end{aligned}$$

und, mit Integration über  $y_2$ ,

$$p(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 p(y_3, t_3 | y_2, t_2) p(y_2, t_2 | y_1, t_1)$$

Das ist die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung (7.1).

**Differentielle Chapman-Kolmogorow-Gleichung** Wir schreiben im Folgenden die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung (7.1) als DGL um. Zunächst seien

$$A(y, t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y| < \epsilon} dx (x-y) p(x, t + \Delta t | y, t) \quad (7.3)$$

$$B(y, t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-y| < \epsilon} dx (x-y)^2 p(x, t + \Delta t | y, t) - \mathcal{O}(\epsilon) \quad (7.4)$$

$$0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} p(x, t + \Delta t | y, t) \quad \text{für } |x-y| > \epsilon \quad (7.5)$$

Sei  $t > t'$  und  $f(x)$  eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion; dann ist

$$\begin{aligned} \int dx f(x) \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | y, t') &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int dx f(x) p(x, t + \Delta t | y, t') - \int dz f(z) p(z, t | y, t') \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int dx f(x) \int dz p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') \right. \\ &\quad \left. - \int dz f(z) \int dx p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int \int dx dz [f(x) - f(z)] p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung (7.1) sowohl im ersten wie auch im zweiten Term verwendet, und im zweiten Term zusätzlich, dass  $\int dx p(x, t + \Delta t | z, t) = 1$ . Nun entwickeln wir  $f(x) - f(z)$  in eine Taylor-Reihe in  $z$ ,

$$f(x) - f(z) = (x-z) \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{1}{2} (x-z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z) + \dots$$

und damit

$$\begin{aligned} \int dx f(x) \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | y, t') &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| < \epsilon} dx dz \left[ (x-z) \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{1}{2} (x-z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z) + \dots \right] \cdot \\ &\quad p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') + \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z| > \epsilon} dx dz \dots \\ &= \int dz \left[ A(z, t) \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{1}{2} B(z, t) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z) \right] p(z, t | y, t') \end{aligned}$$

unter Verwendung von (7.3, 7.4, 7.5). Weiters erhalten wir mittels partieller Integration

$$\int dx f(x) \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | y, t') = \int dz f(z) \left[ -\frac{\partial}{\partial z} (Ap) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (Bp) \right] = \int dz f(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[ -A + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B \right]$$

Da  $f(x)$  beliebig, erhält man schließlich die

**Fokker-Planck-Gleichung:**

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | y, t') = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -A(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B(x, t) \right] p(x, t | y, t') \quad (7.6)$$

**Beispiel.**  $A = 0$ ,  $B = 1$  führt zur Diffusionsgleichung, welche die Brown'sche Bewegung beschreibt: „Wiener-Prozess“ (Diffusionskonstante  $D = \frac{1}{2}$ ). Schreibweise, wenn es sich um Wiener-Prozess handelt:  $W_t$  statt  $X_t$

## 7.4 Stochastische Differentialgleichungen und der Itô-Kalkül

Die allgemeine Form einer stochastischen Differentialgleichung ( $\equiv$  Langevin Gleichung) lautet

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(x(t), t) + b(x(t), t) \eta(t)$$

wo  $\eta(t)$  „höchst unregelmäßig“ ist; wir nennen  $\eta$  „weißes Rauschen“. Bei Mittelung  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  über das Rauschen soll gelten

$$\langle\langle \eta(t) \rangle\rangle = 0 \qquad \langle\langle \eta(t) \eta(t') \rangle\rangle = \delta(t - t')$$

sowie

$$\langle\langle \eta(t) f(x(t)) \rangle\rangle = 0$$

**Behauptung.**

$$W_t(\omega_0) := \int_0^t \eta(\tau) d\tau$$

ist Wiener-Prozess.

*Beweis.*

$$\langle\langle W_t^2 \rangle\rangle = \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' \langle\langle \eta(\tau) \eta(\tau') \rangle\rangle = \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' \delta(\tau - \tau') = t$$

(Also ist wie zuvor die Diffusionskonstante  $D = \frac{1}{2}$ )

□

Wir erkennen:

$$\langle\langle \dots \rangle\rangle = \langle \dots \rangle$$

Also der üblicher Erwartungswert bezüglich Wahrscheinlichkeitsdichten des Wiener-Prozesses.

Wir schreiben nun die Langevin-Gleichung (7.2) als Integralgleichung um

$$x(t) - x(0) = \int_0^t a(x(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t b(x(\tau), \tau) \eta(\tau) d\tau$$

mit

$$W_t = \int_0^t \eta(\tau) d\tau$$

motivieren wir salopp

$$dW_t = \eta(t) dt$$

und *definieren* mathematisch sauber (ohne  $\eta$ )

$$x(t) - x(0) = \int_0^t a(x(\tau), \tau) d\tau + \int_0^t b(x(\tau), \tau) dW_\tau$$

Das ist eine stochastische Integralgleichung;  $\int_0^t a(x(\tau), \tau) d\tau$  ist gewöhnliches Riemann-Integral,  $\int_0^t b(x(\tau), \tau) dW_\tau$  ist Itô-stochastisches Integral.

**Definition** (Itô-stochastisches Integral).

$$\int_0^t b(x(\tau), \tau) dW_\tau = \text{qm} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n b(x(t_{i-1}), t_{i-1}) (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right\}$$

Dabei ist  $n$  die Anzahl der Unterteilungen des Intervalls  $[0, t]$ ; und

$$\text{qm} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (s_n - s)^2 \rangle = 0$$

**Definition** (Itô-stochastische Differentialgleichung).

$$dx = a(x(t), t) dt + b(x(t), t) dW_t$$

ist symbolische Schreibweise, bedeutet das gleiche wie die stochastische Integralgleichung.

**Satz** (Zusammenhang von Itô-stochastischer DGL und Fokker-Planck-Gleichung (o.Bew.)).

$$dx = a dt + b dW_t \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -a + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} b^2 \right) p$$