

Elektrodynamik

Vorlesungsskript

Universität Wien, 2023 WinterSemester

H STEINACKER, PRIV-DOZ. PHD

© 2023-25 Harold Steinacker.

Dieses Dokument sowie seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Dieses Werk ist lizenziert unter der Creative Commons Lizenz „Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ (CC BY-SA 4.0).



Die Lizenz kann eingesehen werden unter:
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

Die aktuelle Version dieses Werks befindet sich unter:
<https://homepage.univie.ac.at/harold.steinacker/>.

Dieses Werk basiert auf dem Vorlesungsskript
„Elektrodynamik“ von Niklas Beisert,
<https://itp.phys.ethz.ch/people/professors/beisert.html>.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Einführung	6
0.1 Historisches	6
0.2 Übersicht	7
0.3 Literatur	8
0.4 Dank	8
 I Statik	 I
1 Grundlagen der Elektrostatik	1.1
1.1 Grundbegriffe	1.1
1.2 Das Elektrostatische Potential	1.5
1.3 Energie des Elektrostatischen Feldes	1.7
1.4 Beispiele	1.8
 2 Randwertprobleme der Elektrostatik	 2.1
2.1 Formulierung und Eindeutigkeit	2.1
2.2 Greensche Funktionen	2.3
2.3 Beispiele	2.8
 3 Elektrostatik in Kugelkoordinaten	 3.1
3.1 Separation der Variablen	3.1
3.2 Kugelkoordinaten	3.2
3.3 Kugelflächenfunktionen	3.3
3.4 Orthogonalität und Vollständigkeit	3.7
3.5 Multipolentwicklung	3.8
3.6 Darstellungen der Rotationsgruppe	3.11
 4 Magnetostatik	 4.1
4.1 Grundlagen	4.1
4.2 Feldgleichungen	4.3
4.3 Vektorpotential	4.6
4.4 Magnetisches Moment	4.8
 5 Elektro- und Magnetostatik in Materie	 5.1
5.1 Makroskopische Felder	5.1
5.2 Dielektrika	5.2
5.3 Grenzflächen von Dielektrika	5.5
5.4 Magnetostatik in Materie	5.7

II	Dynamik	II
6	Maxwell-Gleichungen	6.1
6.1	Bewegte Punktladungen	6.1
6.2	Faradaysches Induktionsgesetz	6.2
6.3	Maxwellsche Ergänzung	6.3
6.4	Elektromagnetische Potentiale	6.5
7	Stromkreise	7.1
7.1	Induktivitäten	7.1
7.2	Stromkreise	7.3
7.3	Schwingkreis	7.6
8	Erhaltungsgrößen und Symmetrien	8.1
8.1	Ladungserhaltung	8.1
8.2	Energie und Impuls	8.1
8.3	Symmetrien	8.4
8.4	Elektromagnetische Dualität und Magnetische Monopole	8.4
III	Relativitätstheorie	III
9	Spezielle Relativitätstheorie	9.1
9.1	Poincaré-Transformationen	9.1
9.2	Raumzeit und relativistische Kinematik	9.5
9.3	Tensoren	9.7
9.4	Kovariante Elektrodynamik	9.10
9.5	Geladene Teilchen	9.14
IV	Wellen und Strahlung	IV
10	Lösungen der freien Wellengleichung	10.1
10.1	Freie Wellengleichung	10.1
10.2	Ebene Wellen	10.1
10.3	Polarisation	10.5
10.4	Energietransport	10.8
10.5	Weitere Wellenlösungen	10.9
11	Elektrodynamik mit Materie	11.1
11.1	Wellen im Medium	11.1
11.2	Reflexion und Brechung	11.3
12	Wellenleiter	12.1
12.1	Wellen in Leitern	12.1
12.2	Wellenleiter	12.2
13	Erzeugung Elektromagnetischer Wellen	13.1

13.1	Anfangswertproblem	13.1
13.2	Greensche Funktionen	13.4
13.3	Strahlung oszillierender Ströme	13.9
13.3.1	Dipolstrahlung	13.9
13.3.2	Allgemeine monochromatische Wellen.	13.11
13.4	Beschleunigte Punktladungen	13.15
14	Wellenoptik	14.1
14.1	Kirchhoffsche Beugungstheorie	14.1
14.2	Interferenz und Huygens-Prinzip	14.3
V	Anhang	V
	Index	9
	Plan der Vorlesungen	13

0 Einführung

Herzlich willkommen zur Theorie der Elektrodynamik! Beginnen wir mit einem kurzen historischen Überblick.

0.1 Historisches

Einzelne Phänomene der Elektrodynamik sind bereits in der Antike bekannt und wurden benutzt:

- Magnete – Kompass,
- elektrostatische Aufladung – Bernstein,
- Licht – Optik.

Die wissenschaftliche Auseinandersetzung beginnt um 1600 mit dem allmählichen Verständnis von magnetischen und elektrischen Ladungen, Strömen, Kräften und vor allem Phänomenen der Optik.

Zwischen 1800 und 1900 setzt die industrielle Nutzung von elektrischem Strom ein mit Batterien (galvanischen Zelle), Generatoren, Motoren, Glühlampen und Signalübertragung. Gleichzeitig wird das wissenschaftliche Verständnis zwischen 1800 und 1850 verfeinert und es bilden sich geeignete Modelle heraus.

Um 1860 bis 1870 stellt James Clerk Maxwell eine vollständige Theorie auf, die sowohl die elektrischen und magnetischen Phänomene beschreibt, als auch die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen – Licht. Ein erstaunliches Element dieser Theorie ist, dass sie einen neuen Term postuliert, der in der damaligen Praxis sehr kleine Beiträge liefert und noch nicht experimentell motiviert war. Er ist allerdings sehr wichtig für die Konsistenz der Gleichungen und für die Beschreibung elektromagnetischer Wellen.

Maxwell konnte so auf theoretischer Ebene einige vormals lediglich verwandte Phänomene vereinigen und letztlich auch viele neue Vorhersagen ermöglichen.

Die Elektrodynamik ist neben der Mechanik und der Thermodynamik einer der Pfeiler der klassischen Physik. Dieser Teil der Physik beschreibt Alltagsphänomene; insbesondere sei die Optik erwähnt, die auf der Elektrodynamik beruht. Die Elektrodynamik ist aber auch der Anknüpfungspunkt zur modernen Physik, welche weniger intuitive Beobachtungen beschreibt, nämlich die spezielle Relativitätstheorie und die Quantenmechanik.

Die (spezielle) Relativitätstheorie nimmt einer der besonderen Eigenschaften der Elektrodynamik – die Universalität der Lichtgeschwindigkeit – und weitet sie gnadenlos auf alle Bereiche der Mechanik und der Physik aus.

Die Quantenmechanik kann man als eine Theorie von Wellen auffassen, welche die elektromagnetischen Wellen des Lichts verallgemeinern auf alle Formen der Materie. Insofern stellt die theoretische Beschreibung der Elektrodynamik viele Bausteine zur Verfügung, die später in der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik benötigt werden. Sie ist somit eine wichtige Grundlage für die Teilchenphysik, Quantenoptik und praktisch alle anderen Teilbereiche der Physik.

0.2 Übersicht

Die Vorlesung besteht grob aus vier Teilen:

- I Statik: Elektrische und magnetische Kräfte, Raum mit drei Dimensionen, vor Maxwell (ca. 5 Wochen)
- II Dynamik: Elektromagnetische Kräfte, Raum mit drei Dimensionen plus Zeit, Maxwell (ca. 3 Wochen)
- III Relativitätstheorie: Raumzeit mit vier Dimensionen, nach Maxwell, Einstein (ca. 1-2 Wochen)
- IV Wellen und Strahlung: Wellenlösungen, Erzeugung, Transport, Interaktion mit Materie (ca. 4 Wochen)

Was werden Sie lernen?

- Theorie des Elektromagnetismus
- Fortsetzung der Mechanik in der Sie gelernt haben, die Dynamik von Körpern mit endlich vielen Freiheitsgraden theoretisch zu beschreiben.
- In der Elektrodynamik geht es hauptsächlich um Felder. Im Gegensatz zu Körpern haben Felder unendlich viele Freiheitsgrade.

Sie werden vielen neuen theoretischen und mathematischen Konzepten begegnen:

- Felder, Vektoranalysis
- Partielle Differentialgleichungen
- Randwertprobleme
- Greensche Funktionen
- Distributionen; delta-Funktion, etc.
- Fourier-Transformationen
- Symmetrien
- Redundante Beschreibungen in der Physik
- Raumzeit, Geometrie

Wofür ist das nötig?

- Signalübertragung, Schaltkreise, Energietransport
- Optik, Wellen, Vorbereitung zur Quantenmechanik
- Fernwirkung vs. Lokalität in der Physik, Kausalität
- Baustein im Verständnis der klassischen Welt.

Insgesamt besteht der Kurs aus 26 Vorlesungen von je 90 Minuten.

0.3 Literatur

Standardthema, viele gute Optionen, je nach Geschmack. Vier Beispiele zur Orientierung:

- W. Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik, Springer, 8. Auflage, E-Book
- D.J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics Pearson
- J. D. Jackson: Classical Electrodynamics, 1st edition

Referenzen im Text beziehen sich auf diese Ausgaben der Quellen.

0.4 Dank

Ich danke Herrn Prof. Niklas Beisert für die Erstellung des zugrundeliegenden Skripts <http://people.phys.ethz.ch/~nbeisert/lectures/>

Teil I

Statik

1 Grundlagen der Elektrostatik

Im ersten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns mit statischen, d.h. zeitunabhängigen Phänomenen elektrischer Ladungen und magnetischer Materialien. Zunächst führen wir die Grundbegriffe der Elektrostatik ein und diskutieren einige elementare Beispiele.

1.1 Grundbegriffe

- Ladung
- Coulomb-Gesetz
- Elektrisches Feld
- Kontinuierliche Ladungsverteilungen
- Satz von Gauß
- delta-Funktion
 - Nolting 2.1.1–4; Jackson 1.1–4

Coulomb-Gesetz. Elektrische Ladung ist eine Eigenschaft von Materie, die dazu führt, dass sich zwei von einander entfernte Gegenstände anziehen oder abstossen. Hier in der Statik beschränken wir uns auf ruhende Gegenstände; später in der Dynamik lernen wir zusätzliche Kräfte für bewegte Ladungen kennen. Für zwei (nahezu) punktförmige Ladungen an den Orten x_1 und x_2 gilt (experimentell ermittelt) das *Coulomb-Gesetz*. Es besagt, dass die Kraft, die auf die Ladungen wirkt, wie folgt beschrieben ist:

- proportional zum Produkt der elektrischen Ladungen q_1, q_2 ,
- entlang der Verbindungslinie der Punkte ausgerichtet,
- proportional zum Abstandsbetrag von $x_1 - x_2$ zur Potenz -2 ,
- abstossend für Ladungen mit gleichem Vorzeichen, anziehend für gegensätzliche Ladungen.

Ausgedrückt als Formel:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}. \quad \vec{F}_1 \xleftarrow{q_1} \text{---} \text{---} \xrightarrow{q_2} \vec{F}_2 \quad (1.1)$$

Wir verwenden SI-Einheiten,¹ und q_1, q_2 sind die vorzeichenbehafteten Ladungen gemessen in der abstrakten Einheit Coulomb ($C = A s$). Die *Dielektrizitätskonstante* ϵ_0 beträgt $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} A^2 s^4 / kg m^3$. Es sind auch andere Einheitensysteme gebräuchlich.

¹In der Elektrodynamik ist (war) vor allem das Gaußsche bzw. CGS Einheitensystem gebräuchlich, welches anstelle der Konstanten ϵ_0 andere Potenzen des Faktors 4π verwendet; siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fches_Einheitensystem zur Konversion.

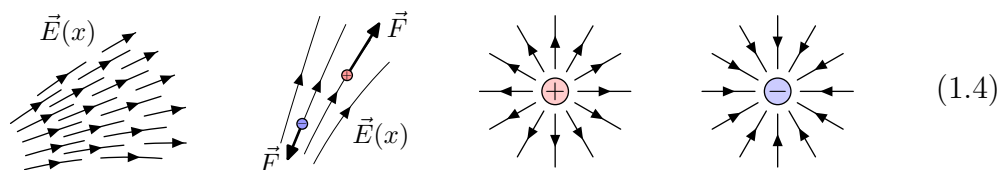
Für viele Ladungen q_i an den Orten x_i gilt (experimentell ermittelt) das Superpositionsprinzip, nach dem sich die Kraft als vektorielle Summe aller obigen paarweisen Kräfte berechnet:

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^3}. \quad (1.2)$$

Die elektrischen Kräfte treten auch bei sehr grossen Entfernungen auf, so dass man von einer Fernwirkung spricht. In erster Näherung tritt die Kraft instantan auf (was nur ein Teil der Wahrheit ist). Dies widerspricht erheblich der (heutigen) physikalischen Intuition.

Elektrisches Feld. Man kann die obige Problematik teilweise umgehen, indem man das *elektrische Feld* $E(x)$ einführt: Man beachte, dass F proportional zu der Ladung $q = q_i$ ist, auf die die Kraft $F = F_i$ wirkt, und schreibe

$$\vec{F} = q\vec{E}(x), \quad \vec{E}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j (\vec{x} - \vec{x}_j)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x} - \vec{x}_j\|^3}. \quad (1.3)$$



Die Kraft ist also lokal durch das elektrische Feld bestimmt, auch wenn letzteres nicht-lokal von den Ladungen abhängt. Eine Subtilität ist, dass hier E nicht von der Ladung q bei x abhängt. Würde man diese in $E(x)$ mit einbeziehen, würde dies insbesondere zu einer divergenten Kraft $1/0 = \infty$ führen. Man betrachtet q also als kleine Testladung, die das Feld nicht (wesentlich) beeinflusst. $E(x)$ ist ein Feld welches unabhängig von q überall im Raum existiert² und vektoriellen Charakter hat.

Man kann nun auch eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(y)$ (als Grenzfall vieler Punktladungen) betrachten. Das Feld ist dann gegeben durch

$$\vec{E}(x) = \int dy^3 \frac{\rho(y) (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x} - \vec{y}\|^3}. \quad (1.5)$$

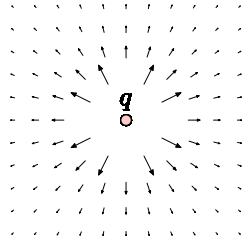
Das elektrische Feld hat zwei besondere Eigenschaften, die sich als Differentialgleichungen ausdrücken lassen:

$$\operatorname{div} \vec{E} := \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} := \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (1.6)$$

wobei $\nabla_i := \partial/\partial x_i$. Die erste Gleichung gilt ausserhalb von Ladungsverteilungen, die zweite gilt exakt.

²Was die Existenz bedeutet, wird wohl erst zusammen mit der Quantenmechanik in der Quantenfeldtheorie klar.

Um diese zu beweisen betrachte man die Linearität von E bezüglich der Ladungen. Da die Differentialgleichungen auch linear sind, genügt es, eine Punktladung bei $y = 0$ zu betrachten, d.h.

$$\vec{E} = \frac{q\vec{x}}{4\pi\epsilon_0\|\vec{x}\|^3}. \quad (1.7)$$


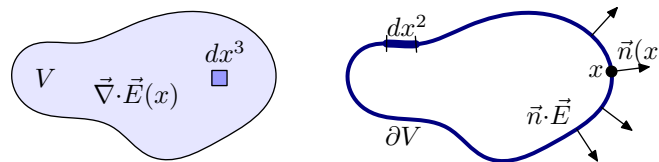
Man erhält durch Ausrechnen

$$\nabla_i E_j = \frac{q(\delta_{ij}\vec{x}^2 - 3x_i x_j)}{4\pi\epsilon_0\|\vec{x}\|^5} \quad \text{für } x \neq 0. \quad (1.8)$$

Für die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ gilt $\sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = 3$ und bezüglich der Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ benutzt man, dass $(\partial/\partial x_i)E_j$ symmetrisch in i, j ist. Dies beweist die obigen zwei Differentialgleichungen.

Quellen. Am Ort der Ladungen genügen aber obige Betrachtungen nicht, denn $E(x)$ ist singulär bei $x = 0$. Hier hilft der *Satz von Gauß* weiter: Für ein Vektorfeld E auf einem Bereich $V \subset \mathbb{R}^3$ gilt³

$$\int_V dx^3 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n}(x) \cdot \vec{E}(x). \quad (1.9)$$



$$(1.10)$$

Hiermit lässt sich der problematische Punkt $x = 0$ umgehen, indem man den Fluss von E durch eine Fläche ∂V betrachtet, die $x = 0 \in V$ umschließt. Der Einfachheit halber wähle man eine Kugel mit Radius R zentriert um $x = 0$. Es gilt⁴

$$\begin{aligned} \int_{\|\vec{x}\| \leq R} dx^3 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \oint_{\|\vec{x}\|=R} dx^2 \vec{n} \cdot \frac{q\vec{x}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ &= \oint_{\|\vec{x}\|=R} d^2\Omega R^2 \frac{\vec{x}}{R} \cdot \frac{q\vec{x}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d^2\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

³In dieser Vorlesung seien die Integrationsmasse dx^3 und dx^2 als kanonische euklidische Volumen- und Flächenelemente definiert. Weiterhin ist $\vec{n}(x)$ ein Einheitsvektor, der bei $x \in \partial V$ senkrecht zu der Grenzfläche ∂V steht und aus dem Bereich V hinaus zeigt. Meist tritt dx^2 in Verbindung mit $\vec{n}(x)$ auf, welches dem Mass $dx^2 \vec{n}(x) = \frac{1}{2} d\vec{x} \times d\vec{x}$ entspricht. Ebenso (modulo Orientierung) $dx^3 = \frac{1}{6} d\vec{x} \cdot (d\vec{x} \times d\vec{x})$.

⁴Genaugenommen gilt dies nur unter Vernachlässigung mathematischer Tatsachen. Der Satz von Gauß verlangt, dass das Feld E auf dem Bereich V nicht-singulär ist, was aber am Ort $x = 0$ der Ladung offensichtlich nicht zutrifft. Um die Gültigkeit des Satzes von Gauß zu bewahren, müssen wir etwas später Distributionen als Erweiterung des Konzepts der Funktionen einführen.

Allerdings ist der ursprüngliche Integrand $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ überall gleich 0 ausser bei $x = 0$. Somit muss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ eine seltsame Funktion sein, die fast überall verschwindet, aber bei $x = 0$ so stark ist, dass der Gesamtfluss q/ε_0 beträgt. Diese Funktion wird (Diracsche) *delta-Funktion* genannt, und ist streng genommen eine *Distribution*. Wir haben also gezeigt, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta^3(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x), \quad (1.12)$$

wobei $\rho(x)$ die (formelle) Ladungsdichte eines Punktteilchens ist. Sie gilt aufgrund der Linearität auch für allgemeine Ladungsverteilungen $\rho(x)$. In Integralform lautet die Formel (*Gaußsches Gesetz*)

$$\int_V dx^3 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V, \quad Q_V := \int_V dx^3 \rho. \quad (1.13)$$

Interessanterweise ist die Gesamtladung Q_V in dem Gebiet V also bestimmt durch das elektrische Feld auf dem Rand ∂V des Gebiets. Die Formulierung der Feldgleichung mittels Integrale ist also eine nicht-lokale Beziehung. Die Differentialgleichung hingegen ist lokal.

delta-Distribution. Wir haben eine wichtige Ableitungsformel hergeleitet:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = 4\pi \delta^3(x). \quad (1.14)$$

Die delta-Funktion $\delta^3(x)$ ist definiert über ihre Eigenschaften⁵

$$\delta^3(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0 \quad (1.15)$$

aber⁶

$$\int_V dx^3 \delta^3(x) f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{falls } 0 \in V, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.16)$$

Mathematisch bedeutet dies, dass die delta-Funktion eine Distribution beschreibt, welche Funktionen linear auswertet. In diesem Fall, weist obiges Integral jeder Funktion $f(x)$ ihren Wert $f(0)$ bei $x = 0$ zu. In der Physik werden Distributionen in der Regel durch ihren Integralkern beschrieben, d.h. $\delta^3(x)$ anstelle von $f \mapsto \int_V dx^3 \delta^3(x) f(x) = f(0)$.

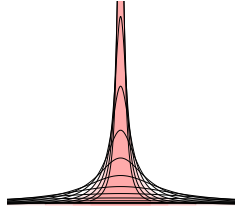
Zur Beruhigung: Die delta-Funktion ist lediglich ein formales Werkzeug um effizienter rechnen zu können. In der Realität gibt es keinen Grund, die Existenz von exakt punktaktigen Teilchen vorauszusetzen, denn eine solche Annahme liesse sich niemals durch Messungen ultimativ bestätigen. Es genügt im Prinzip,

⁵Gewöhnlich zeichnet man den Ursprung $x = 0$ in der Definition der delta-Funktion aus. Man kann allerdings auch 0 durch einen beliebigen Punkt y ersetzen und entsprechend eine delta-Funktion $\delta^3(x, y)$ definieren. Nimmt man Translationssymmetrie im Mass der Integrale an, gilt allerdings $\delta^3(x, y) = \delta^3(x - y)$.

⁶Der Rand ∂V ist heikel und $0 \in \partial V$ sollte besser vermieden werden.

genügend stark konzentrierte Ladungsverteilungen zu betrachten, und somit delta-Funktionen zu umgehen. Der Nachteil an einem solchen Vorgehen ist, dass die innere Struktur Einfluss auf die Rechnungen nimmt und sie meist verkompliziert. Mehr dazu später.

Im Einklang mit dieser physikalischen Betrachtungsweise, kann man die delta-Funktion auch als Limes einer Folge δ_n bzw. Familie δ_ϵ von Funktionen betrachten. Ein gebräuchliches Beispiel in einer Dimension ist die Familie rationaler Funktionen

$$\delta_\epsilon(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_\epsilon(x) = 1. \quad (1.17)$$


Für endliches ϵ ist sie glatt und ihr Integral beträgt immer genau 1; für $\epsilon \rightarrow 0$ verschwindet sie überall ausser bei $x = 0$. Im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ hat δ_ϵ also die gewünschten Eigenschaften, so dass (im gewissen Sinn)⁷

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x). \quad (1.18)$$

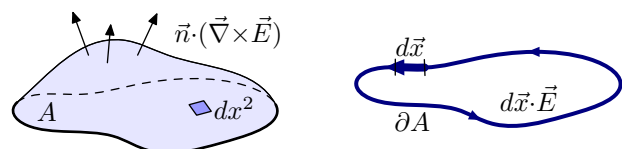
Eine andere gebräuchliche Approximation der delta-Funktion ist die Gausssche Normalverteilung mit Standardabweichung $\sigma \rightarrow 0$.

1.2 Das Elektrostatische Potential

- Satz von Stokes
- Arbeit
- elektrostatisches Potential
- Poisson-Gleichung
- Jackson 1.5

Die zweite wichtige Eigenschaft $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ gilt exakt. Dies lässt sich mit dem *Satz von Stokes* begründen

$$\int_A dx^2 \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{E}. \quad (1.19)$$



$$(1.20)$$

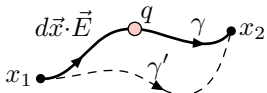
Der Fluss von $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ durch eine berandete Fläche A ist gleich dem Integral von E entlang des Randes ∂A . Nun ist $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ausser gegebenenfalls bei $x = 0$. Wir sollten also untersuchen, was bei $x = 0$ passiert. Zu einem vorgegebenen Rand ∂A

⁷Eine konsistente Formulierung dieses Grenzwerts mittels Distributionen ist $\delta[f] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon[f]$ mit $\delta_\epsilon[f] := \int dx \delta_\epsilon(x) f(x)$ und $\delta[f] := f(0)$ für alle geeigneten Testfunktionen f .

lassen sich Flächen konstruieren, die $x = 0$ entweder nicht enthalten oder in beliebiger Richtung passieren. Somit kann $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ als exakt auch für $x = 0$ angenommen werden. Nach dem Satz von Stokes kann diese Differentialgleichung in Integralform geschrieben werden: Für beliebige, geschlossenen Kurven γ gilt

$$\oint_{\gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0. \quad (1.21)$$

Diese Eigenschaft des elektrischen Feldes ist physikalisch besonders wichtig, denn sie macht eine Aussage zur Arbeit, eine Testladung q entlang einer (offenen oder geschlossenen) Kurve γ im elektrischen Feld $E(x)$ zu bewegen. Nach der allgemeinen Beziehung zwischen Feld und Kraft erhält man für die *zu verrichtende* Arbeit

$$\Delta W = -q \int_{\gamma} d\vec{x} \cdot \vec{E}. \quad (1.22)$$


Aufgrund der obigen Eigenschaft des elektrischen Feldes ist die Arbeit *unabhängig* vom gewählten Pfad: Für einen alternativen Pfad γ' mit denselben Start- und Endpunkten betrachte man den zusammengesetzten Pfad $\gamma^{-1}\gamma'$, welcher geschlossen ist. Die Eigenschaft besagt dann, dass

$$0 = \Delta W[\gamma'\gamma^{-1}] = \Delta W[\gamma'] - \Delta W[\gamma]. \quad (1.23)$$

Es zählt demnach nur der Start- und Endpunkt

$$\Delta W = q\Phi(x_2) - q\Phi(x_1). \quad (1.24)$$

Hier ist $\Phi(x)$ das *elektrostatische Potential*, welches mit dem elektrischen Feld wie folgt in Beziehung steht

$$\vec{E}(x) = -\vec{\nabla}\Phi(x) =: -\text{grad } \Phi(x). \quad (1.25)$$

Es gilt also trivialerweise

$$\int d\vec{x} \cdot \vec{E} = - \int d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\Phi = -\Phi(x_2) + \Phi(x_1). \quad (1.26)$$

Ein rotationsfreies Vektorfeld lässt sich allgemein als Gradient eines skalaren Potentials schreiben.⁸

Man beachte, dass das Potential auf diese Weise nur bis auf eine global konstante Verschiebung definiert ist. Dieser Freiheitsgrad hat keine physikalische Relevanz, genauso wie nur *Energiedifferenzen* gemessen werden können. Oft wird das Potential so bestimmt, dass es bei $x \rightarrow \infty$ verschwindet. Eine Verallgemeinerung dieser unphysikalischen Freiheitsgrade werden wir in der Elektrodynamik antreffen. Sie hat wichtige Konsequenzen für die Quantenmechanik und die Quantenfeldtheorie.

⁸Diese Aussage gilt lokal, d.h. in jeder Umgebung eines Punktes oder allgemeiner für einfach zusammenhängende Gebiete V . Wie wir später im Fall des Magnetfeldes sehen werden, spielt die Topologie eine Rolle.

Schliesslich können wir das Potential für allgemeine Ladungsverteilungen schreiben als

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \|x - x_i\|} \quad (1.27)$$

bzw. mittels einer Ladungsdichte ρ

$$\Phi(x) = \int dy^3 \frac{\rho(y)}{4\pi\epsilon_0 \|x - y\|}. \quad (1.28)$$

Die Form lässt sich durch Einsetzen bestätigen mit der Zusatzannahme, dass $\Phi(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Durch Einsetzen in die Divergenzgleichung von E erhält man die *Poisson-Gleichung*

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi(x) = -\Delta \Phi(x). \quad (1.29)$$

Dies ist die inhomogene Version der *Laplace-Gleichung* mit dem *Laplace-Operator*

$$\Delta := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2. \quad (1.30)$$

Der Vorteil dieser Formulierung der Elektrostatik ist, dass ein skalares Feld genügt. Man kann somit zu gewissem Grad auf Rechnungen mit mehrkomponentigen Vektoren verzichten.

1.3 Energie des Elektrostatischen Feldes

- Energie einer Ladungsverteilung
- Energie einer Feldkonfiguration
- Selbstenergie von Punktladungen
 - Nolting 2.1.5; Jackson 1.7,11

Als Nächstes wollen wir die Energie berechnen, die benötigt wird, eine bestimmte Ladungsverteilung herzustellen. Dazu bringe man sukzessive Ladungen von $x = \infty$ zur gewünschten Position $x = x_i$. Man erhält die Energie

$$W = \sum_{i < j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \|x_i - x_j\|} = \sum_{i \neq j=1}^N \frac{q_i q_j}{8\pi\epsilon_0 \|x_i - x_j\|}. \quad (1.31)$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung erhält man entsprechend

$$\begin{aligned} W &= \int dx^3 dy^3 \frac{\rho(x)\rho(y)}{8\pi\epsilon_0 \|x - y\|} = \int dx^3 \frac{1}{2} \rho(x) \Phi(x) \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int dx^3 \Delta \Phi(x) \Phi(x). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Zur Umformung haben wir den Ausdruck für das Potential einer Ladungsverteilung und die Poisson-Gleichung verwendet. Nach partieller

Integration und Vernachlässigung des Randterms (das Potential sollte ausreichend schnell für $x \rightarrow \infty$ verschwinden) ergibt dies

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dx^3 (\vec{\nabla}\Phi)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dx^3 \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{\nabla}\Phi) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dx^3 \vec{E}^2. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Die benötigte Arbeit lässt sich also vollständig und lokal durch das elektrische Feld ausdrücken. Wenn man letzteres als real betrachtet, so wurde die Arbeit in potentielle Energie des Feldes umgewandelt.

Selbstenergie von Punktteilchen. Ein Vergleich mit der Energie der Konfiguration der Punktladungen bietet sich an. Die Feldenergie ist manifest positiv, da der Integrand es ist. Für Punktladungen gilt allerdings nicht $W \geq 0$, denn eine positive und eine negative Ladung ziehen sich an. Wie kann es sein, dass im Laufe der Herleitung etwas Negatives zu etwas Positivem geworden ist? Das Problem ist das Konzept der idealisierten Punktladungen: Das Feld in ihrer unmittelbaren Umgebung divergiert stark und führt zu unendlichen Beiträgen zur Feldenergie. Für die Punktladungs-Verteilung wurden diese Beträge mit $i = j$ bewusst ignoriert (wie zuvor in den Ausdrücken für die Kraft und das Feld der Probeladung). Letztere Energie ist somit (um ∞) geringer und kann negativ werden. Es gibt zwei Interpretationen:

Pragmatisch: Die *Selbstenergie* eines Teilchens ist zwar formell ∞ , allerdings konstant. Sie ist bei der Erzeugung des Teilchens aufgewendet worden und braucht uns nicht weiter zu interessieren. Da nur Energiedifferenzen gemessen werden, kürzt sie sich sowieso aus allen physikalischen Grössen heraus.

Physikalisch: Punktteilchen sind eine Idealisierung, die es in der Realität nicht gibt. Zumindest gibt es keine Möglichkeit festzustellen, ob ein sehr sehr kleines Teilchen wirklich punktförmig ist, denn die Auflösung *aller* Messgeräte ist begrenzt. Wir benutzen in der Theorie dennoch gerne Punktteilchen, denn sie vereinfachen die Betrachtungen und Berechnungen sehr, auch wenn man so gelegentlich paradoxe Ergebnisse erhält.

Es ist von grossem Vorteil, dass beide Interpretationen kompatibel sind. Man kann so die Elektrostatik als eine Theorie betrachten, für die die innere Struktur der Punktteilchen keine Relevanz hat. Bei genügend hoher Auflösung mag man irgendwann einmal eine innere Struktur feststellen, aber bis dahin ist das Modell eine gute Beschreibung.

1.4 Beispiele

- Kugelsymmetrische Ladungsverteilung
- Homogen geladene Kugel
- Homogen geladene Kugeloberfläche
- Geladene Fläche

- Plattenkondensator
- Dipol
 - Nolting 2.2.1–5; Jackson 1.6

Wir wollen die gewonnenen Einsichten anhand einiger einfacher Beispiele diskutieren.

Kugelsymmetrische Ladungsverteilung. Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(x) = \rho(r)$ mit $r := \|x\|$ können wir die plausible Annahme machen, dass das Feld radial ausgerichtet ist

$$\vec{E}(x) = \vec{n}E(r) \quad \text{mit} \quad \vec{n}(x) := \frac{\vec{x}}{\|x\|}. \quad (1.34)$$

Entsprechend muss das Potential kugelsymmetrisch sein: $\Phi(x) = \Phi(r)$. Aus $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ folgt direkt $E(r) = -\Phi'(r)$. Man kann also mittels Integration bzw. Differentiation in einer Variablen zwischen den Feldern E und Φ übersetzen. Für die Divergenz von E rechnet man aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = E' + (2/r)E$ und schreibt die entsprechende Differentialgleichung als

$$E' + \frac{2}{r}E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \quad (1.35)$$

Durch Integration dieser Differentialgleichung oder mittels des Satzes von Gauß erhält man unmittelbar

$$4\pi r^2 E(r) = \dots = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r ds \, 4\pi s^2 \rho(s). \quad (1.36)$$

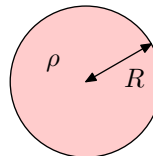
Man kann also die Stärke des Feldes $E(r)$ leicht aus der Ladungsdichte $\rho(r)$ ermitteln. Insbesondere bedeutet dies für den Aussenraum ($\rho(r) = 0$ für alle $r > R$) einer jeden Ladungsverteilung

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{für } r > R. \quad (1.37)$$

Dies hat genau dieselbe Form, wie das Feld einer Punktladung Q .

Homogen geladene Kugel. Eine homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q ist definiert als die Ladungsdichte

$$\rho(r) = \begin{cases} Q/\frac{4}{3}\pi R^3 & \text{für } r < R, \\ 0 & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (1.38)$$



Das obige Integral für $r < R$ liefert

$$\int_0^r ds \, 4\pi s^2 \rho = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho & \text{für } r < R, \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (1.39)$$

und man erhält für das elektrische Feld

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} r/R^3 & \text{für } r < R, \\ 1/r^2 & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (1.40)$$

Das Potential ergibt sich durch Integration (mit der üblichen Randbedingung $\Phi(\infty) = 0$)

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} -\frac{1}{2}r^2/R^3 + \frac{3}{2}/R & \text{für } r < R, \\ 1/r & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (1.41)$$

Man beachte, dass das elektrische Feld und das Potential stetig sind. Schliesslich kann man noch die elektrostatische Energie ausrechnen

$$\begin{aligned} W &= 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 E^2 \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\int_0^R dr \frac{r^2}{R^6} r^2 + \int_R^\infty dr \frac{r^2}{r^4} \right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Dieser Ausdruck divergiert für $R \rightarrow 0$ (bei fixierter Gesamtladung Q), d.h. die Selbstenergie einer Punktladung ist in der Tat ∞ .

Homogen geladene Kugeloberfläche. Für die homogen geladene Sphäre gilt

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \sigma \delta(r - R), \\ \sigma &= \frac{Q}{4\pi R^2}. \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \sigma \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \nearrow R \end{array} \quad (1.43)$$

Da innerhalb und ausserhalb der Kugel keine Ladung vorliegt, gilt nach dem Satz von Gauß sofort

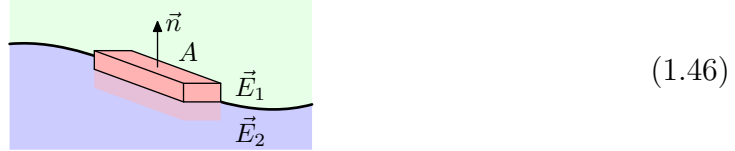
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} 0 & \text{für } r < R, \\ 1/r^2 & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (1.44)$$

und mittels Integration

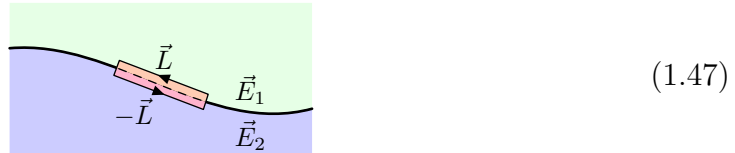
$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} 1/R & \text{für } r < R, \\ 1/r & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (1.45)$$

Hier ist das Potential stetig, das Feld allerdings springt um $Q/4\pi\epsilon_0 R^2$, welches proportional zur Flächenladungsdichte $\sigma = Q/4\pi R^2$ ist. Die Gesamtenergie beträgt hier $W = Q^2/8\pi\epsilon_0 R$ was ebenfalls für $R \rightarrow 0$ divergiert.

Flächenartige Ladungsverteilung. Betrachten wir nun eine allgemeine flächenartige Ladungsverteilung mit $\rho(x) = \sigma(x_{\parallel})\delta(x_{\perp})$, wobei σ die Flächenladungsdichte entlang der Fläche $x_{\perp} = 0$ ist (mit geeigneten Koordinaten x_{\parallel}, x_{\perp}). Um das Verhalten des elektrischen Feldes zu untersuchen, schauen wir uns einen kleinen Abschnitt um die Fläche an, so dass σ und \vec{E} praktisch konstant sind. Nun legen wir einen sehr flachen Kasten um die Fläche, ein sogenanntes *Gaußsches Kästchen*:

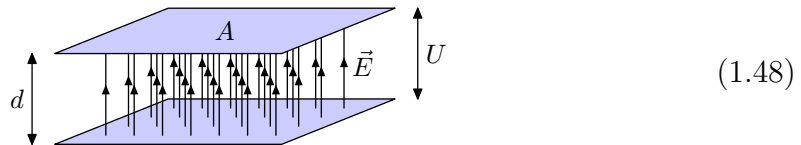


Der Fluss aus diesem Kasten beträgt näherungsweise $A\vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$. Nach dem Satz von Gauß muss dies gleich $1/\epsilon_0$ mal der enthaltenen Ladung sein: $A\sigma/\epsilon_0$. Das heisst, die Normalkomponente $E_{\perp} := \vec{n} \cdot \vec{E}$ von E springt an der geladenen Fläche um σ/ϵ_0 im Einklang mit der homogen geladenen Kugeloberfläche. Die Tangentialkomponenten E_{\parallel} (mit $\vec{n} \cdot \vec{E}_{\parallel} = 0$) sind stetig an der Fläche. Um dies zu sehen, legt man eine flache Schleife um ein Flächenelement, eine sogenannte *Stokessche Schleife*



Das elektrische Feld ist konservativ, also gilt $\vec{L} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$ für jede Wahl von L mit $\vec{n} \cdot \vec{L} = 0$. Somit springen die Tangentialkomponenten E_{\parallel} von E nicht.

Plattenkondensator. Ein *Plattenkondensator* besteht aus zwei parallelen Platten der Fläche A im Abstand d mit gegensätzlichen Ladungen $\pm Q$. Wir betrachten den Fall $d^2 \ll A$, so dass wir Randeffekte der Platten ignorieren können. Die Normalkomponente von E springt um $\pm Q/\epsilon_0 A$ an den Kondensatorplatten. Man kann also annehmen, dass das Feld im Aussenraum verschwindet und im Innenraum $E = Q/\epsilon_0 A$ beträgt:



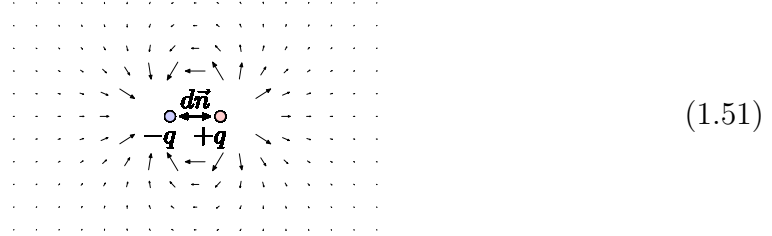
Das elektrische Potential steigt linear von einer zur anderen Platte um $U = \Delta\Phi = dE = dQ/\epsilon_0 A$. Ein Plattenkondensator hat die Kapazität $C := Q/U = \epsilon_0 A/d$. Für die Energie des Feldes erhalten wir

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 d A E^2 = \frac{dQ^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{1}{2}UQ = \frac{1}{2}CU^2. \quad (1.49)$$

Dies ist eine wohlbekannte Formel aus der Elektronik.

Dipol. Eine weitere wichtige Ladungskonfiguration ist der *Dipol* mit zwei entgegengesetzten Punktladungen $\pm q$ im Abstand d . Das Potential ist hier gegeben durch

$$\Phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{x} - \frac{1}{2}d\vec{n}\|} - \frac{1}{\|\vec{x} + \frac{1}{2}d\vec{n}\|} \right), \quad (1.50)$$



wobei \vec{n} die Richtung der Verschiebung um $x = 0$ vorgibt. Interessant ist der Grenzfall $d \rightarrow 0$. Hier verschwindet das Potential, es sei denn man skaliert die Ladung entsprechend mit d so dass das *Dipolmoment* $\vec{p} := qd\vec{n}$ endlich bleibt

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|x\|} + \frac{\frac{1}{2}d\vec{x}\cdot\vec{n}}{\|x\|^3} - \frac{1}{\|x\|} + \frac{\frac{1}{2}d\vec{x}\cdot\vec{n}}{\|x\|^3} \pm \dots \right) \\ &\rightarrow \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{4\pi\epsilon_0\|x\|^3}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Das Feld eines Dipols fällt also stärker für $x \rightarrow \infty$ ab, als für eine Ladung (Monopol): $1/r^3$ vs. $1/r^2$. Andersherum ist es um $x = 0$ stärker, ebenfalls $1/r^3$ vs. $1/r^2$. Es gibt ähnliche Ladungsverteilungen mit ausgeprägterer Asymptotik: Quadrupole, Multipole, die wir später genauer kennenlernen.

Das obige Potential lässt sich schreiben als Ableitung des Potentials einer Punktladung

$$\Phi(x) = -\vec{p}\cdot\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\|x\|}. \quad (1.53)$$

Die Ladungsdichte eines Dipols ist also gegeben als

$$\rho(x) = -\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\delta^3(x). \quad (1.54)$$

Die Ableitung einer delta-Funktion ist mit etwas mehr Vorsicht als die delta-Funktion selbst zu genießen. Wie die delta-Funktion verschwindet sie fast überall:

$$\delta'(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0. \quad (1.55)$$

Um den Punkt $x = 0$ zu verstehen, benutzt man formell die partielle Integration⁹

$$\begin{aligned} \int_V dx f(x) \delta'(x) &= - \int_V dx f'(x) \delta(x) \\ &= \begin{cases} -f'(0) & \text{wenn } 0 \in V, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Es gilt also zum Beispiel $\int dx \delta'(x) = 0$ und $\int dx x\delta'(x) = -1$.¹⁰

⁹Hier ist wieder der Fall $0 \in \partial V$ zu vermeiden, insbesondere wegen des Randterms der partiellen Integration.

¹⁰Man beachte, dass zwar $x\delta(x) \simeq 0$, aber hier $x\delta'(x) \simeq -\delta(x)$ und erst $x^2\delta'(x) \simeq 0$. Man

könnte also formell $\delta(x)/x \simeq -\delta'(x)$ setzen, allerdings sind singuläre Manipulationen von delta-Funktionen mit äusserster Vorsicht zu geniessen (deshalb nur \simeq)!

2 Randwertprobleme der Elektrostatik

Wir befassen uns nun mit der Eindeutigkeit und Lösungsmethoden des Grundproblems der Elektrostatik. Letzteres ist die Aufgabe, für eine gegebene Ladungsverteilung und weitere Randbedingungen, die Konfiguration der Felder zu bestimmen.

2.1 Formulierung und Eindeutigkeit

- Formulierung
- Eindeutigkeit
- Randbedingungen
- Leiter
 - Nolting 2.3.1,2; Jackson 1.8,9

Formulierung. Wir haben bereits gezeigt, dass das elektrische Feld E über das elektrische Potential Φ mittels $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ festgelegt ist. Letzteres steht über die Poisson-Gleichung mit der Ladungsdichte ρ in Beziehung

$$\Delta\Phi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x). \quad (2.1)$$

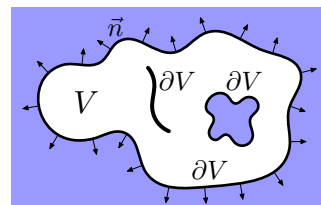
Als Lösung haben wir (direkt aus dem Coulomb-Gesetz) gefunden:

$$\Phi(x) = \int dy^3 \frac{\rho(y)}{4\pi\varepsilon_0\|x-y\|}. \quad (2.2)$$

Allerdings ist diese Lösung weder eindeutig, noch genügt sie den jeweils gewünschten Randbedingungen (z.B. Anwesenheit eines leitenden Objekts, etc.). Wir müssen also verstehen, welche zusätzlichen Freiheiten wir haben und wie diese sich mit geeigneten Randbedingungen festlegen lassen.

Betrachten wir nun das *Randwertproblem* der Poisson-Gleichung auf einem (kompakten) Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand ∂V

$$\Delta\Phi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \quad \text{für } x \in V. \quad (2.3)$$



Die Ladungsverteilung $\rho(x)$ in V (nicht aber auf dem Rand ∂V) sei vorgegeben. Zusätzlich erfüllt $\Phi(x)$ gewisse lineare Randbedingungen auf ∂V .

Eindeutigkeit. Um die Eindeutigkeit einer Lösung zu untersuchen,¹ betrachten wir zwei hypothetische Lösungen Φ_1 und Φ_2 und deren Differenz Ψ . Letztere erfüllt die (homogene) Laplace-Gleichung $\Delta\Psi = 0$ sowie homogene Versionen der Randbedingungen. Jetzt hilft die *erste Greensche Identität* für zwei skalare Funktionen ϕ, ψ weiter

$$\begin{aligned} \int_V dx^3 (\phi \Delta \psi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi) &= \int_V dx^3 \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) \\ &= \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hier und im Folgenden sei \vec{n} ein Einheitsvektor, der senkrecht zu dem Rand ∂V steht und der aus dem Gebiet V hinaus zeigt. Setzen wir $\phi = \psi = \Psi$ mit $\Delta\Psi = 0$ so folgt

$$\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\Psi \vec{\nabla} \Psi) = \int_V dx^3 (\vec{\nabla} \Psi)^2 \geq 0. \quad (2.5)$$

Wenn man annimmt, dass die linke Seite gleich Null ist, so muss aufgrund der Positivität des Integranden auf der rechten Seite $\vec{\nabla} \Psi$ überall verschwinden. Also muss Ψ konstant sein, und diese Konstante hat im Potential keine physikalische Relevanz; die zwei Lösungen Φ_1 und Φ_2 sind also äquivalent. Die zwei gebräuchlichsten Möglichkeiten, die linke Seite gleich Null zu setzen sind:

- *Dirichlet-Randbedingung:* Das Potential Φ auf dem Rand wird vorgegeben

$$\Phi(x) = \omega(x) \quad \text{für } x \in \partial V. \quad (2.6)$$

Damit lautet die homogene Randbedingung $\Psi = 0$.

- *Neumann-Randbedingung:* Die Normalableitung von Φ , d.h. $E_\perp = \vec{n} \cdot \vec{E} = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi$, wird vorgegeben.

$$E_\perp = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(x) = \nu(x) \quad \text{für } x \in \partial V. \quad (2.7)$$

Damit lautet die homogene Randbedingung $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0$.

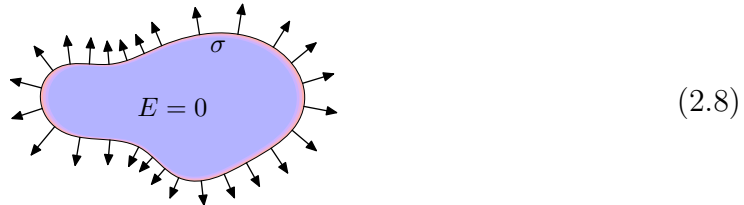
Jede dieser beiden Randbedingungen legt die Lösung also eindeutig fest.

Elektrische Leiter. Die Dirichlet-Randbedingung ist insbesondere für elektrische Leiter relevant. Dazu betrachten wir folgendes Gedankenexperiment: Im Leiter können sich positive oder negative Ladungsträger frei bewegen. Ein nicht-verschwindendes elektrisches Feld versetzt die Ladungsträger im Leiter in Bewegung und rearrangiert somit die Ladungsdichte. Die so induzierte Ladungsdichte wirkt dem induzierenden elektrischen Feld entgegen. In einer statischen Situation muss also $E = 0$ im Inneren des Leiters gelten. Die Ladungsdichte im Leiter ist aufgrund der Feldgleichungen auch Null. Nur am Rand des Leiters bildet sich eine dünne Schicht Ladung, welche das externe elektrische Feld aus dem Leiter abschirmt (*Faradayscher Käfig*). Es ergeben sich folgende Konsequenzen für einen (idealisierten) Leiter im elektrischen Feld:

¹Lösungen zu dem Problem existieren in einer geeigneten Klasse von Funktionen. Wir wollen hier auf den Beweis verzichten, er ergibt sich aus der mathematischen Behandlung elliptischer Differentialgleichung zweiter Ordnung.

- Im Leiter verschwindet das elektrische Feld, $E = 0$. Der Leiter liegt also in der Regel ausserhalb des Bereichs V .
- Die Normalkomponente E_{\perp} von E auf der Leiteroberfläche ist proportional zur induzierten Ladungsdichte σ .
- Die Tangentialkomponenten E_{\parallel} gehen stetig von innen nach aussen über. Das elektrische Feld steht also senkrecht zur Leiteroberfläche, $\vec{E} \sim \vec{n}$.
- Das elektrostatische Potential auf der Leiteroberfläche ist konstant.

Demnach gilt auf Leiteroberflächen die Dirichlet-Randbedingung mit $\Phi = \text{const}$



Freier Raum. Möchte man hingegen eine eindeutige Lösung auf dem gesamten Raum $V = \mathbb{R}^3$ konstruieren, so benötigt man anstelle der Randbedingungen eine gewisse Asymptotik für $x \rightarrow \infty$. Eine konsistente Annahme ist

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{\|x\|} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \sim \frac{1}{\|x\|^2} \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit wähle man eine genügend grosse Fläche A , welche die Ladungsverteilung einschliesst und lässt diese nach ∞ gehen, so dass der Flächeninhalt $A \sim r^2$. Die linke Seite der ersten Greenschen Identität für das Differenzpotential Ψ geht dann gegen Null:

$$\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\Psi \vec{\nabla} \Psi) \sim r^2 \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Damit ist wie zuvor $\Psi = 0$ und die Lösung eindeutig bestimmt.

2.2 Greensche Funktionen

- Freier Raum
- Dirichlet-Randbedingungen
- Neumann-Randbedingungen
- Nolting 2.3.3; Jackson 1.10

Methode. Die Poisson-Gleichung und ähnliche inhomogene lineare partielle Differentialgleichungen löst man häufig mittels *Greenscher Funktionen* $G(x, y)$.²

²Greensche Funktionen sind auch und besonders wichtig in der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie wo sie (aufgrund des Welle-Teilchen Dualismus) die freie Bewegung von Teilchen beschreiben.

Diese beschreiben das Potential $\Phi(x)$ einer Einheits-Punktladung am Ort y und es gilt³

$$\Delta_x G(x, y) \simeq -\delta^3(x - y). \quad (2.11)$$

Per Superpositionsprinzip erhält man das Potential einer allgemeinen Ladungsverteilung $\rho(y)$

$$\Phi(x) \simeq \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dy^3 G(x, y) \rho(y). \quad (2.12)$$

Durch Vergleich mit der Formel für das Potential lautet die Greensche Funktion für den freien Raum $V = \mathbb{R}^3$

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|}. \quad (2.13)$$

Die Funktion $G(x, y)$ ist allerdings durch obige Bedingungen noch nicht eindeutig festlegt. Wie zuvor diskutiert, lassen sich die verbleibenden Freiheitsgrade durch die oben diskutierten Randbedingungen festlegen. Sie werden meist so festgelegt, dass homogene Randbedingungen erfüllt sind. Erstaunlicherweise lassen sich mit so gewählten Greenschen Funktionen, aber auch Lösungen zu inhomogenen Randbedingungen konstruieren. Wir wollen diese Lösung im Folgenden herleiten.

Lösungsansatz. Zur Herleitung einer Formel für das Potential mit Randtermen betrachte man die *zweite Greensche Identität* für zwei skalare Funktionen ϕ, ψ

$$\begin{aligned} \int_V dy^3 (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) &= \int_V dy^3 \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \\ &= \oint_{\partial V} dy^2 \vec{n} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Hier setzt man für $\phi(y) = \Phi(y)$ das Potential und für $\psi(y) = G(x, y)$ eine (zu bestimmende) Funktion, welche die Poisson-Gleichung mit einer Einheits-Punktladung bei x erfüllt⁴

$$\Delta_y G(x, y) = -\delta^3(x - y). \quad (2.15)$$

Weiterhin verwendet man die Poisson-Gleichung für Φ und deklariert die Randbedingungen $\Phi = \omega$ sowie $E_\perp = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \nu$. Man erhält somit einen Ausdruck für das Potential

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dy^3 G(x, y) \rho(y) - \oint_{\partial V} dy^2 \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G(x, y) \omega(y) \\ &\quad - \oint_{\partial V} dy^2 G(x, y) \nu(y). \end{aligned} \quad (2.16)$$

³Die Definitionen Greenscher Funktionen unterscheiden sich oft in konstanten Faktoren in dieser Gleichung. Andere Konventionen weisen z.B. Faktoren von 4π und ε_0 auf.

⁴Man beachte, dass im Vergleich zu oben die Rollen von x und y vertauscht worden sind. Im Folgenden vergessen wir die oben eingeführte Poisson-Gleichung $\Delta_x G(x, y) = -\delta^3(x - y)$. Wir werden später die Symmetrie $G(x, y) \simeq G(y, x)$ herleiten, aus der diese Poisson-Gleichung schliesslich folgt.

Dies ist eine Formel, die im Prinzip für beliebige Konfigurationen der Ladungen und Felder zutrifft und somit das Problem allgemein löst. Allerdings haben wir durch die Ersetzungen $\Phi = \omega$ und $E_\perp = \nu$ auf dem Rand gewisse Konsistenzbedingungen geschaffen: Wir wissen nämlich bereits, dass die gleichzeitige Festlegung von ω und ν das Problem überdefinieren. Nur falls ω , ν und ρ miteinander kompatibel sind, ergibt sich das korrekte Potential Φ . Unglücklicherweise, können wir die Beziehungen nicht konkret definieren oder lösen; sie lassen sich nur über die Kenntnis der Lösung des Potentials herleiten.

Allerdings ist die Greensche Funktion G noch nicht eindeutig durch die obige Poisson-Gleichung festgelegt. Wir nutzen also diese Freiheit aus, um die Konsistenzbedingung zu entschärfen und so zu der eindeutigen Lösung zu gelangen. Im Folgenden diskutieren wir die beiden Arten von Randbedingungen.

Dirichlet-Randbedingung. In der Dirichlet-Randbedingung $\Phi = \omega$ wollen wir keine Annahmen zu ν machen (müssen), allerdings hängt der obige Ausdruck für Φ im Allgemeinen von ν ab. Die Abhängigkeit kann nun durch eine Randbedingung an G eliminiert werden, und zwar

$$G(x, y) = 0 \quad \text{für } y \in \partial V. \quad (2.17)$$

Aufgrund der obigen Überlegungen ist ein solches $G(x, y)$ eindeutig definiert. Dann gilt

$$\Phi(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dy^3 G(x, y) \rho(y) - \oint_{\partial V} dy^2 \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G(x, y) \omega(y). \quad (2.18)$$

Um zu bestätigen, dass dies die Lösung der Poisson-Gleichung ist, betrachten wir zunächst die spezielle Lösung $\Phi(x) = G(z, x)$ mit festem z . Für diese Lösung sind die Ladungsdichte und Randbedingungen gegeben mit

$$\rho(y) = -\varepsilon_0 \Delta_y G(z, y) = \varepsilon_0 \delta^3(y - z), \quad \omega(y) = G(z, y) = 0. \quad (2.19)$$

Durch Einsetzen in obige Lösungsformel folgt die Symmetrie der Funktion G in den beiden Argumenten⁵

$$G(z, x) = G(x, z). \quad (2.20)$$

Schliesslich können wir die Poisson-Gleichung explizit bestätigen

$$\Delta \Phi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int dy^3 \delta^3(x, y) \rho(y) + 0 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x), \quad (2.21)$$

da der zweite Term für $x \notin \partial V$, $y \in \partial V$ verschwindet.

Die Bestätigung der korrekten Randbedingungen ist subtiler, denn für $x \in \partial V$ folgt scheinbar $\Phi(x) = 0 + 0$ was nicht stimmen kann. Hier muss man beachten, dass $G(x, y) = 0$ für $x \in \partial V$ nur exakt gilt, wenn nicht auch $y \in \partial V$. Für $x, y \in \partial V$ gilt hingegen

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G(x, y) = -\delta^2(x - y). \quad (2.22)$$

⁵Der erste Term wird durch die delta-Funktion auf $G(x, z)$ lokalisiert und der Randterm verschwindet aufgrund der Annahme $G(z, y) = 0$ für $y \in \partial V$.

Dies folgt (ohne Beweis) aus $\Delta_y G(x, y) = -\delta^3(x - y)$ und man erhält sofort $\Phi(x) = \omega(x)$ wie gewünscht.

Wir haben also die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen zurückgeführt auf die Konstruktion einer Greenschen Funktion $G(x, y)$ mit $\Delta_y G(x, y) = -\delta^3(x - y)$ für $x, y \in V$ und $G(x, y) = 0$ für $x \in V, y \in \partial V$. Letzteres ist allerdings keineswegs eine leichte Aufgabe. Wir haben auch gesehen, dass eine solche Greensche Funktion $G(x, y)$ symmetrisch in den Argumenten ist. Dies ist physikalisch sinnvoll, denn sie beschreibt letztlich das Potential zwischen zwei Ladungen bei x und y .⁶

Neumann-Randbedingung. Die Neumann-Randbedingungen hat zwei Komplikationen, welche die Lösung etwas schwieriger gestalten. Zum einen ist das Potential durch die Randbedingung nur bis auf eine Konstante bestimmt. Physikalisch stellt dies kein Problem dar, aber in einer expliziten Formel für $\Phi(x)$ sollte diese Konstante irgendwie festgelegt sein, nur wie? Zum anderen muss die Randbedingung $\nu = \vec{n} \cdot \vec{E} = E_\perp$ aufgrund des Satzes von Gauß konsistent mit der gewünschten Ladungsverteilung ρ sein

$$\oint_{\partial V} dy^2 \nu(y) = \oint_{\partial V} dy^2 \vec{n} \cdot \vec{E}(y) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dy^3 \rho(y). \quad (2.23)$$

Ansonsten kann es keine Lösung geben!⁷

Zur Bestimmung der Greenschen Funktion könnte man vermuten, dass die Randbedingung $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G(x, y) = 0$ zum Ziel führe. Allerdings ist diese Forderung nach dem Satz von Gauß inkonsistent: Die naive Vermutung besagt nämlich, dass $G(x, y)$ (für festes x) keinen Fluss durch ∂V besitze, und damit keine Gesamtladung in dem Bereich V existiere. Im Widerspruch dazu impliziert die Poisson-Gleichung eine Einheits-Punktladung bei $y = x \in V$.

Anstelle der naiven Vermutung fordern wir, dass die Neumann-Randbedingung an $G(x, y)$ bei $y \in \partial V$ zumindest *unabhängig von $x \in V$* ist⁸

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G(x, y) = -F(y) \quad \text{für } y \in \partial V. \quad (2.24)$$

Hierbei ist F eine frei wählbare Funktion auf ∂V , welche lediglich folgende Normierungsbedingung erfüllen muss⁹

$$\oint_{\partial V} dy^2 F(y) = 1. \quad (2.25)$$

⁶Die Unterscheidung zwischen erzeugender Ladung bei y und Testladung bei x ist lediglich semantisch. Physikalisch sind sie beide gleichzusetzen.

⁷Interessanterweise sind beide Komplikationen verwandt: Die Konsistenzbedingung reduziert die Anzahl der Bedingungen an Φ . Dies führt dazu, dass ein konstanter Beitrag in Φ unbestimmt ist.

⁸Alternativ kann man fordern $\vec{\nabla}_x (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G(x, y)) = 0$ um die Funktion F formal nicht näher spezifizieren müssen.

⁹Eine typische Wahl ist $F = 1/\text{Vol } \partial V$.

Dies gewährleistet, dass der Fluss von $\vec{\nabla}_y G(x, y)$ durch ∂V konsistent mit der in V enthaltenen Einheits-Ladung ist. Demnach finden wir folgenden Ausdruck für das Potential

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dy^3 G(x, y) \rho(y) - \oint_{\partial V} dy^2 G(x, y) \nu(y) \\ &\quad + \oint_{\partial V} dy^2 F(y) \omega(y) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dy^3 G(x, y) \rho(y) - \oint_{\partial V} dy^2 G(x, y) \nu(y) + U_0.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Hier hängt $\Phi(x)$ zwar noch von $\omega(y)$ ab, allerdings nur über eine Konstante, die dafür sorgt, dass das (ansonsten unbestimmte, mit der Funktion F gewichtete) Mittel von $\Phi(x)$ über ∂V gleich dem Mittel von $\omega(y)$ ist. In jedem Fall ist eine Konstante im Potential ohne physikalische Relevanz.

Um zu zeigen, dass Φ die Poisson-Gleichung löst, benötigen wir die Symmetrie von $G(x, y)$ in x und y . Allerdings ist hier $G(x, y)$ im Allgemeinen nicht exakt symmetrisch, es lässt sich aber eine entsprechende Relation herleiten. Hierzu setzen wir wieder die spezielle Lösung $\Phi(x) = G(z, x)$ ein und finden

$$G(z, x) = G(x, z) + \oint_{\partial V} dy^2 F(y) (G(z, y) - G(x, y)). \quad (2.27)$$

Dies genügt, um die Gültigkeit der Lösung zu zeigen, denn es folgt $\Delta_x G(x, y) = -\delta^3(x - y)$.

Alternativ können wir benutzen, dass $G(x, y)$ nicht eindeutig durch die Poisson-Gleichung $\Delta_y G(x, y) = -\delta^3(x - y)$ und die Neumann-Randbedingung $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G(x, y) = -F(y)$ bestimmt ist. Weitere Greensche Funktionen sind offensichtlich gegeben durch

$$\tilde{G}(x, y) = G(x, y) + K(x) \quad (2.28)$$

mit einer allgemeinen Funktion K die nicht von y abhängt.¹⁰ Die Funktion $K(x)$ lässt sich so wählen, dass \tilde{G} symmetrisch ist

$$\tilde{G}(x, y) = G(x, y) - \oint_{\partial V} dz^2 F(z) G(x, z). \quad (2.29)$$

Wir hätten also als zusätzliche Einschränkung verlangen können, dass $G(x, y)$ symmetrisch in den beiden Argumenten ist.

Es folgt wie zuvor, dass $\Phi(x)$ eine Lösung der Poisson-Gleichung ist. Die Neumann-Randbedingung folgt wiederum aus der Beziehung

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_x \tilde{G}(x, y) = \delta^2(x - y) - F(x) \quad \text{für } x, y \in \partial V. \quad (2.30)$$

Der Vollständigkeit halber lässt sich die Eichung des Potentials $\oint dy^2 F(y) \Phi(y) = \oint dy^2 F(y) \omega(y)$ mittels der Identität $\oint dy^2 F(y) \tilde{G}(x, y) = 0$ zeigen.

¹⁰Man beachte, dass letztere aus der Lösung für Φ genau dann herausfällt, wenn die Randbedingung $\vec{E}_\perp = \nu$ und die Ladungsverteilung ρ kompatibel sind.

2.3 Beispiele

- Bildladungen an der Fläche
- Bildladung an der geerdeten Kugel
- Bildladung an der isolierten Kugel
- Kapazitätskonstanten
- Nolting 2.3.4; Jackson 2.1–4,7

Im folgenden betrachten wir ein paar Beispiele von Greenschen Funktionen für ausgewählte Randbedingungen.

Der Halbraum. Das einfachste Beispiel ist der Halbraum $H \subset \mathbb{R}^3$ mit $x \in H$ genau wenn $x_3 > 0$. Er wird durch die 1,2-Ebene ∂H bei $x_3 = 0$ begrenzt. Nehmen wir an, dass sich dort eine leitende Platte befindet (alternativ kann man den anderen Halbraum mit $x_3 < 0$ als leitend betrachten). Wir müssen also Dirichlet-Randbedingungen wählen. Die Randbedingungen für $x \rightarrow 0$, $x_3 > 0$ sollten wie gehabt asymptotisch abfallende Felder sein. Wir suchen also eine Greensche Funktion $G(x, y)$ mit $\Delta G(x, y) = -\delta^3(x - y)$ welche für $x \in \partial H$ bzw. $y \in \partial H$ sowie für $x \rightarrow \infty$ oder $y \rightarrow \infty$ verschwindet. Die Lösung ist einfach zu finden, wenn man in Betracht zieht, dass die Greensche Funktion für den freien Raum nur vom Betrag des Abstands der Punkte x und y abhängt. Denn es gibt genau einen weiteren Punkt y' , der zu allen Punkten $x \in \partial H$ denselben Abstand hat wie y . Dies ist genau das Bild von y unter Spiegelung an der Randebene:



Wir subtrahieren also die freie Greensche Funktion $G(x, y')$ und erhalten so die gewünschte Greensche Funktion für den Halbraum mit Dirichlet-Randbedingungen

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\|x - y\|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\|x - y'\|}. \quad (2.32)$$

Der Rand wirkt als ob zu jeder Ladung im Halbraum eine entgegengesetzte *Spiegelladung* $q' = -q$ im anderen Halbraum existiert.

Wir überprüfen kurz die gewünschten Eigenschaften.

- $\Delta G = -\delta^3(x - y) + \delta^3(x - y')$. Dies ist akzeptabel, denn für $x, y \in H$ trägt nur der erste Term bei.
- $G = 0$ für $y \in \partial H$ denn dort gilt $y = y'$.
- $G \sim 1/\|x\|$ für $x \rightarrow \infty$ da es für beide Terme individuell gilt.
- G ist symmetrisch in x und y denn $\|x - y'\| = \|x' - y\|$.

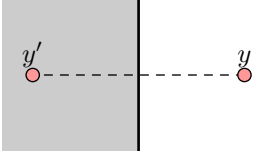
Betrachten wir nun noch die Normalableitung auf dem Rand. Für $y \in \partial H$ gilt

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G = - \frac{\vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})}{2\pi\|x - y\|^3}. \quad (2.33)$$

Diese Funktion beschreibt die Normalkomponente E_\perp des elektrischen Felds auf ∂H und damit die induzierte Ladungsdichte σ . Weiterhin ist sie wichtig für die Realisierung der Randbedingung in der allgemeinen Lösung, die auf einer Subtilität beruht. Dazu schauen wir uns den Grenzfall $x \rightarrow \partial H$ an: In der Regel verschwindet der Zähler während der Nenner endlich bleibt. Dennoch ist der Grenzwert der Funktion nicht trivial. Im Grenzfall $x \rightarrow y$ divergiert die Funktion nämlich quadratisch, d.h. man muss diesen Punkt gesondert untersuchen. Betrachtet man $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G$ als Familie von Funktionen von x_1, x_2 mit Parameter x_3 , so findet man, dass das Integral $\int dx_1 dx_2 \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G = -1$ unabhängig von x_3 und y ! Im Grenzfall $x_3 \rightarrow 0$ erhält man also die zweidimensionale delta-Funktion

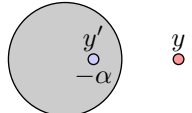
$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G|_{x_3=0} = -\delta^2(x - y). \quad (2.34)$$

Alternativ können wir auch den Halbraum mit Neumann-Randbedingungen betrachten. Hier ist die Greensche Funktion ebenfalls durch Bildladungen gegeben, allerdings mit gleichen Vorzeichen

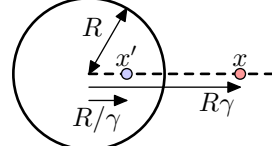
$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|} + \frac{1}{4\pi\|x - y'\|}. \quad (2.35)$$


Man zeigt leicht, dass $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G = 0$. Dies ist nicht im Widerspruch mit dem Satz von Gauß, denn der ∂H berandet kein kompaktes Gebiet.

Aussenraum einer Kugel. Wir haben uns von der Nützlichkeit der Methode der Spiegelladungen überzeugt. Betrachten wir als nächstes den Aussenraum D einer leitenden Kugel mit Radius R um den Ursprung $x = 0$ und versuchen eine geeignete Spiegelladung zu finden. Als Ansatz kann man (glücklicherweise) wieder eine Spiegelladung wählen

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x - y\|} - \frac{\alpha}{4\pi\|x - y'\|}, \quad (2.36)$$


wobei der Ort y' und die relative Stärke α der Spiegelladung zu bestimmen ist, so dass $G(x, y) = 0$ für $y \in \partial D$. Die Lösung für dieses Problem lautet

$$\vec{y}' = \frac{R^2}{\|y\|^2} \vec{y}, \quad \alpha = \frac{R}{\|y\|}. \quad (2.37)$$


Man bezeichnet die Abbildung $y \mapsto y'$ als *Inversion an der Sphäre*. Um die gewünschten Eigenschaften von $G(x, y)$ zu zeigen bietet sich die folgende Identität an

$$\|y\|^2 \|x - y'\|^2 = \|y\|^2 \|x\|^2 - 2R^2 \vec{x} \cdot \vec{y} + R^4 = \|x\|^2 \|x' - y\|^2. \quad (2.38)$$

Sie impliziert, dass die Greensche Funktion symmetrisch in x und y ist. Im Fall $y \in \partial D$, d.h. $\|y\| = R$, gilt wegen $y' = y$ und $\alpha = 1$ auch direkt die Randbedingung $G(x, y) = 0$. Für $y \in D$ ist weiterhin $y' \notin D$, so dass keine weitere Quelle in D erzeugt wird.

Im Vergleich zum Halbraum tritt hier eine Besonderheit auf, denn die indizierte Gesamtladung auf der Kugeloberfläche $-\alpha$ hängt vom Ort der Originalladung ab. Dies hängt damit zusammen, dass die Greensche Funktion für Dirichlet-Randbedingungen immer von einem geerdeten Rand ausgeht. Über die Erdung kann Ladung zu- oder abfließen wenn die Originalladung verschoben wird.

Um das Problem für einen nicht-geerdeten Leiter mit Potential U zu lösen, setzen wir in der allgemeinen Lösung $\rho(x) = \delta^3(x - y)q$, so dass

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{q}{\varepsilon_0} G(x, y) - U \oint_{\partial D} dz^2 \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_z G(x, z) \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi\|x - y\|} - \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{R}{\|y\|} \frac{1}{4\pi\|x - y'\|} + U \frac{R}{\|x\|}.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Das Integral im letzten Term folgt direkt aus dem Satz von Gauß für die Spiegelladung in $G(x, y)$. Das Potential folgt also aus der Ortsabhängigkeit des Betrags der Spiegelladung. Man kann ihn als weitere Punktladung auffassen, die im Zentrum der Kugel lokalisiert ist, und somit lediglich ein uniformes Potential auf der Kugeloberfläche erzeugt:



Schliesslich können wir das neue Randwertproblem betrachten, in welchem die Kugeloberfläche leitend aber isoliert von Ladungsquellen ist. Die gesamte induzierte Ladung muss also Null sein. Dazu setzen wir $U = q/4\pi\varepsilon_0\|y\|$. Nun sind alle Terme proportional zu q und wir erhalten die Lösung

$$\Phi(x) = \frac{q}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{4\pi\|x - y\|} - \frac{R}{4\pi\|y\|\|x - y'\|} + \frac{R}{4\pi\|y\|\|x\|} \right]. \quad (2.41)$$

Man sollte sich allerdings nicht von dem Erfolg der Methode der Spiegelladungen für die zwei eben behandelten Geometrien verführen lassen. Für andere Geometrien funktioniert die Methode bestenfalls näherungsweise. Dass Spiegelladungen für die Kugel exakte Ergebnisse liefern, hängt mit konformer Symmetrie zusammen, die wir etwa später diskutieren wollen.

Ein gutes Beispiel mit einer exakten aber weniger intuitiven Lösung ist der Aussenraum der Kugel mit Neumann-Randbedingungen. Die Greensche Funktion lautet hier (ohne Herleitung)

$$\begin{aligned}G(x, y) &= \frac{1}{4\pi\|x - y\|} + \frac{R}{4\pi\|y\|\|x - y'\|} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi R} \log \frac{\|y\|\|x - y'\| + \vec{y} \cdot (\vec{x} - \vec{y}')}{\|x\|\|y\| + \vec{x} \cdot \vec{y}}.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Die beiden ersten Terme beschreiben wie zuvor die eigentliche Ladung und die gespiegelte Ladung (hier mit gleichem Vorzeichen). Der verbleibende Term wird benötigt um die Neumann-Randbedingung zu erfüllen. Er beschreibt eine eindimensionale Ladungsverteilung auf dem Intervall zwischen 0 und y' mit Ladungsdichte $-1/R$:



$$(2.43)$$

Interessanterweise gleichen sich die induzierten Ladungen im Inneren der Kugel genau aus. Somit kann auch die Neumann-Randbedingung auf der Kugeloberfläche homogen erfüllt werden $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_y G = 0$.¹¹

Kapazitätskonstanten. Schliesslich untersuchen wir, wie sich die Potentiale und Ladungen auf einer Menge von N metallischen Leitern L_i gegenseitig beeinflussen:



$$(2.44)$$

Im umgebenden Raum \bar{L} sollen keine weiteren Ladungen vorhanden sein. Das Potential auf den Leiteroberflächen ∂L_i soll durch U_i gegeben sein und für $x \rightarrow \infty$ wie gehabt verschwinden.

Die allgemeine Lösung des Randwertproblems sowie das Superpositionsprinzip legen folgende Struktur der Lösung nahe

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^N U_i \Gamma_i(x) \quad \text{mit} \quad \Gamma_i(x) = \delta_{ij} \text{ für } x \in \partial L_j. \quad (2.45)$$

Die Energie des Feldes ist dann gegeben durch

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 (\vec{\nabla} \Phi)^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^N C_{ij} U_i U_j \quad (2.46)$$

mit

$$C_{ij} := \varepsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 \vec{\nabla} \Gamma_i \cdot \vec{\nabla} \Gamma_j. \quad (2.47)$$

Die Konstanten C_{ij} werden *Kapazitätskonstanten* genannt, und die Matrix C_{ij} ist symmetrisch und positiv definit, denn offensichtlich gilt $W \geq 0$ und $W = 0$ genau für $U_i = 0$.

Um die Interpretation als Kapazitäten zu bestätigen, entwickle man W , indem man den Integranden als Divergenz schreibt, und die Randterme auf den

¹¹Dies steht nicht im Widerspruch zu den obigen Aussagen betreffend der Normierung dieser Funktion, denn hier ist das Gebiet D nicht kompakt. Allgemein muss die Normierung der Funktion entsprechend angepasst werden, falls das Gebiet nicht kompakt ist oder sein Rand mehrere Komponenten hat.

Komponenten ∂L_i einzeln auswertet

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\bar{L}} dx^3 \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{\nabla} \Phi) \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \sum_{i=1}^N \oint_{\partial L_i} dx^2 \Phi(x) \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(x) \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \sum_{i=1}^N U_i \oint_{\partial L_i} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i Q_i.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Hier sind Q_i die auf ∂L_i indizierten Ladungen und es gilt durch Vergleich

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} U_j. \tag{2.49}$$

3 Elektrostatik in Kugelkoordinaten

Zwei weitere Lösungsansätze für unser Randwertproblem sind die Separation der Variablen und die Entwicklung nach geeigneten Eigenfunktionen, die wir anhand der Kugelkoordinaten und Kugelflächenfunktionen illustrieren möchten.

3.1 Separation der Variablen

- Separation der Variablen
- Separation in kartesischen Koordinaten
 - Nolting 2.3.5,6; Jackson 2.9,10

Betrachten wir das Problem der homogenen Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)$

$$\Delta\Phi = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \Phi = 0. \quad (3.1)$$

Die *Separation der Variablen* besteht in dem Ansatz, Φ als Produkt von Funktionen zu schreiben, welche jeweils nur von einer Untermenge der Variablen abhängen. Zum Beispiel sei $\Phi(\vec{x}) = \Phi_{xy}(x, y)\Phi_z(z)$, welches nach Division durch Φ zu einer separierten Gleichung führt

$$\frac{1}{\Phi_{xy}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \Phi_{xy} + \frac{1}{\Phi_z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \Phi_z = 0. \quad (3.2)$$

Die entscheidende Einsicht ist hier, dass der rechte Term nur von z abhängt, während der linke eine Funktion von x und y ist. Die Differentialgleichung kann also nur gelöst werden, wenn beide Seiten konstante Funktionen sind, d.h. sowohl Φ_{xy} als auch Φ_z müssen Eigenfunktionen sein

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \Phi_{xy} = \lambda \Phi_{xy}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \Phi_z = -\lambda \Phi_z. \quad (3.3)$$

Auf diese Weise erhalten wir Lösungen, für die die Abhängigkeit von x und y und jene von z nur durch den gemeinsamen Eigenwert λ gekoppelt sind. Dies ist insbesondere hilfreich, wenn die Geometrie des Problems eine solche Trennung vorgibt, z.B. ein Draht entlang der z -Richtung oder ein flächenartiges Objekt in der x, y -Ebene. Durch Superposition lassen sich mit dieser Methode letztlich aber auch allgemeine Lösungen konstruieren, und zwar in der Form von unendlichen Reihen.

3.2 Kugelkoordinaten

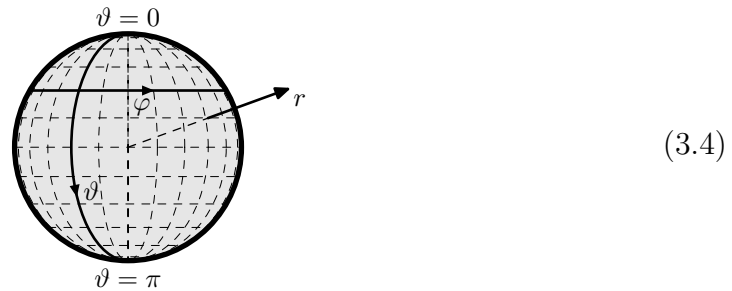
- Kugelkoordinaten
- Jacobi-Matrix
- Laplace-Operator
- Integration
- Jackson 3.1

Es zwingt uns niemand, die Separation nach kartesischen Koordinaten vorzunehmen. Die Faktoren im Separationsansatz können durchaus von anderen Arten von Koordinaten bzw. generellen Funktionen der kartesischen Koordinaten abhängen. Hiermit kann der Geometrie des Problems besser Rechnung getragen werden. Nützliche krummlinige Koordinaten sind zum Beispiel:

- Zylinderkoordinaten – gerader Draht (Strom in einem Leiter, siehe später),
- Kugelkoordinaten – rotationssymmetrische oder punkartige Ladungsverteilung.

Führen wir also die *Kugelkoordinaten* in Hinblick auf die Verwendung in partiellen Differentialgleichungen ein:

- Radiale Koordinate r mit $r \geq 0$,
- Polarwinkel ϑ mit $0 \leq \vartheta \leq \pi$,
- Azimutwinkel φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ (periodisch identifiziert).



Die Beziehung zu den kartesischen Koordinaten x, y, z lautet¹

$$\begin{aligned} r &= \|x\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \vartheta &= \arccos(z/r), \\ \varphi &= \arctan(y/x) + \pi \theta(-x) \operatorname{sign} y. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die inverse Koordinatentransformation lautet

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Um Differentialoperatoren zu transformieren, benötigen wir die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(r, \vartheta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi & r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi / \sin \vartheta & \cos \varphi / \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

¹Man beachte, dass die Transformation singulär an den Stellen $r = 0$ (Ursprung) und $\vartheta = 0, \pi$ (Nord- und Südpol) ist.

Für den Laplace-Operator erhält man nach einigen Rechnungen

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2. \quad (3.8)$$

Auch wenn die Variablen hier etwas mischen, eignet sich diese Form noch gut für einen Separationsansatz.

Das Volumenelement in Kugelkoordinaten erhält als Faktor das Inverse der Determinante der Jacobi-Matrix

$$\int dx^3 = \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi =: \int_0^\infty dr r^2 \oint d^2 \Omega. \quad (3.9)$$

Die Gesamtfläche einer Kugelschale mit Einheitsradius beträgt $\oint d^2 \Omega = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta = 4\pi$. Die meisten der Faktoren 4π in der Elektrodynamik lassen sich auf die Fläche einer Kugelschale zurückführen. So ist z.B. das Potential einer Punktladung auf einer Kugelschale bei festem Abstand offensichtlich konstant. Um die Übersicht nicht mit solchen Faktoren zu verstellen, bietet es sich an, das Integral über eine Kugelschale generell mit einem Normierungsfaktor von $1/4\pi$ zu versehen, so dass z.B. $(1/4\pi) \oint d^2 \Omega = 1$.

3.3 Kugelflächenfunktionen

- Eigenfunktionen von \vec{L}^2
- Eigenfunktionen von L_z
- (verallgemeinerte) Legendre-Gleichung
- reguläre Lösungen
- orthogonale Polynome
- Legendre-Polynome, Rodrigues-Formel
- Kugelflächenfunktionen
- Beispiele
 - Nolting 2.3.7; Jackson 3.2–4

Als nächstes wollen wir eine Basis von Funktionen herleiten, für die der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten geeignet separiert.

Separation. Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten spaltet auf in einen radialen Anteil $(\partial/\partial r)^2 + 2r^{-1}(\partial/\partial r)$ und einen Anteil entlang der Kugelschale S^2 , welchen wir mit $-r^{-2}\vec{L}^2$ bezeichnen wollen. Hier ist

$$\vec{L}^2 := -\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)^2 - \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2. \quad (3.10)$$

Der zugrundeliegende Differentialoperator \vec{L} ist ein Vektor welcher Rotationen um alle drei Raumrichtungen generiert. Hier werden wir vor allem die z -Komponente

benötigen,²

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.11)$$

welche mit \vec{L}^2 kommutiert, $[\vec{L}^2, L_z] = 0$. Diese Eigenschaft ist hilfreich um Eigenfunktionen $F(\vartheta, \varphi)$ von \vec{L}^2 zu bestimmen. Letztere werden Kugelflächenfunktionen genannt und sind vor allem auch für die Quantenmechanik relevant.

Wir möchten nun das Eigenwertproblem

$$\vec{L}^2 f(\vartheta, \varphi) = \lambda f(\vartheta, \varphi) \quad (3.12)$$

lösen und verwenden Separation der Variablen $f(\vartheta, \varphi) = g(\vartheta)h(\varphi)$. Indem man die Eigenwertgleichung durch $h(\varphi)$ teilt, kann man sich leicht überzeugen, dass der Term $h''/h \sin^2 \vartheta$ unabhängig von φ sein muss, denn alle anderen Terme sind es auch. Die Lösung dieses Problems lautet

$$h_m(\varphi) = e^{im\varphi}. \quad (3.13)$$

Hier muss m eine ganze Zahl sein, damit die Funktion h periodisch unter $\varphi \mapsto \varphi + 2\pi$ ist.

Diese Lösung ist insbesondere eine Eigenfunktion des Operators L_z mit Eigenwert m . Man beachte, dass dies keine Einschränkung unserer Lösung ist, denn L_z kommutiert mit \vec{L}^2 und hat somit gemeinsame Eigenfunktionen. Gleichzeitige Eigenfunktionen der anderen Komponenten von \vec{L} sind nicht möglich, da i.A. $[L_i, L_j] \neq 0$.

Man beachte weiterhin, dass $h(\varphi)$ eine komplexe Funktion ist, während das elektrische Feld prinzipiell reell ist. Anstelle der komplexen Funktion $h_m(\varphi)$ kann man auch die reellen Linearkombinationen $\text{Re } h_m(\varphi) = \cos(m\varphi)$ und $\text{Im } h_m(\varphi) = \sin(m\varphi)$ wählen. Letztere sind allerdings keine Eigenfunktionen von L_z , lediglich von L_z^2 .

Wir haben die Eigenwertgleichung somit wie folgt reduziert

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)^2 - \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} - \lambda \right] g(\vartheta) = 0. \quad (3.14)$$

Die verbleibende Differentialgleichung in einer Variablen ϑ ist gut zu lösen. In Kugelkoordinaten ist oft die Substitution $u = \cos \vartheta$ sinnvoll. Für die Ableitung gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial u} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial u} = -\sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3.15)$$

und die neue Differentialgleichung lautet

$$\left[(u^2 - 1) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u} - \frac{m^2}{u^2 - 1} - \lambda \right] P(u) = 0. \quad (3.16)$$

²Die Wahl von L_z hängt mit der konventionellen Auszeichnung der z -Achse in Kugelkoordinaten zusammen. Die Auszeichnung hat keine physikalische Relevanz, und man könnte stattdessen jede andere Achse wählen.

Dies ist die verallgemeinerte *Legendre-Gleichung*. Die Lösungen heissen assoziierte *Legendre-Funktionen*. Betrachten wir zunächst den Spezialfall $m = 0$, welcher die gewöhnliche Legendre-Gleichung genannt wird.

Legendre-Polynome. Aufgrund des Vorfaktors $u^2 - 1$ kann man davon ausgehen, dass gewöhnliche Lösungen der Legendre-Gleichung bei $u = \pm 1$ divergieren. Dies würde zu unerwünschten Verhalten an den Nord- und Südpolen der Kugel führen und ist somit zu vermeiden. Nur für bestimmte Werte von λ ist dies möglich und die Lösungen sind dort Polynome $P_\ell(u)$ vom Grad ℓ .

Diese *Legendre-Polynome* sind charakterisiert durch die Eigenschaft

$$\int_{-1}^{+1} du u^k P_\ell(u) = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq k < \ell. \quad (3.17)$$

Diese Eigenschaft bestimmt P_ℓ eindeutig bis auf einen Vorfaktor: Das Polynom $P_\ell(u)$ hat $\ell + 1$ Koeffizienten, von denen ℓ durch die (unabhängigen) Gleichungen festgelegt sind. Weiterhin ist $\alpha P_\ell(u)$ ebenfalls eine Lösung für einen beliebigen Vorfaktor α .

Wir wollen nun beweisen, dass diese P_ℓ die Legendre-Gleichung erfüllen, welche wir zunächst als Eigenwertgleichung schreiben

$$\mathcal{L}P_\ell(u) = \lambda P_\ell(u) \quad (3.18)$$

mit dem Differentialoperator

$$\mathcal{L} := (u^2 - 1) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + 2u \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.19)$$

Dazu zeigen wir, dass $\mathcal{L}P_\ell$ ebenfalls ein Polynom vom Grad ℓ ist, welches obige Eigenschaft besitzt. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung muss P_ℓ die Eigenwertgleichung erfüllen.

Zunächst untersuchen wir die Wirkung von \mathcal{L} auf das führende Glied eines Polynoms

$$\mathcal{L} u^\ell = \ell(\ell + 1)u^\ell + \dots \quad (3.20)$$

Dies zeigt zum einen, dass \mathcal{L} den Grad eines Polynoms erhält. Zum anderen bestimmt es den Eigenwert der Legendre-Gleichung

$$\lambda = \ell(\ell + 1). \quad (3.21)$$

Als zweiten Schritt setzen wir $\mathcal{L}P_\ell$ in das obige Integral ein und führen zweimal

partielle Integration aus

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{+1} du u^k \mathcal{L}P_\ell(u) \\
&= \int_{-1}^{+1} du u^k \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_\ell(u) \\
&= u^k (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_\ell(u) \Big|_{-1}^{+1} - k \int_{-1}^{+1} du u^{k-1} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_\ell(u) \\
&= u^k (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P_\ell(u) \Big|_{-1}^{+1} - k u^{k-1} (u^2 - 1) P_\ell(u) \Big|_{-1}^{+1} \\
&\quad + k \int_{-1}^{+1} du P_\ell(u) \frac{\partial}{\partial u} [u^{k-1} (u^2 - 1)]. \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Die ersten beiden Terme sind Null dank des Faktors $u^2 - 1$; der letzte Term ist Null aufgrund der Eigenschaft von P_ℓ , denn der hintere Faktor ist ein Polynom vom Grad $k < \ell$. Somit besitzt $\mathcal{L}P_\ell$ dieselben Eigenschaften und ist damit proportional zu P_ℓ .

Eine explizite Form für die Legendre-Polynome ist durch die *Rodrigues-Formel* gegeben

$$P_\ell(u) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{du} \right)^\ell (u^2 - 1)^\ell. \tag{3.23}$$

Man kann mittels partieller Integration problemlos zeigen, dass für diese Form $\int_{-1}^{+1} du u^k P_\ell(u) = 0$ gilt.

Aus obigen Betrachtungen folgt, dass die P_ℓ einen Satz von Funktionen auf dem Intervall $-1 \leq u \leq +1$ bilden, der folgende Orthogonalitätsbedingung erfüllt

$$\int_{-1}^{+1} du P_k(u) P_\ell(u) = 0 \quad \text{für } k \neq \ell. \tag{3.24}$$

Ihre Normierung kann man ebenfalls mittels elementarer Integrale ableiten:

$$\int_{-1}^{+1} du P_\ell(u)^2 = \frac{2}{2\ell + 1}. \tag{3.25}$$

Für den allgemeinen Fall $m \neq 0$ mit $|m| \leq \ell$ erhält man die Lösungen als

$$P_\ell^m(u) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - u^2)^{m/2} \left(\frac{d}{du} \right)^{\ell+m} (u^2 - 1)^\ell. \tag{3.26}$$

Diese Funktionen erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell^m(u) P_{\ell'}^m(u) = \delta_{\ell,\ell'} \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}. \tag{3.27}$$

Kugelflächenfunktionen. Die normierten *Kugelflächenfunktionen* $Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$ sind somit gegeben durch³

$$Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (3.28)$$

Sie erfüllen die Eigenwertgleichungen

$$\vec{L}^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}, \quad L_z Y_{\ell,m} = m Y_{\ell,m}. \quad (3.29)$$

Wir sehen, dass das Spektrum von \vec{L}^2 quantisiert ist als $\ell(\ell+1)$ und für jedes ganzzahlige $\ell \geq 0$ gibt es $2\ell+1$ Werte von m : $-\ell, -\ell+1, \dots, +\ell-1, +\ell$.

Beispiele: Durch Einsetzen erhält man für die niedrigsten $Y_{\ell,m}$

$$\begin{aligned} Y_{0,0} &= 1, \\ Y_{1,0} &= \sqrt{3} \cos \vartheta = \sqrt{3} \frac{z}{r}, \\ Y_{1,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x \pm iy}{r}, \\ Y_{2,0} &= \sqrt{\frac{5}{4}} (3 \cos^2 \vartheta - 1) = \sqrt{\frac{5}{4}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}, \\ Y_{2,\pm 1} &= \sqrt{\frac{15}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{\pm i\varphi} = \sqrt{\frac{15}{2}} \frac{z(x \pm iy)}{r^2}, \\ Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{8}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi} = \sqrt{\frac{15}{8}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.4 Orthogonalität und Vollständigkeit

- Orthogonalität
- Vollständigkeit
- Analogie Fourier-Transformation

Die Kugelflächenfunktionen bilden ein orthogonales System von Funktionen auf S^2

$$\frac{1}{4\pi} \int d\vartheta \sin \vartheta d\varphi Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell',m'}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}. \quad (3.31)$$

Dies folgt aus der Orthogonalität der Fourier-Reihen und der assoziierten Legendre-Funktionen.

Weiterhin bilden die Kugelflächenfunktionen eine vollständige Basis des Raums $L^2(S^2)$ von quadratintegrablen Funktionen auf der Kugeloberfläche. Es gilt

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell',m'}^*(\vartheta, \varphi) = \frac{4\pi}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (3.32)$$

³Je nach Konvention enthalten die Kugelflächenfunktionen einen zusätzlichen Normierungsfaktor von $1/\sqrt{4\pi}$.

Demnach kann man für quadratintegrale Funktionen schreiben

$$F(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi) f_{\ell, m} \quad (3.33)$$

mit

$$f_{\ell, m} = \frac{1}{4\pi} \oint d^2\Omega Y_{\ell, m}^*(\vartheta, \varphi) F(\vartheta, \varphi). \quad (3.34)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind somit das Analogon der Basis $e^{im\varphi}$ für quadratintegrale periodische Funktionen, welche man als Funktionen auf dem Kreis S^1 verstehen kann. Die lineare Transformation $F(\vartheta, \varphi) \leftrightarrow f_{\ell, m}$ ist die Verallgemeinerung der Fourier-Transformation von S^1 nach S^2 . Analoge orthogonale Funktionensysteme gibt es natürlich auch für alle höherdimensionalen Sphären S^k .

3.5 Multipolentwicklung

- Kugelkoordinaten
- Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen
- kartesische Koordinaten
 - Nolting 2.2.6–8, 2.3.8; Jackson 4.1,2

Schliesslich wollen wir eine Ladungsverteilung betrachten, die auf einen Bereich um den Ursprung⁴ beschränkt ist

$$\rho(x) = 0 \quad \text{für } \|x\| = r \geq R. \quad (3.35)$$

In genügend grossem Abstand $r \gg R$ erscheint die Ladungsverteilung im Wesentlichen punktförmig und es sollte gelten

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \mathcal{O}(1/r^2). \quad (3.36)$$

Die Gesamtladung Q dominiert das Verhalten für $r \rightarrow \infty$. Korrekturen werden durch sog. Multipolmomente bestimmt. Wir wollen diese genauer untersuchen.

Kugelkoordinaten. Eine Betrachtung in Kugelkoordinaten erscheint sinnvoll, da wir nahezu Rotationssymmetrie haben. Für $r > R$ gilt zudem $\rho(x) = 0$, so dass im Aussenraum die homogene Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten gilt

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \Phi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Phi - \frac{1}{r^2} \vec{L}^2 \Phi = 0. \quad (3.37)$$

Wir entwickeln nun Φ in Kugelkoordinaten:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} \Phi_{\ell, m}(r) Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi) \quad (3.38)$$

⁴Anstelle des Ursprungs kann man natürlich jeden anderen beliebigen Punkt wählen.

und setzen dies ein. Da $Y_{\ell,m}$ eine Eigenfunktion von \vec{L}^2 ist, erhält man direkt eine separierte Differentialgleichung

$$\sum_{\ell,m} Y_{\ell,m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \ell(\ell+1) \right] \Phi_{\ell,m}(r) = 0. \quad (3.39)$$

Da die Kugelflächenfunktionen eine Basis bilden, muss jeder Summand individuell verschwinden. Weiterhin ist der Differentialoperator homogen in r , d.h. der Ansatz $\Phi = r^\alpha$ führt ohne Weiteres zur Lösung

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \ell(\ell+1) \right] r^\alpha \\ &= r^{\alpha-2} [\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - \ell(\ell+1)]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dies hat offensichtlich die Lösungen $\alpha = \ell$ und $\alpha = -\ell - 1$. Da Φ für $\alpha = \ell \geq 0$ und $r \rightarrow \infty$ nicht gegen Null geht, legen die üblichen Randbedingungen die Lösung $\alpha = -\ell - 1$ fest.

Die allgemeine Lösung im Aussenraum lautet also

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell,m} \frac{Q_{\ell,m}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2\ell+1)r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi). \quad (3.41)$$

Die unbestimmten Konstanten $Q_{\ell,m}$ werden sphärische *Multipolmomente* genannt. $Q_{0,0}$ ist die Gesamtladung Q , $Q_{1,m}$ beschreibt die 3 Dipolmomente \vec{P} , u.s.w.. Allgemein lassen sie sich über die folgende Formel berechnen

$$Q_{\ell,m} = \int d^2\Omega dr r^{2+\ell} Y_{\ell,m}^*(\vartheta, \varphi) \rho(r, \vartheta, \varphi). \quad (3.42)$$

Diese Formel beruht auf der Entwicklung von $1/\|x - x'\|$ für $\|x\| > \|x'\|$ in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{\|x - x'\|} = \sum_{\ell,m} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (3.43)$$

Setzt man diese Identität in die allgemeine Formel für das Potential ein, erhält man den obigen Ausdruck für $Q_{\ell,m}$.

Wir wollen die obige Identität beweisen. Für genügend grosse $\|x\|$ gilt die Laplace-Gleichung, wir können also den Multipolansatz verwenden. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Ausdrucks können wir zunächst x' auf die positive z -Achse legen, so dass $\vartheta' = 0$. Die Festlegung von x' bricht die Symmetrie für x auf Rotationen um die z -Achse. Demnach darf $1/\|x - x'\|$ nicht von φ abhängen; alle Koeffizienten mit $m \neq 0$ sind also verboten. Die Multipolentwicklung liefert dann

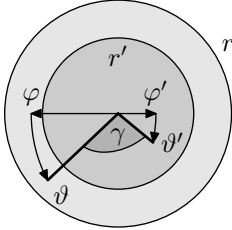
$$\frac{1}{\|x - x'\|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \vartheta). \quad (3.44)$$

Wenn wir zudem $\vartheta = 0$ setzen und die Normierung von P_ℓ durch $P_\ell(1) = 1$ verwenden,

$$\frac{1}{\|x - x'\|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_\ell}{r^{\ell+1}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{r - r'} \quad (3.45)$$

erhalten wir durch Abgleich mit der geometrischen Reihe $A_\ell = r'^\ell$.

Es verbleibt, die Festlegung auf den Winkel $\vartheta' = 0$ aufzuheben. Wir können unser bisheriges Ergebnis schreiben als

$$\frac{1}{\|x - x'\|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \gamma). \quad (3.46)$$


Hier bezeichnet γ den Winkel, welchen die Punkte x, x' aus der Perspektive des Ursprungs bilden. Für $\vartheta' = 0$ gilt $\gamma = \vartheta$, aber das Ergebnis gilt aufgrund der Rotationssymmetrie für allgemeine Winkel. Der verbleibende Schritt besteht in dem Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$\frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi') = P_\ell(\cos \gamma), \quad (3.47)$$

wobei $\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$ der Kosinus des relativen Winkels ist. Der Beweis beruht auf verschiedenen Tatsachen, und wir wollen ihn nicht nachvollziehen.

Kartesische Koordinaten. Die Multipolentwicklung lässt sich auch in kartesischen Koordinaten schreiben und der Vergleich mit den Kugelkoordinaten ist instruktiv. Wir beginnen wieder mit dem Ausdruck für das Potential einer allgemeinen Ladungsverteilung

$$\Phi(x) = \int dy^3 \frac{\rho(y)}{4\pi\epsilon_0 \|x - y\|}. \quad (3.48)$$

Für $\|x\| \rightarrow \infty$ entwickeln wir $1/\|x - y\|$ und erhalten als führende Terme

$$\frac{1}{\|x - y\|} = \frac{1}{\|x\|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|x\|^3} + \frac{3(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - \vec{x}^2 \vec{y}^2}{2\|x\|^5} + \dots \quad (3.49)$$

Somit gilt

$$\Phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|x\|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 \|x\|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{x_i x_j R_{ij}}{4\pi\epsilon_0 \|x\|^5} + \dots \quad (3.50)$$

Mit Multipolmomente sind gegeben durch

$$\begin{aligned} Q &= \int dx^3 \rho(x), \\ \vec{P} &= \int dx^3 \rho(x) \vec{x}, \\ R_{ij} &= \int dx^3 \rho(x) (3x_i x_j - \delta_{ij} \vec{x}^2). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Der *Quadrupoltensor*⁵ R_{ij} ist spurlos, denn $\sum_i R_{ii} = \int dx^3 \rho(x) (3\vec{x}^2 - 3\vec{x}^2) = 0$. Höhere Multipolmomente lassen sich analog berechnen und verwenden. Sie werden ausgedrückt als total symmetrische Tensoren, für die jede Spur über zwei Indizes verschwindet. Man beachte, dass Q ein Skalar ist, \vec{P} ein Vektor mit 3 Komponenten und R ein Tensor mit 5 unabhängigen Komponenten. Ein entsprechender Tensor mit ℓ Indizes hat genau $2\ell + 1$ unabhängige Komponenten. Es besteht also ein direkter Zusammenhang zwischen den Kugelflächenfunktionen und symmetrisch-spurlosen Tensoren.

3.6 Darstellungen der Rotationsgruppe

- Gruppe und Darstellungen
- Vektordarstellung
- Tensor Produkte, Addition
- Zerlegung in Spur, symmetrisch-spurlos und antisymmetrisch
- Höhere Darstellungen
- Vergleich Kugelflächenfunktionen

Die Rotationen in drei Dimensionen bilden eine (kontinuierliche) Gruppe, welche $SO(3)$ genannt wird. Kugelflächenfunktionen kann man gut mittels Darstellungen dieser Gruppe erklären. Wir wollen deshalb etwas die Rotationsgruppe und ihre Darstellungen besprechen.

Rotationsgruppe. Die Elemente $R \in SO(3)$ der Gruppe sind reelle orthogonale 3×3 Matrizen, welche Vektoren rotieren, d.h.

$$\vec{x}' = R\vec{x} \quad \text{bzw. in Komponenten} \quad x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j. \quad (3.52)$$

Orthogonalität bedeutet, dass R die Eigenschaft $R^\top = R^{-1}$ besitzt und weiterhin schliesst man Spiegelungen durch die Einschränkung auf $\det R = +1$ aus.

⁵Die Multipolmomente werden mit den Zweierpotenzen 2^ℓ bezeichnet: Monopol, Dipol, Quadrupol, Oktupol, ... Diese Bezeichnungen lassen sich wie folgt erklären: Aus einem gegebenen Multipol mit Ladungsverteilung ρ kann man einen nächsthöheren Multipol als die Kombination $\rho(x) - \rho(x+a)$ konstruieren, wobei a ein Verschiebungsvektor ist. Besteht der ursprüngliche Multipol aus Punktladungen, so besteht der nächsthöhere aus der doppelten Anzahl. Hierbei können Ladungen zusammenfallen, so dass ein 2^ℓ -Multipol auch bereits mit $\ell + 1$ Ladungen erzeugt werden kann.

Die Multiplikation zweier Gruppenelemente R_1 und R_2 ist durch die Komposition $R_1 R_2$ der Abbildungen mittels Matrizenmultiplikation gegeben. Die speziellen Eigenschaften der Elemente werden dabei erhalten, denn

$$(R_1 R_2)^\top = R_2^\top R_1^\top = R_2^{-1} R_1^{-1} = (R_1 R_2)^{-1} \quad (3.53)$$

sowie $\det(R_1 R_2) = \det(R_1) \det(R_2) = 1$.

Weiterhin besitzt die Gruppe mit der Einheitsmatrix und der Matrizeninversion ein Identitätselement und die Inversion.

Darstellungen. Eine Darstellung ist eine Abbildung von Gruppenelementen auf Abbildungen eines Vektorraums (d.h. quadratische Matrizen), welche folgende Eigenschaft erfüllt

$$D(R_1)D(R_2) = D(R_1 R_2). \quad (3.54)$$

Auf der linken Seite wird die Matrizenmultiplikation verwendet, auf der rechten die abstrakte Komposition von Gruppenelementen.

Sind die Gruppenelemente selbst Matrizen, ist die Identitätsabbildung $D_{\text{def}} = \text{id}$ eine Darstellung, die sogenannte definierende oder fundamentale Darstellung. Im Fall von $\text{SO}(3)$ wollen wir diese Darstellung mit D_1 bezeichnen.⁶

In der Tat gibt es viele weitere Darstellungen zu jeder gegebenen Gruppe. Eine der wichtigen Aufgaben der Gruppentheorie ist es, die irreduziblen Darstellungen einer Gruppe modulo Äquivalenz zu klassifizieren. Wir werden sehen, dass diese Klassifizierung für die Gruppe $\text{SO}(3)$ analog zu den Kugelflächenfunktionen ist. Wir wollen also die wichtigsten Elemente der Darstellungstheorie beschreiben und auf $\text{SO}(3)$ anwenden:

- Zwei Darstellungen D und D' sind äquivalent, wenn es eine Abbildung T gibt, so dass $D'(R) = TD(R)T^{-1}$ für alle R .
- Eine Darstellung ist irreduzibel, wenn sie auf keinem Unterraum auch als Darstellung wirkt. So sind z.B. Blockdiagonalmatrizen der Form $D = \text{diag}(D_1, D_2)$ eindeutig reduzibel.
- Die triviale Darstellung D_0 , welche alle Gruppenelemente R auf die 1×1 Einheitsmatrix abbildet, existiert in jeder Gruppe.
- Die Dimension $\dim D$ einer Darstellung D ist die Dimension des Vektorraums, auf den sie wirken. Die fundamentale Darstellung D_1 von $\text{SO}(3)$ hat die Dimension 3.
- Aus zwei Darstellungen D_1 und D_2 auf die Vektorräume V_1 und V_2 lässt sich die direkte Summe $D = D_1 \oplus D_2$ auf die direkte Summe der Vektorräume $V = V_1 \oplus V_2$ konstruieren. Seien e_1^k und e_2^k Basisvektoren dieser Vektorräume, so ist die Vereinigung der Basen eine Basis von V und es gilt

$$D(R)e_1^k = D_1(R)e_1^k, \quad D(R)e_2^k = D_2(R)e_2^k. \quad (3.55)$$

⁶Da in der Physik meist Matrixgruppen zum Einsatz kommen, wird oft nicht zwischen abstrakten Gruppenelementen R und ihrer fundamentalen Darstellung $D(R)$ unterschieden. Man beachte aber, dass für Gruppenelemente in der Regel nur die Multiplikation definiert ist, während quadratische Matrizen eine Algebra bilden, in der auch Addition und andere Operationen definiert sind.

Demnach ist die direkte Summe durch blockdiagonale Matrizen $D = \text{diag}(D_1, D_2)$ gegeben, und die Dimension dieser Darstellung beträgt $\dim D = \dim D_1 + \dim D_2$.

- Aus zwei Darstellungen D_1 und D_2 lässt sich ebenfalls das Tensorprodukt $D = D_1 \otimes D_2$ konstruieren. Die Darstellung D wirkt auf das Tensorprodukt $V = V_1 \otimes V_2$ welches durch die Basis $e_1^k \otimes e_2^l$ aufgespannt wird

$$D(R)(e_1^k \otimes e_2^l) = D_1(R)e_1^k \otimes D_2(R)e_2^l. \quad (3.56)$$

Die Dimension des Tensorprodukts beträgt somit $\dim D = \dim D_1 \cdot \dim D_2$.

Mit diesen Operationen kann man aus bekannten Darstellungen neue konstruieren. Insbesondere zerlegt man das Tensorprodukt in seine irreduziblen Komponenten. Die Zerlegung ist dabei die umgekehrte Operation zur Direkten Summe.

Darstellungen von SO(3). Beginnen wir mit der fundamentalen Darstellung D_1 . Das Tensorprodukt $D_1 \otimes D_1$ ist 9-dimensional, es ist reduzibel. Da beide Faktoren identisch sind, gibt es einen natürlichen Permutationsoperator P auf dem Tensorprodukt. Er kommutiert mit der Darstellung

$$\begin{aligned} PD(v_1 \otimes v_2) &= P(D_1 v_1 \otimes D_1 v_2) = D_1 v_2 \otimes D_1 v_1 \\ &= D(v_2 \otimes v_1) = DP(v_1 \otimes v_2). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Wir können nun aus P und den Identität I jetzt zwei Projektoren bauen $\Pi_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm P)$, denn es gilt

$$\Pi_{\pm} \Pi_{\pm} = \frac{1}{4}(I \pm 2P + P^2) = \frac{1}{2}(I \pm P) = \Pi_{\pm}. \quad (3.58)$$

Sie kommutieren offensichtlich auch mit D . Somit zerfällt die Darstellung D in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil

$$D = D_+ \oplus D_- \quad \text{mit} \quad D_{\pm} = D \Pi_{\pm}. \quad (3.59)$$

Beide Komponenten sind Darstellungen da

$$D(R_1) \Pi_{\pm} D(R_2) \Pi_{\pm} = D(R_1) D(R_2) \Pi_{\pm} \Pi_{\pm} = D(R_1 R_2) \Pi_{\pm}. \quad (3.60)$$

Der symmetrische Anteil des Tensorprodukts ist 6-dimensional, der antisymmetrische ist 3-dimensional. Letzterer hängt direkt mit dem Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ zusammen. Da letzteres wieder ein gewöhnlicher 3-dimensionaler Vektor ist, muss der antisymmetrische Anteil D_- von $D_1 \otimes D_1$ äquivalent zu D_1 sein. Der symmetrische Anteil D_+ ist nun weiterhin zerlegbar. Dies hängt mit dem Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ zweier Vektoren zusammen. Letzteres ist ein Skalar welches sich unter Rotationen nicht ändert. Somit muss D_+ eine triviale Darstellung D_0 enthalten. Die Darstellung auf dem verbleibenden 5-dimensionalen Raum ist nun irreduzibel, wir nennen sie D_2 . Insgesamt haben wir gefunden

$$D_1 \otimes D_1 = D_1 \oplus D_0 \oplus D_2. \quad (3.61)$$

Mit der neuen Darstellung D_2 können wir fortfahren und erhalten folgende Zerlegung des Tensorprodukts mit D_1

$$D_2 \otimes D_1 = D_2 \oplus D_1 \oplus D_3. \quad (3.62)$$

Die Dimension von D_3 beträgt $7 = 3 \cdot 5 - 5 - 3$. Die Iterationsvorschrift lautet allgemein

$$D_\ell \otimes D_1 = D_\ell \oplus D_{\ell-1} \oplus D_{\ell+1} \quad \text{mit} \quad \dim D_\ell = 2\ell + 1. \quad (3.63)$$

Man sieht, dass die Darstellung D_ℓ genauso viele Komponenten besitzt, wie es Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}$ für selbiges ℓ gibt. Die Darstellung D_ℓ kann somit auf den Raum der $Y_{\ell,m}$ für festes ℓ wirken: Sei R die Abbildung, welche die Winkel $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\vartheta', \varphi')$ abbildet, so gilt

$$Y_{\ell,m}(\vartheta', \varphi') = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D_\ell(R)_{m,m'} Y_{\ell,m'}(\vartheta, \varphi). \quad (3.64)$$

Allgemein gilt: Die Darstellung D von $\text{SO}(3)$ auf den Raum $L^2(S^2)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf S^2 zerfällt in

$$D = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} D_\ell. \quad (3.65)$$

4 Magnetostatik

Die Magnetostatik gleicht in vielerlei Hinsicht der Elektrostatik. Das ist nicht verwunderlich, denn elektrische und magnetische Kräfte werden später in der Elektrodynamik vereinigt und auf die Zeitabhängigkeit verallgemeinert. Es gibt allerdings einige wichtige Unterschiede, welche die Magnetostatik komplizierter und unintuitiver erscheinen lassen:

- Abwesenheit von magnetischen Monopolen,
- Strom statt Ladung als elementare Grösse, Kontinuitätsgleichung,
- Vektorieller statt skalarer Charakter des Potentials; Vektor- statt Skalarprodukte,
- Vorzeichen und Richtungen wichtig; Rechte-Hand-Regel (bzw. je nach Konvention auch Linke-Hand-Regel).

4.1 Grundlagen

- Elektrischer Strom
- Ampèresches Gesetz
- Biot-Savart-Gesetz
- Magnetische Flussdichte
- Drehmoment
 - Nolting 3.1, 3.1.2;


Das Verhalten von magnetischen Materialien legt nahe, dass die Kräfte zwischen ihnen durch ähnliche Gesetze wie elektrische Ladungen in der Elektrostatik beschrieben werden. Anders als elektrische Ladungen lassen sich die magnetischen Nord/Süd-Pole eines Stabmagneten nicht räumlich voneinander trennen.¹ Magnete verhalten sich analog zu elektrischen Dipolen, die Kräfte sind bis auf Vorfaktoren dieselben. Es hat sich allerdings gezeigt, dass elektrische Ströme auf Magnete Einfluss nehmen und auch untereinander wechselwirken. Da man auch mit elektrischen Strömen magnetische Dipole erzeugen kann (Spule), wird der elektrische Strom als elementare Eigenschaft des Magnetismus betrachtet. Die magnetischen Eigenschaften von Magneten werden elektrischen Strömen im Material, bzw. in dessen Molekülen und Atomen, zugerechnet. Wir werden diesen Zusammenhang später untersuchen.

Ampère-Gesetz. Das Analogon einer Punktladung in der Elektrostatik ist eine *Stromschleife* in der Magnetostatik. Hierbei handelt es sich um eine dünne eindimensional ausgedehnte geschlossene Kurve C , durch die ein (gerichteter)

¹D.h. man kann kein nicht-magnetisierbares Material zwischen sie bringen.

elektrischer *Strom* I fließt. Der Strom I bezeichnet die Menge elektrischer Ladung, welche je Zeiteinheit durch jeden einzelnen Punkt von C fließt. Ströme haben immer eine Ausdehnung und sind immer geschlossen. Das *Ampère-Gesetz* beschreibt die Kraft zwischen zwei Stromschleifen (C_1, I_1) , (C_2, I_2) wie folgt

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \pm \mu_0 I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{x} \times (d\vec{x}_2 \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2))}{4\pi \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}. \quad (4.1)$$



$$(C_1, I_1) \quad \vec{F}_1 \quad (C_2, I_2) \quad \vec{F}_2 \quad (4.2)$$

Die Form ist dem Coulomb-Gesetz sehr ähnlich. Allerdings ist hier die Kraft immer über Integrale definiert,² und es werden zwei Vektorprodukte verwendet. Die Richtung der Kraft ist so zu interpretieren, dass gleichgerichtete Stromelemente sich anziehen während gegensätzlich ausgerichtete Ströme sich abstoßen. Die Konstante μ_0 heisst *magnetische Feldkonstante*. Ihr Wert beträgt *genau* $4\pi \cdot 10^{-10} \text{ kg m} / \text{A}^2 \text{ s}^2$, welches letztlich die SI-Einheit Ampère A festlegt. Ihr Wert ist wiederum für uns irrelevant bis auf die wichtige Beziehung

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (4.3)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit c (im Vakuum) ist. Diese Beziehung werden wir in der Elektrodynamik verstehen. Die Lichtgeschwindigkeit und ihre Universalität bilden die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie.

Biot-Savart-Gesetz. Analog zur Elektrostatik können wir die Fernwirkung des Ampère-Gesetzes durch Einführung eines Feldes abmildern. Eine Stromschleife (C, I) erzeugt eine *magnetische Flussdichte*³ oder *magnetische Induktion* $\vec{B}(x)$ im Raum anhand des *Biot-Savart-Gesetzes*

$$\vec{B}(x) = \mu_0 I \oint_C \frac{d\vec{y} \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|^3}. \quad (4.4)$$

Nach dem Ampère-Gesetz ist damit die Kraft, die auf eine (andere) Stromschleife (C, I) im Feld der magnetischen Flussdichte wirkt, gegeben durch

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{x} \times \vec{B}(x). \quad (4.5)$$

Als Beispiel betrachten wir einen unendlich ausgedehnten Strom I entlang der z -Achse⁴ und berechnen die magnetische Flussdichte. Die Geometrie des Stroms

²Es gibt keine punktförmigen Ströme; diese würden die Kontinuitätsgleichung verletzen.

³Das magnetische Feld oder die magnetische Feldstärke H bezeichnet ein anderes Feld H , welches wir im Zusammenhang mit Materie kennenlernen werden. In Abwesenheit von Materie ist es allerdings proportional zu B .

⁴Man darf sich vorstellen, dass die Stromschleife in genügend grosser Entfernung schliesst, d.h. formal bei ∞ .

hat Zylindersymmetrie, es genügt also das Feld an einem Punkt $\vec{x} = (r, 0, 0)$ zu betrachten. Die Flussdichte ist durch ein Integral gegeben

$$\begin{aligned}\vec{B}(x) &= \mu_0 I \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\vec{e}_z \times (r, 0, -z)}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_y.\end{aligned}\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ z \\ \nearrow \vec{r} \end{array} \quad (4.6)$$

Die magnetische Flussdichte steht also senkrecht zur Stromrichtung \vec{e}_z und zum Abstandsvektor \vec{e}_x und besitzt den Betrag $\mu_0 I / 2\pi r$. Das Vorzeichen lässt sich mittels einer Rechten-Hand-Regel bestimmen. Stellt man an diese Stelle einen weiteren parallelen Strom \tilde{I} , so ist die Kraft je Länge l in Richtung des (rechtwinkligen) Abstands gegeben durch

$$\frac{F}{l} = \tilde{I} B = \frac{\mu_0 I \tilde{I}}{2\pi r}. \quad (4.7)$$

Die Kraft wirkt anziehend, falls die Ströme gleichgerichtet sind, anderenfalls abstossend.

Drehmoment. Der obige Ausdruck für die gesamte Kraft auf eine Stromschleife suggeriert, dass die magnetische Flussdichte auf Linienelemente des Stroms als differentielle Kraft wirkt

$$d\vec{F} = I d\vec{x} \times \vec{B}(x). \quad (4.8)$$

Das ist insbesondere relevant, wenn die resultierende Kraftdichte inhomogen ist. So bedingt die ortsabhängige Kraftdichte ein Drehmoment auf die Stromschleife

$$\vec{M} = I \oint_C \vec{x} \times (d\vec{x} \times \vec{B}(x)). \quad (4.9)$$

Dieses setzt sich wie die Kraft F aus infinitesimalen Beiträgen $d\vec{M} = \vec{x} \times d\vec{F}$ zusammen. Ein solches Drehmoment ist der wichtigste Effekt für homogene Felder B , wie wir später sehen werden. Ein weiterer Effekt sind Verformungskräfte, die in der Praxis bei starken Feldern und Strömen zum Bersten des Materials führen können.

4.2 Feldgleichungen

- Stromdichten, Kontinuität
- Kraft, Drehmoment
- Differentielle Feldgleichungen
- Ampèresches Durchflutungsgesetz
- Divergenz
 - Nolting 3.2.2, 3.3.2

Das Biot-Savart-Gesetz bestimmt die magnetische Flussdichte zu einer dünnen geschlossenen Stromschleife im freien Raum. Sie erfüllt gewisse Differentialgleichungen analog zum elektrischen Feld des Coulomb-Gesetzes. Bevor wir diese bestimmen, wollen wir das Biot-Savart-Gesetz auf eine kontinuierliche Stromverteilung verallgemeinern.

Stromdichte. Genau wie Punktladungen sind eindimensionale Stromschleifen Idealisierungen der Realität, die z.T. zu unerwünschten Divergenzen am Ort der Ladung bzw. des Stroms führen. Analog zur Ladungsdichte führen wir eine *Stromdichte* $\vec{j}(x)$ ein. Sie ist ein vektrielles Feld, welches beschreibt, wieviel Strom I durch eine Fläche A fließt

$$I_A = \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{j}. \quad \begin{array}{c} I_A \\ \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ A \end{array} \quad \vec{j}(x) \quad (4.10)$$

Die Eigenschaft, dass alle Stromschleifen geschlossen sind, wird hier verkörpert durch die *statische Kontinuitätsgleichung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (4.11)$$

Die Stromdichte muss also divergenz- oder quellenfrei sein. Versteht man elektrischen Strom als Ladungstransport, so kann sich auch die Ladungsdichte mit der Zeit ändern. Hierfür wäre ein zusätzlicher Term $\partial_t \rho$ nötig, der aber Zeitabhängigkeit voraussetzt, auf die wir erst später zu sprechen kommen.

Die Kontinuitätsgleichung zusammen mit dem Satz von Gauß besagt, dass der Strom durch eine Fläche A in der Tat nur vom Rand ∂A der Fläche abhängt. Ein Strom wird also letztendlich mit einer Schlaufe ∂A gemessen, die ihn umschließt.

Es ist nun problemlos möglich, das Biot-Savart-Gesetz auf eine kontinuierliche Stromdichte zu verallgemeinern

$$\vec{B}(x) = \mu_0 \int dy^3 \frac{\vec{j}(y) \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|^3}. \quad (4.12)$$

Hier wird das eindimensionale Integral über Stromschleifen kombiniert mit dem zweidimensionalen Integral, welches den Strom durch eine Fläche misst, zu einem dreidimensionalen über den gesamten Raum. Man geht weiterhin davon aus, dass sich magnetische Felder und Kräfte linear addieren, und sich nicht gegenseitig beeinflussen. Die Kraftdichte \vec{f} , die Kraft \vec{F} und das Drehmoment \vec{M} für eine Stromdichte im magnetischen Feld sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{f}(x) &= \vec{j}(x) \times \vec{B}(x), \\ \vec{F} &= \int dx^3 \vec{j}(x) \times \vec{B}(x), \\ \vec{M} &= \int dx^3 \vec{x} \times (\vec{j}(x) \times \vec{B}(x)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ebenso treten Deformationskräfte auf.

Feldgleichungen. Die magnetische Flussdichte erfüllt wie das elektrische Feld zwei Differentialgleichungen. Durch direktes Nachrechnen erhält man die partiellen Ableitungen (für x ausserhalb der Stromdichte j)

$$\nabla_i B_j = \mu_0 \sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \int dy^3 j_k(y) \frac{\delta_{il}(\vec{x} - \vec{y})^2 - 3(x-y)_i(x-y)_l}{4\pi\|x-y\|^5}. \quad (4.14)$$

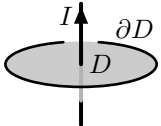
Dies ergibt unmittelbar $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Um die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ zu verstehen, muss man etwas mehr arbeiten. Man erhält

$$\begin{aligned} & (\vec{\nabla} \times \vec{B})_m \\ &= -\mu_0 \sum_{k=1}^3 \int dy^3 j_k(y) \frac{\delta_{mk}(\vec{x} - \vec{y})^2 - 3(x-y)_m(x-y)_k}{4\pi\|x-y\|^5} \\ &= \mu_0 \int dy^3 \vec{j}(y) \cdot \vec{\nabla}_y \frac{(x-y)_m}{4\pi\|x-y\|^3}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nach partieller Integration erhalten wir die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ und somit verschwindet die Rotation von B . Insgesamt gilt im Fall $j(x) = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot B = 0, \quad \vec{\nabla} \times B = 0. \quad (4.16)$$

Wir müssen nun feststellen, ob es am Ort der Stromdichte zusätzliche Beiträge gibt. Bezüglich $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ betrachten wir den unendlich ausgedehnten geraden Strom mit $\|B\| = \mu_0 I / 2\pi r$. Für eine kreisförmige Schlaufe ∂D um den Strom mit Radius r erhalten wir unmittelbar aus dem Satz von Stokes

$$\int_D dx^2 \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \oint_{\partial D} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \mu_0 I. \quad (4.17)$$


Somit muss $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ eine Distribution sein, die am Ort des Stroms lokalisiert ist, und den Betrag $\mu_0 I$ liefert. Diese Distribution beschreibt genau die Stromdichte

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (4.18)$$

Die obige Integralform des Gesetzes heisst (Ampèresches) *Durchflutungsgesetz*. Analog zur Elektrostatik ist die Divergenz exakt Null

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \int_V dx^3 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.19)$$

Diese Resultate können auch mittels einer distributionellen Identität hergeleitet werden

$$\nabla_i \frac{x_j}{\|x\|^3} = \frac{\delta_{ij}\vec{x}^2 - 3x_i x_j}{\|x\|^5} + \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta^3(x). \quad (4.20)$$

So erhält man einen Zusatzterm zum obigen Ausdruck

$$\nabla_i B_j = \dots + \frac{1}{3} \mu_0 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} j_k. \quad (4.21)$$

Demnach bleibt $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ aber $\vec{\nabla} \times \vec{B} = (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}) \mu_0 \vec{j}$ ⁵

⁵Den ersten Beitrag erhält man direkt, den zweiten mittels partieller Integration.

4.3 Vektorpotential

- Vektorpotential
- Eichtransformationen, Eichfixierungen
- Poisson-Gleichung
- Feldenergie
- Skalares Potential
 - Nolting 3.2.3; Jackson 6.2

Wir haben gesehen, dass die magnetische Flussdichte divergenzfrei ist. Allgemein lässt sich ein divergenzfreies Feld in drei Dimensionen als Rotation schreiben

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.22)$$

Die Divergenz verschwindet per Konstruktion. Diese Konstruktion ist analog zum elektrostatischen Potential Φ mit dem Unterschied, dass A ein Vektorfeld ist. Es liegt nahe, das Biot-Savart-Gesetz für das Vektorfeld umzuschreiben

$$\vec{B}(x) = \mu_0 \int dy^3 \vec{\nabla}_x \times \frac{\vec{j}(y)}{4\pi \|x - y\|}, \quad (4.23)$$

welchen man offensichtlich zu folgendem Ausdruck integrieren kann

$$\vec{A}(x) = \mu_0 \int dy^3 \frac{\vec{j}(y)}{4\pi \|x - y\|}. \quad (4.24)$$

Eichtransformationen. Wie auch zuvor ist das Potential A nicht eindeutig bestimmt, nur ist die Freiheit hier viel grösser: Da $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$ kann man ein Gradientenfeld zu A hinzuaddieren

$$\vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \vec{\nabla} \Lambda(x). \quad (4.25)$$

Hier kann das skalare Feld $\Lambda(x)$ beliebig gewählt werden. Dies ändert an dem (direkt messbaren) Feld B nichts. Man muss somit A und A' als physikalisch äquivalent ansehen. Eine solche Freiheit in der Wahl des Potentials verkompliziert i.d.R. das Randwertproblem für A , denn auch die unphysikalischen Freiheitsgrade von A müssen (irgendwie) bestimmt werden (und können sich als beliebig kompliziert herausstellen). Man umgeht dieses Problem i.d.R. indem man zusätzliche Bedingungen an das Potential A stellt. Dieser Prozess wird *Eichung* bzw. *Eichfixierung* genannt.

Der Übergang von einer Eichung zu einer anderen mittels eines geeigneten Feldes Λ wird *Eichtransformation* genannt. Bei der Wahl der Eichung muss man gewährleisten, dass

- die Eichung die unphysikalischen Freiheitsgrade eliminiert;
- die Eichung nicht zu restriktiv ist, und sich alle Felder B realisieren lassen.

Zwei gebräuchliche Eichungen sind

- *Coulomb-Eichung* $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$,

- *axiale Eichung* $\vec{n} \cdot \vec{A} = 0$ mit einem festen Vektor \vec{n} .

Beide Eichungen legen einen Freiheitsgrad je Punkt x fest, was scheinbar mit der Mächtigkeit der Eichtransformationen übereinstimmt (das skalare Feld A hat auch einen Freiheitsgrad je Punkt x). Es bleibt aber im Detail zu zeigen, dass Eichungen konsistent sind, insbesondere in Bezug auf Randbedingungen. Zum Beispiel, entspricht das oben hergeleitete Vektorpotential für allgemeine Stromdichten im freien Raum der Coulomb-Eichung

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \mu_0 \int dy^3 \vec{j}(y) \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{4\pi \|x - y\|} \\ &= -\mu_0 \int dy^3 \vec{j}(y) \cdot \vec{\nabla}_y \frac{1}{4\pi \|x - y\|} \\ &= \mu_0 \int dy^3 \frac{1}{4\pi \|x - y\|} \vec{\nabla}_y \cdot \vec{j}(y) = 0.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Der letzte Schritt folgt aus der Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Poisson-Gleichung. Die Darstellung $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ der Flussdichte mittels Potential erfüllt automatisch die homogene Feldgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Die zweite Feldgleichung $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ ergibt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für A

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \quad (4.27)$$

In der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ist sie vollständig analog zur Poisson-Gleichung der Elektrostatik

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (4.28)$$

und man kann alle drei Komponenten unabhängig voneinander betrachten. Das Randwertproblem und seine Lösungen sind dann analog zur Elektrostatik.

Feldenergie. Man kann sich überzeugen, dass zur Erzeugung einer gewissen Stromverteilung j folgende Arbeit nötig ist

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int dx^3 dy^3 \mu_0 \frac{\vec{j}(x) \cdot \vec{j}(y)}{4\pi \|x - y\|} = \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{A}(x) \cdot \vec{j}(x). \quad (4.29)$$

Durch Einsetzen der Poisson-Gleichung und mittels partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 (-\vec{A} \cdot \Delta \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 \sum_{j,k=1}^3 (\nabla_j A_k) (\nabla_j A_k - \nabla_k A_j)\end{aligned}\quad (4.30)$$

Dieser Ausdruck lässt sich mittels Vektorprodukt und Definition des Potentials umschreiben als

$$\Delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{2\mu_0} \int dx^3 \vec{B}^2 \geq 0. \quad (4.31)$$

Wie zuvor in der Elektrostatik ist der Ausdruck für die Feldenergie positiv definit.

Skalares Potential. Wir wollen noch eine Kuriosität betrachten, die gelegentlich nützlich sein kann. Ausserhalb einer Stromverteilung gilt $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$. Somit lässt sich die magnetische Flussdichte dort (lokal) als Gradientenfeld schreiben

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \Phi_{\text{mag}}. \quad (4.32)$$

Dieser Zugang kann einfacher als mittels Vektorpotential sein. Wenn allerdings der Definitionsbereich von Φ_{mag} nicht einfach zusammenhängend ist, weil z.B. Stromschleifen existieren, so ist Φ_{mag} nicht mehr definierbar, denn $\oint_{\partial A} d\vec{x} \times \vec{B} = \mu_0 I = \Delta \Phi_{\text{mag}}$. Man muss also den Definitionsbereich für solche Probleme geeignet auftrennen.

4.4 Magnetisches Moment

- magnetische Flussdichte einer kleinen Stromschleife
- Kraft und Drehmoment, Energie
 - Nolting 3.3.1;

Schliesslich wollen wir noch untersuchen, wie sich kleine Stromverteilungen verhalten, und dass sie im Wesentlichen dieselben Eigenschaften haben, die von Stabmagneten bekannt sind. Den Magnetismus letzterer kann man demnach auf atomare oder molekulare Ströme zurückführen.

Magnetische Flussdichte. Betrachten wir eine auf einen Bereich V begrenzte Stromdichte $\vec{j}(y)$. Nun berechnen wir das Vektorpotential bei grossem Abstand $\|x\|$

$$\begin{aligned} \vec{A}(x) &= \mu_0 \int dy^3 \frac{\vec{j}(y)}{4\pi \|x - y\|} \\ &= \mu_0 \int dy^3 \vec{j}(y) \left[\frac{1}{4\pi \|x\|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{4\pi \|x\|^3} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Der Bereich V sei ausreichend gross gewählt, so dass die Stromdichte auf dem Rand ∂V verschwinde. Hieraus können wir folgern, dass der Gesamtstrom in V verschwindet

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{j} x_k = \int_V dx^3 \vec{\nabla} \cdot (\vec{j} x_k) \\ &= \int_V dx^3 (x_k \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + j_k) = \int_V dx^3 j_k. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Demnach gibt es keine Monopolladung im magnetischen Feld und der erste Term in obiger Entwicklung verschwindet. Weiterhin folgt aus $0 = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot (\vec{j} x_k x_l)$, dass $\int_V dx^3 j_k x_l = - \int_V dx^3 j_l x_k$. Dies erlaubt es, obiges Vektorpotential zu schreiben als

$$\vec{A}(x) = \mu_0 \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{4\pi \|x\|^3} + \dots \quad (4.35)$$

Die Stromverteilung erzeugt also in grossem Abstand in führender Ordnung ein Dipolfeld mit *magnetischem Dipolmoment*

$$\vec{m} := \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{x} \times \vec{j}(x). \quad (4.36)$$

Kraft und Drehmoment. Hier wollen wir die Kraft und das Drehmoment berechnen, welches auf eine kleine Stromverteilung wirkt. Hierfür entwickeln wir die magnetische Flussdichte um den Ursprung (Zentrum von j)

$$\vec{B}(x) = \vec{B}(0) + ((\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B})(0) + \dots \quad (4.37)$$

Für die Kraft ergibt dies die führenden Terme

$$\vec{F} = \int dx^3 \vec{j} \times \vec{B} = \int dx^3 [\vec{j} \times \vec{B}(0) + \vec{j} \times ((\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B})(0) + \dots]. \quad (4.38)$$

Wie zuvor verschwindet der erste Term, da $\int dx^3 \vec{j} = 0$. Der zweite Term lässt sich ähnlich wie oben umformen zu

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) + \dots \quad (4.39)$$

Hier haben wir benutzt, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Das bedeutet u.A., dass eine homogene magnetische Flussdichte keine Kraft erzeugt. Für die führenden Terme des Drehmoments erhalten wir analog

$$\vec{M} = \int dx^3 \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B}) = \dots = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (4.40)$$

Hier trägt bereits der homogene Anteil der magnetischen Flussdichte bei, der die Tendenz hat, das magnetische Dipolmoment mit der magnetischen Flussdichte auszurichten.

Beide Ausdrücke sind komplett analog zum elektrischen Dipol. Ebenso beschreiben sie das Verhalten eines kleinen Stabmagneten mit Dipolmoment m . Beide Ausdrücke lassen sich auch in Form eines Potentials ausdrücken

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (4.41)$$

Durch Verschiebung bzw. Rotation erhält man daraus die obige Kraft bzw. Drehmoment.

5 Elektro- und Magnetostatik in Materie

Materie besteht auf atomarer Ebene aus Atomkernen und Elektronen. Letztere sind positiv bzw. negativ geladen und befinden sich in ständiger Bewegung. Damit werden sie von äusseren elektrischen und magnetischen Feldern beeinflusst und beeinflussen diese selber. Mittels der zuvor hergeleiteten Gleichungen (und später der Verallgemeinerung auf die Elektrodynamik) können wir diese Effekte prinzipiell herleiten. Allerdings enthält jede kleinste Menge Materie viel zu viele Zehnerpotenzen von Teilchen, als dass man damit in der Praxis rechnen könnte. Deshalb betrachtet man die Effekte im Mittel. Dies ist insofern gerechtfertigt und führt zu befriedigenden Ergebnissen, da Beobachtungen nicht auf atomaren Skalen stattfinden, sondern ebenfalls im Mittel über genügend grosse Bereiche von Materie.

5.1 Makroskopische Felder

- Mittelung, Rolle der Messung
- Ableitungen, Feldgleichungen
 - Nolting 2.4.1,2; Jackson 4.3,6

Wir beginnen mit den mikroskopischen Feldern und Quellen $E(x)$, $\Phi(x)$, $\rho(x)$, etc., und führen die makroskopischen Felder \bar{E} , $\bar{\Phi}$, $\bar{\rho}$ durch Mittelung über gewisse Raumbereiche ein, z.B.

$$\bar{\Phi}(x) := \int dy^3 \Phi(y) \varepsilon(x - y). \quad (5.1)$$

Hier sei $\varepsilon(x)$ eine Funktion mit Träger in einem Bereich um den Ursprung und mit der Normierung $\int dx^3 \varepsilon(x) = 1$. Der Bereich ist mikroskopisch gross aber makroskopisch klein zu wählen, so dass er vielleicht 1'000 bis 1'000'000 Atome enthält und alle individuellen atomaren Schwankungen effektiv herausmittelt. Einige Anmerkungen zur Mittelung:

- Die Mittelung filtert räumlich hochfrequente Anteile aus dem Feld $\bar{\Phi}$. Man sollte also nur den niederfrequenten Anteilen von $\bar{\Phi}$ trauen.
- Die Mittelung ist kompatibel mit Ableitungen via partieller Integration

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \bar{\Phi}(x) &= \int dy^3 \vec{\nabla}_x \varepsilon(x - y) \Phi(y) = - \int dy^3 \vec{\nabla}_y \varepsilon(x - y) \Phi(y) \\ &= \int dy^3 \varepsilon(x - y) \vec{\nabla} \Phi(y) = \vec{\nabla} \bar{\Phi}(x). \end{aligned} \quad (5.2)$$

- Man kann davon ausgehen, dass die räumliche Mittelung ebenso hochfrequente zeitliche Prozesse herausfiltert. Genauso könnte man die Zeit in die Mittelung explizit aufnehmen. In der Statik betrachten wir Felder, die im Mittel konstant sind:

$$\partial_t \bar{\Phi} = 0. \quad (5.3)$$

Wir werden uns ausschliesslich mit den makroskopischen Feldern $\bar{\Phi}$ beschäftigen und die mikroskopischen Felder Φ nicht weiter benötigen. Somit verzichten wir der Einfachheit halber auf die explizite Kennzeichnung der Mittelung.

Die Feldgleichungen für makroskopische Felder lauten also weiterhin

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{ges}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (5.4)$$

bzw. in integraler Form

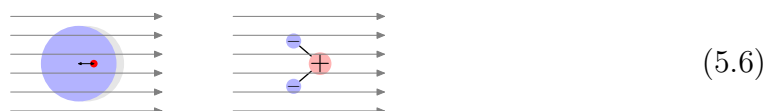
$$\oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{ges},V}, \quad \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0. \quad (5.5)$$

Hier ist ρ_{ges} bzw. Q_{ges} die gemittelte gesamte Ladungsdichte bzw. Ladung. Wir werden demnächst weitere Grössen einführen, welche die Ladungsverhältnisse in Materie auf eine andere Art beschreiben.

5.2 Dielektrika

- Arten von Dielektrika
- freie Ladungen und gebundene Dipole
- lineare Polarisierbarkeit
- D-feld
- Feldgleichungen
- Beispiel Plattenkondensator
 - Jackson 4.7,8

Dielektrische Eigenschaften der Materie. Materie reagiert in der Regel auf ein äusseres elektrisches Feld. Diese Einsicht ist insofern universell, als dass Atome aus Atomkern und Atomhülle mit unterschiedlicher elektrischer Polarität bestehen. Die Schwerpunkte der letzteren verschieben sich somit (leicht) entlang bzw. entgegengesetzt dem elektrischen Feld und stellen ein Dipolmoment dar. Dieses Dipolmoment erzeugt in unmittelbarer Umgebung ein elektrisches Feld, welches dem äusseren entgegengesetzt ist. Materie mit diesem Verhalten (sei es auf Ebene der Atome, Moleküle oder anderer Bestandteile) wird *Dielektrikum* genannt.



Eine spezielle Art des Dielektrikums ist das *Paraelektrikum*, dessen Bestandteile permanente Dipole sind. Ohne äusseres elektrisches Feld heben sich die Dipole im

räumlichen bzw. zeitlichen Mittel gegenseitig auf. Ein externes elektrisches Feld richtet die permanenten Dipole im statistischen Mittel aus, so dass man ein analoges Verhalten zu den oben beschriebenen induzierten Dipolen erhält. Es gibt auch abweichende Verhaltensweisen, z.B. *Ferroelektrikum*, allerdings sind die zuerstgenannten Dielektrika viel gewöhnlicher und wir werden uns lediglich mit ihnen beschäftigen.

Freie Ladungen und Dipoldichte. Um Dielektrika zu beschreiben, bietet es sich an, zwei Arten von Ladungsverteilungen zu unterscheiden:

- solche, die auf die Dipol-Eigenschaften der Bestandteile der Materie zurückgehen;
- solche, die auf die Gesamtladung der Bestandteile der Materie, bzw. auf fremde Ladungsträger zurückzuführen sind.

Beide Arten von Ladungsverteilungen tragen zum elektrischen Feld bei: Mit der zweiten haben wir uns bereits in den vorangehenden Kapiteln vertraut gemacht, und wir diskutieren im Folgenden die erste.

Die effektive Ladungstrennung der Materiebestandteile wird durch eine *Dipoldichte* $\vec{P}(x)$ beschrieben. Sie gibt die Menge der Dipolmomente \vec{p} je Volumeneinheit an. Diese Dipoldichte ist eine Funktion des äusseren elektrischen Feldes E . Für hinreichend kleine Felder stellt man eine lineare Beziehung zwischen E und P fest; höhere Potenzen in E sind i.d.R. vernachlässigbar. Man nimmt also an

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \gamma \vec{E} + \mathcal{O}(E^2). \quad (5.7)$$

Hier ist γ eine einheitenlose positive Grösse:

- Für ein isotropes Dielektrikum (z.B. ein Gas) ist das induzierte Dipolmoment entlang des Feldes ausgerichtet. Damit ist γ eine Zahl, die üblicherweise als (di)elektrische Suszeptibilität χ_e bezeichnet wird.
- Für ein anisotropes Dielektrikum (bestimmte Festkörper) ist γ eine Matrix.

Wir betrachten für gewöhnlich den ersten, isotropen Fall.

Dielektrische Verschiebung. Wir können nun die resultierenden Felder berechnen, z.B. das Potential

$$\Phi(x) = \int dy^3 \left[\rho_{\text{frei}}(y) \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \|x - y\|} + \vec{P}(y) \cdot \vec{\nabla}_y \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \|x - y\|} \right]. \quad (5.8)$$

Hier bezeichnet ρ_{frei} die Ladungsdichte der *freien Ladungen*, als ohne allfällige Beiträge der gebundenen Dipole in \vec{P} . Das elektrische Feld E erhält man als Gradient des Potentials $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. Dessen Divergenz lässt sich nun leicht schreiben als

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) &= -\Delta_x \Phi(x) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int dy^3 \left[\rho_{\text{frei}}(y) \delta^3(x - y) + \vec{P}(y) \cdot \vec{\nabla}_y \delta^3(x - y) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{frei}}(x) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wir können also ein Hilfsfeld \vec{D} , die *dielektrische Verschiebung*, einführen, dessen Divergenz ausschliesslich durch die freien Ladungen ρ_{frei} bestimmt ist

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}. \quad (5.10)$$

Der Vergleich mit der Divergenz des elektrischen Feldes, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_{\text{ges}}/\varepsilon_0$, ergibt eine Beziehung zwischen den verschiedenen Ladungsdichten

$$\rho_{\text{ges}} = \rho_{\text{frei}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{Dipol}}. \quad (5.11)$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die effektive Ladungsverteilung ρ_{Dipol} einer Dipoldichte \vec{P} durch dessen negative Divergenz gegeben ist. Wir sehen also, dass das Dielektrikum zu Gleichungen führt, die man auf verschiedenen, miteinander konsistenten Arten ausdrücken kann:

- Das Feld E ist physikalisch und messbar. Es wird durch die Gesamtladungsdichte bestimmt.
- Das Feld D ist eine Hilfsgrösse, welche durch die freie Ladungsdichte ρ_{frei} bestimmt wird. Da die übrigen Dipole gebunden sind, macht es Sinn sich hauptsächlich mit ρ_{frei} zu beschäftigen. Meist benutzt man für ρ_{frei} das undekorierte Symbol ρ .
- Das Feld P beschreibt die Dichte der gebundenen Dipole. Es beschreibt *nicht* das elektrische Feld, welches von den Dipolen erzeugt wird (auch wenn es lokal sehr ähnlich aussieht). Letzteres ist in dem Feld D enthalten.

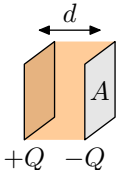
Insgesamt haben wir die Feldgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} \quad (5.12)$$

mit den Beziehungen zwischen den *elektrischen Materialkonstanten*

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \text{und} \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e. \quad (5.13)$$

Beispiel. Als Beispiel betrachten wir einen Plattenkondensator mit zwei Platten der Fläche A und Abstand d , welcher mit Dielektrikum mit Konstante $\varepsilon_r = 1 + \chi_e > 1$ gefüllt ist. Die *freie* Ladung auf den Platten beträgt $\pm Q$. Die Stärke des Feldes D (von einer Platte zur anderen) beträgt

$$D = \frac{Q}{A}, \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \text{+Q} \quad \text{-Q} \end{array} \quad (5.14)$$


welches genau der freien Flächenladungsdichte σ entspricht. Die Potentialdifferenz U wird hingegen über das elektrische Feld E bestimmt (man beachte, dass E die Kräfte auf Ladungen bestimmt)¹

$$U = dE = \frac{dD}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{dQ}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}. \quad (5.15)$$

¹Weiterhin ist E rotationsfrei, nicht aber D . Somit kann das Potential nur über E definiert sein.

Für die Kapazität erhalten wir somit

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} = \varepsilon_r C_0. \quad (5.16)$$

Somit erhöht das Dielektrikum die Kapazität eines Kondensators. Die im Kondensator gespeicherte Energie beträgt²

$$W = \frac{1}{2} U Q = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C}. \quad (5.17)$$

Bei vorgegebenem Potential wird die Energie durch das Dielektrikum also vergrößert, während bei vorgegebener Ladung die Energie reduziert wird. Letzteres liegt an einer Reduktion des elektrischen Feldes durch das Dielektrikum zwischen den Platten. Auf mikroskopischer Ebene verringert die Dipoldichte des Dielektrikums die Gesamtladung auf den Platten $Q_{\text{ges}} = Q_{\text{frei}} + Q_{\text{Dipol}}$.

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - \end{array} \right] \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array} \quad (5.18)$$

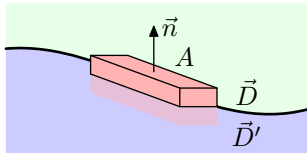
5.3 Grenzflächen von Dielektrika

- Gauß und Stokes, Stetigkeit
- Beispiel: Feld hinter Grenzfläche
 - Nolting 2.4.3; Jackson 4.4,5

Wir haben gesehen, dass Dielektrika (im isotropen Fall) im Wesentlichen die Stärke des elektrischen Feldes reduzieren, welches (freie) Ladungen umgibt. Alternativ kann man auch behaupten, dass es die Ladungen teilweise abschirmt und letztere somit effektiv reduziert werden. Im homogenen Medium bedarf es demnach nur einiger trivialer Skalierungen im Vergleich zum Vakuum. Interessant ist allerdings der Übergang zwischen zwei Medien:

$$\begin{array}{c} \varepsilon_r, \vec{E}, \vec{D} \\ \varepsilon'_r, \vec{E}', \vec{D}' \end{array} \quad (5.19)$$

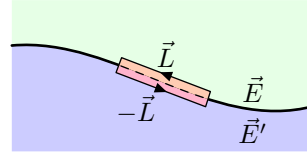
Um das Verhalten der verschiedenen elektrischen Felder zu verstehen, betrachten wir eine *Grenzfläche* zwischen zwei Medien mit Dichte ε_r und ε'_r o.B.d.A. mit $\varepsilon_r > \varepsilon'_r$. Die Herleitung der Stetigkeiten ist analog zur Grenzfläche zwischen Vakuum und Leiter. Wir betrachten die Feldgleichungen in integraler Form. Wir legen ein flaches Gaußsches Kästchen um die Grenzfläche, welches keine freien Ladungen tragen soll, demnach

$$0 = \oint dx^2 \vec{n} \cdot \vec{D} \simeq A \vec{n} \cdot (\vec{D} - \vec{D}'). \quad (5.20)$$


²Die allgemeine Formel für die elektrische Feldenergie im Medium lautet $W = \int dx^3 \vec{E} \cdot \vec{D}$.

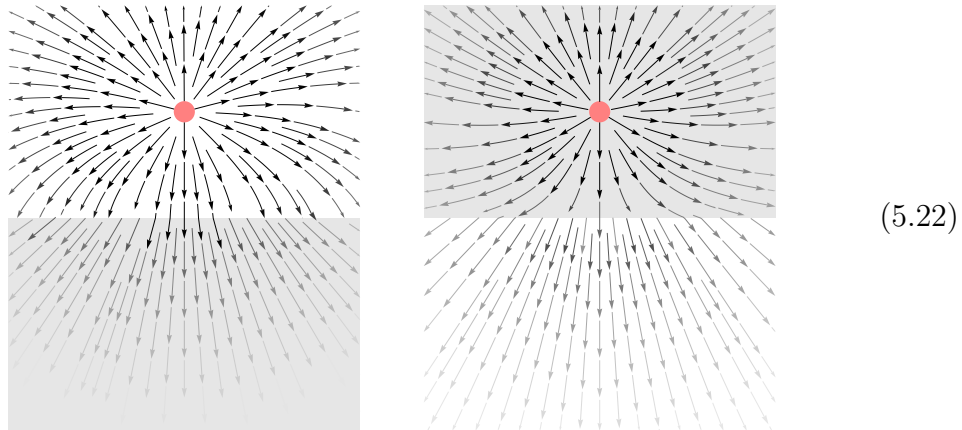
Das bedeutet, dass die Normalkomponente D_{\perp} des Feldes D stetig ist über die Grenzfläche hinweg. Als zweites betrachten wir eine flache Stokessche Schleife um die Grenzfläche

$$0 = \oint d\vec{x} \cdot \vec{E} \simeq \vec{L} \cdot (\vec{E} - \vec{E}'). \quad (5.21)$$



Demnach springen die Tangentialkomponenten E_{\parallel} des Feldes E nicht. Da aber $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ sehen wir, dass die jeweils anderen Komponenten der Felder \vec{E} und \vec{D} an der Grenzfläche springen. Diese Information genügt um jedes Randwertproblem in verschiedener Materie zu lösen.³

Als Beispiele betrachten wir die Felder E und D für eine Punktladung neben einem ebenen Übergang zwischen dünnem und dichtem Medium:⁴



Man beobachtet, dass bei einem Übergang zum dichten Medium

- die Feldlinien vor dem Übergang zur Oberfläche hin gebogen werden,
- die Feldlinien an dem Übergang von der Flächennormalen weg abknicken,
- nach dem Übergang das Feld E dünner ist und D dichter,
- nach dem Übergang die Feldlinien gerade von der Ladung weg verlaufen.

Bei dem Übergang zu einem dünneren Medium kehren sich alle Beziehungen um.

³Für Leiter kann man annehmen, dass $\varepsilon_r \rightarrow \infty$. Ein nichtverschwindendes Feld $E \neq 0$ im Inneren des Leiters würde ein unendliches Feld $D = \infty$ implizieren, welches u.A. unendlich viel Energie tragen würde. Somit muss $E = 0$ im Leiter gelten und alle bekannten Eigenschaften der Grenzflächen zu Leitern folgen aus den obigen Stetigkeitsbedingungen.

⁴Die Felder lassen sich mittels Bildladungen konstruieren: Auf der Seite der tatsächlichen Ladung q trägt eine Bildladung $q(\varepsilon_r - \varepsilon'_r)/(\varepsilon_r + \varepsilon'_r)$ jenseits der Grenzfläche bei. Auf der gegenüberliegenden Seite trägt nur die tatsächliche Ladung bei, allerdings mit angepasster Stärke $q(2\varepsilon'_r)/(\varepsilon_r + \varepsilon'_r)$.

5.4 Magnetostatik in Materie

- Analogie
- Feldgleichungen
- magnetisierbare Materialien
 - Nolting 3.4.1–4;

Die Verallgemeinerung der Magnetostatik auf makroskopische Felder und magnetisierbare Materie verläuft vollständig analog zur Elektrostatik. Wir verzichten demnach auf eine ausführliche Herleitung und listen lediglich die relevanten Änderungen auf:

- Die *Magnetisierung* \vec{M} ist das Analogon der Dipoldichte \vec{P} .
- Das *Magnetfeld* \vec{H} ist analog zur dielektrischen Verschiebung \vec{D} .
- Das Magnetfeld \vec{H} wird direkt von der *freien Stromdichte* \vec{j}_{frei} generiert.

Die Beziehung zwischen den Feldern lautet

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu\vec{H} \quad (5.23)$$

mit den *magnetischen Materialkonstanten*

$$\mu = \mu_0\mu_r \quad \text{und} \quad \mu_r = 1 + \chi_m. \quad (5.24)$$

Die Feldgleichungen lauten in differentieller Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.25)$$

bzw. in integraler Form

$$\oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{H} = I_{\text{frei},A}, \quad \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} = 0. \quad (5.26)$$

Lediglich bei den Arten von magnetisierbarer Materie gibt es etwas mehr Vielfalt:

- *Diamagnetismus*, magnetische Dipole werden induziert, $\chi_m < 0$, $|\chi_m|$ klein.
- *Paramagnetismus*, permanente Dipole werden ausgerichtet, $\chi_m > 0$, χ_m temperaturabhängig.
- *Ferromagnetismus*, nicht-linear, spontane Ausrichtung.
- *Ferrimagnetismus*, parallele und antiparallele Ausrichtung.
- *Antiferromagnetismus*, exakte Auslöschung im Ferrimagnetismus, Hysterese.

Insbesondere die letzten drei Arten von Magnetismus sind oft nicht-linear und lassen sich somit nicht zufriedenstellend mittels der Materialkonstante χ_m beschreiben.

Teil II

Dynamik

6 Maxwell-Gleichungen

Wir wenden uns nun zeitabhängigen Phänomenen von elektrischen und magnetischen Feldern zu. Die zuvor hergeleiteten Gesetze werden im Wesentlichen Bestand haben, aber sie müssen zum Teil an die Zeitabhängigkeit angepasst werden. Insbesondere werden wir recht schnell sehen, dass elektrische und magnetische Effekte und Felder miteinander mischen. Somit sind beide Phänomene nur verschiedene Aspekte einer einzigen Theorie, dem Elektromagnetismus.

6.1 Bewegte Punktladungen

- Ladungs- und Stromdichte
- elektromagnetische Kraft

Beginnen wir mit einer kombinierten Ladungs- und Stromverteilung $\rho(x)$ und $j(x)$. Im elektrischen und magnetischen Feld, E und B wirkt die *Kraftdichte*

$$\vec{f}(x) = \rho(x)\vec{E}(x) + \vec{j}(x) \times \vec{B}(x), \quad \vec{F} = \int d^3x \vec{f}(x). \quad (6.1)$$

Im Fall eines ruhenden Punktteilchens bei y mit Ladung q haben wir $\rho = \delta^3(x - y)q$ und somit die Gesamtkraft $\vec{F} = q\vec{E}$. Dies entspricht einer der Grundlagen der Elektrostatik. Was ändert sich nun für ein bewegtes Punktteilchen mit Geschwindigkeit \vec{v} , welches sich zur Zeit $t = 0$ bei \vec{y} befindet und die Ladung q trägt? Hier haben wir

$$\rho(x) = q\delta^3(x - y - vt), \quad \vec{j}(x) = q\vec{v}\delta^3(x - y - vt). \quad (6.2)$$

Die Gesamtkraft (*Lorentz*) auf das Punktteilchen beträgt also

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.3)$$

Dies gilt unter der Annahme, dass es keine weiteren zeitabhängigen Effekte gibt, die zur Kraft beitragen. Allerdings kann man davon ausgehen, dass die Kraft auf ein Punktteilchen nur von Ort und Geschwindigkeit abhängt. Höhere Zeitableitungen, d.h. die Beschleunigung und ihre Zeitableitungen, sollten keinen Einfluss haben, denn die Beschleunigung wird gerade durch die Kraft bestimmt. Weiterhin stimmt der Ausdruck für die Kraft mit Beobachtungen überein.

Die Neuerung ist, dass nun die Ladungs- und Stromdichte explizit von der Zeit abhängen. Weiterhin ist die Stromdichte nicht divergenzfrei, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = q\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta^3(\vec{x} - \vec{y} - \vec{v}t)$, sondern es gilt die *dynamische Kontinuitätsgleichung*

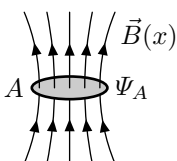
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0. \quad (6.4)$$

6.2 Faradaysches Induktionsgesetz

- Faradaysches Induktionsgesetz
- Galilei-Invarianz
- Nolting 4.1.1; Jackson 6.1

Das Biot-Savart-Gesetz beschreibt, wie ein elektrischer Strom ein Magnetfeld erzeugt. Umgekehrt kann man erwarten, dass ein Magnetfeld auch einen elektrischen Strom erzeugen kann (analog zu Kraft und Gegenkraft).

Induziertes Potential. Faraday konnte dies in der Tat zeigen: Sei A eine Fläche auf deren Rand ∂A ein Stromkreis (mit gewissem Widerstand) liegt. Eine Änderung des magnetischen Flusses Ψ_A durch die Fläche A ,

$$\Psi_A = \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B}, \quad \text{mit Diagramm: } \vec{B}(x) \text{ durch Fläche } A \text{ mit Fluss } \Psi_A \quad (6.5)$$


induziert einen Strom auf dem Rand ∂A proportional zu der Änderungsrate $\dot{\Psi}_A$. Die Richtung des induzierten Stroms ergibt sich aus der *Lenzschen Regel*: Der induzierte Strom erzeugt seinerseits ein Magnetfeld, welches der Änderung des induzierenden Magnetfelds entgegenwirkt. Der magnetische Fluss kann sich aufgrund verschiedener Faktoren ändern:

- Das Magnetfeld ändert sich, z.B. indem ein Magnet bewegt wird.
- Die Leiterschleife bewegt sich im (inhomogenen) Magnetfeld.
- Die Leiterschleife wird gedreht oder deformiert.

Der Strom in der Leiterschleife ist bedingt durch eine induzierte Potentialdifferenz $\Delta U_{\partial A}$ um die Leiterschleife herum, die sich wie üblich aus der Kraft auf Ladungsträger ergibt. Man erhält so das (Faradaysche) *Induktionsgesetz*

$$\Delta U_{\partial A} = \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}) = - \frac{d}{dt} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} = -\dot{\Psi}_A. \quad (6.6)$$

Ähnlich wie im Gaußschen Gesetz besteht hier scheinbar ein nicht-lokaler Zusammenhang zwischen Magnetfeld und induziertem Potential: Eine Änderung im Magnetfeld auf der Fläche A (aber nicht auf deren Rand) kann den Fluss durch A ändern und somit eine Potentialdifferenz in dem Leiter auf dem Rand ∂A induzieren. Allerdings muss man beachten, dass die Felder an verschiedenen Orten (durch den Satz von Gauß bzw. Stokes) miteinander in Beziehung stehen. So wird es zwangsweise auch zu einer Änderung der Felder auf dem Rand kommen, die man direkt mit der Potentialdifferenz in Beziehung setzen kann. Insofern ist die nicht-lokale Beziehung nur scheinbar gegeben.

Feldgleichung. Wir wollen dieses Gesetz in differentielle Form bringen. Die Zeitableitung auf der rechten Seite bezieht sich auf Änderungen der Flussdichte B

als auch auf Änderungen der Fläche A . Konkret ergibt dies¹

$$\frac{d}{dt} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} = \int dx^2 \vec{n} \cdot [\partial_t \vec{B} + \dot{\vec{x}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}] - \oint d\vec{x} \cdot (\dot{\vec{x}} \times \vec{B}). \quad (6.7)$$

Das Magnetfeld ist auch in der Elektrodynamik divergenzfrei, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, und der letzte Term ist genau der Beitrag des Magnetfelds zur induzierten Potentialdifferenz. Bei der korrekten Wahl der Proportionalitätskonstanten (-1) im Induktionsgesetz ergibt sich für die verbleibenden Terme die Relation

$$\int_A dx^2 \vec{n} \cdot \partial_t \vec{B} = - \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{E} = - \int_A dx^2 \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (6.8)$$

Im Gegensatz zur Elektrostatik ist also $\oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \vec{E} \neq 0$; allerdings nur, wenn sich das Magnetfeld mit der Zeit ändert. Das Induktionsgesetz verallgemeinert somit die Rotationsfreiheit des elektrischen Feldes. Lokal erhält man die differentielle Form des *Induktionsgesetzes*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0. \quad (6.9)$$

6.3 Maxwellsche Ergänzung

- Maxwellsche Ergänzung
- Maxwell-Gleichungen, differential und integral
 - Nolting 4.1.2; Jackson 6.3

Wir haben bis hier vier Feldgleichungen für die Felder E und B hergeleitet und auf den dynamischen Fall angepasst

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Diese Gesetze stimmen gut mit den statischen und dynamischen Experimenten der frühen 1800er überein.

Konsistenz. Allerdings gibt es eine Unstimmigkeit. Um diese zu sehen, nehme man die Divergenz der letzten Gleichung und setze die Kontinuitätsgleichung ein

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\mu_0 \partial_t \rho. \quad (6.11)$$

¹Die Änderung der Fläche hat diverse Auswirkungen auf das Integral: eine implizite Abhängigkeit des Feldes B von t durch Verschiebung der Fläche A , die expliziten Änderungen der Flächennormalen \vec{n} und des Flächenelements dx^2 sowie ggf. eine Verschiebung des Integrationsgebiets. Die einzelnen Terme sind z.T. abhängig von einer Wahl der Koordinaten auf A und lassen sich nicht gut in unserer Notation darstellen. Sie lassen sich aber als ein Flächenintegral über $\vec{n} \cdot \dot{\vec{x}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ und ein Randintegral über $-\dot{\vec{x}} \times \vec{B}$ zusammenfassen.

Die Feldgleichung impliziert also, dass die Ladungsverteilung konstant ist.² Allerdings stammt sie noch aus der Magnetostatik, in der die Annahme $\partial_t \rho = 0$ sinnvoll war. Für den allgemeinen dynamischen Fall sollten wir allerdings nicht $\partial_t \rho = 0$ annehmen müssen, aber auch nicht auf die Kontinuitätsgleichung verzichten. Maxwells Beitrag war nun, die Gleichung so zu modifizieren, dass sie mit der Kontinuitätsgleichung kompatibel wird. Hierzu betrachten wir die zeitliche Ableitung der ersten Feldgleichung

$$\partial_t \rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E}. \quad (6.12)$$

Da man $\partial_t \rho$ auch als Divergenz der Felder schreiben kann, bietet es sich an, die letzte Feldgleichung um den Term $\partial_t E$ zu erweitern

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}. \quad (6.13)$$

Man überzeugt sich leicht, dass nun aus ihrer Divergenz die Kontinuitätsgleichung folgt und man so einen konsistenten Satz von Feldgleichungen erhält.

Zusammenfassung. Insgesamt haben wir die vier *Maxwell-Gleichungen* gefunden

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die zwei Gleichungen, in denen auf der rechten Seite die Ladungs- und Stromdichte auftritt heissen *inhomogen*, die anderen beiden mit trivialer rechter Seite heissen *homogen*. Die Maxwell-Gleichungen verlangen als Konsistenzbedingung die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0. \quad (6.15)$$

In integraler Form lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{B} &= - \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot (\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}), \\ \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dx^3 \rho, \\ \frac{d}{dt} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot \vec{E} &= \oint_{\partial A} d\vec{x} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{B} - \dot{\vec{x}} \times \vec{E} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_A dx^2 \vec{n} \cdot (\vec{j} - \dot{\vec{x}} \rho). \end{aligned} \quad (6.16)$$

²Alternativ kann man die Unstimmigkeit in der integralen Form der Feldgleichung erkennen: Sei C eine geschlossene Kurve. Das Durchflutungsgesetz impliziert, dass durch jede von C berandete Fläche derselbe Strom fließt. Damit fließt in den von zwei solcher Flächen eingeschlossenen Raum insgesamt kein Strom und die enthaltene Ladung muss konstant sein. Als Beispiel kann man sich einen Plattenkondensator im Stromkreis vorstellen: Dort legt man eine Fläche durch den Draht und eine andere zwischen die Kondensatorplatten. Das Durchflutungsgesetz macht dann offensichtlich falsche Aussagen.

Die Kraftdichte und somit die Kraft und das Drehmoment auf eine Ladungs- und Stromverteilung lauten

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad \vec{F}_V = \int_V dx^3 \vec{f}, \quad \vec{M}_V = \int_V dx^3 \vec{x} \times \vec{f}. \quad (6.17)$$

In den kommenden Wochen diskutieren wir die Auswirkungen der Feldgleichungen, z.B. Wellenlösungen im freien Raum, Lösungsmethoden, Kugelwellen, Grenzflächen sowie Erhaltungsgrößen.

Ein interessanter Aspekt ist, dass mit $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c in den Maxwell-Gleichungen auftritt. Dies ist nicht weiter verwunderlich, denn wie wir später sehen werden, beschreiben die Gleichungen (auch) die Ausbreitung von Licht. Weiterhin ergibt sich für elektrische und magnetische Felder alltäglicher Grösse, dass $\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E$ einen stark unterdrückten Beitrag zur Gleichung liefert. Dies erklärt, warum der Term experimentell zunächst nicht entdeckt worden war.

6.4 Elektromagnetische Potentiale

- Elektromagnetische Potentiale
- Inhomogene Maxwell-Gleichungen
- Eichtransformationen
- Coulomb-Eichung, Lorenz-Eichung
 - Nolting 4.1.3; Jackson 6.4,5

Wie zuvor möchten wir Potentiale einführen, um die Differentialgleichungen etwas zu vereinfachen. Hierzu schauen wir uns die homogenen Gleichungen an: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$.

Potentiale. Wie zuvor können wir das divergenzfreie Feld B als Rotation eines Vektorpotentials A schreiben

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (6.18)$$

Setzen wir dies in die andere Gleichung ein, erhalten wir $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0$. Im dynamischen Fall ist E alleine nicht mehr rotationsfrei, aber die Kombination mit der zeitlichen Ableitung des Vektorpotentials ist es. Letztere ist also ein Gradientenfeld und wir können E mithilfe eines skalaren Potentials Φ schreiben als

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A}. \quad (6.19)$$

Diese Wahl der Felder löst die homogenen Maxwell-Gleichungen automatisch. Die verbleibenden inhomogenen Maxwell-Gleichungen fungieren als Feldgleichungen für die Potentiale

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi - \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \\ -\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \partial_t \Phi &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Um die Struktur der Gleichungen etwas besser zu verstehen, bietet es sich an, eine kombinierte Ableitung nach Raum und Zeit einzuführen, den *D'Alembert-Operator*³

$$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2. \quad (6.21)$$

Dann lauten die inhomogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} -\square\Phi - \partial_t \left[\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \\ -\square \vec{A} + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Beide Gleichungen haben nun eine ähnliche Struktur, und man erkennt einen gemeinsamen Term, den wir etwas später durch eine geeignete Wahl der Potentiale entfernen können.

Eichtransformationen. Die magnetische Flussdichte B ändert sich nicht, wenn man ein Gradientenfeld zum Vektorpotential A addiert

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda. \quad (6.23)$$

Diese Änderung wirkt sich allerdings auf das elektrische Feld aus, es sei denn das skalare Potential Φ erhält einen kompensierenden Beitrag

$$\Phi' = \Phi - \partial_t \Lambda. \quad (6.24)$$

Somit sind die transformierten Potentiale physikalisch äquivalent zu den ursprünglichen Potentialen für eine beliebige Wahl des Feldes Λ , denn sie beschreiben dieselben Felder E und B . Per Konstruktion ändern sich die obigen Feldgleichungen der Potentiale nicht, auch wenn das an ihrer Form nicht unmittelbar zu erkennen ist. Wir können die Eichfreiheit ausnutzen, um die Form der Feldgleichungen weiter zu vereinfachen.

Coulomb-Eichung. Eine gewöhnliche Wahl ist die Coulomb-Eichung, in der man fordert

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (6.25)$$

Dann gilt die Poisson-Gleichung der Elektrostatik exakt

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (6.26)$$

Diese können wir zu jedem Zeitpunkt t wie gewohnt (eindeutig) lösen. Es verbleibt eine explizit zeitabhängige Feldgleichung

$$-\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \partial_t \Phi. \quad (6.27)$$

³Für das Vorzeichen des D'Alembert-Operators sind beide Möglichkeiten gebräuchlich. Wir wählen es so, dass es eine direkte Verallgemeinerung des Laplace-Operators $+\Delta$ ist.

Lorenz-Eichung. Eine andere vorteilhafte Wahl ist die Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0. \quad (6.28)$$

Hiermit eliminiert man die gemeinsamen Terme in den Feldgleichungen

$$-\square \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad -\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (6.29)$$

Insbesondere entkoppeln die Potentiale und Dichten vollständig; jeder Dichte entspricht genau ein Potentialfeld und alle Gleichungen haben dieselbe Struktur.

Die Lorenz-Eichung lässt sich immer erreichen: Sei $X := \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t \Phi / c^2$, dann ist das eichtransformierte X gegeben durch

$$X' = X + \square \Lambda = X + \Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda. \quad (6.30)$$

Es gilt also die Evolutionsgleichung $X' = 0$ für Λ zu lösen. Für vorgegebenes Λ und Λ' in einer Zeitebene ist dies immer möglich. Weiterhin sieht man, dass die Lorenz-Eichung nicht eindeutig ist, sie also nur eine *partielle Eichfixierung* ist, denn jede Eichtransformation mit $\square \Lambda = 0$ lässt die Lorenz-Eichung unverändert, $X = X' = 0$. Man kann also zusätzliche Forderungen an Λ und Φ auf einer Zeitebene stellen um die Eichfixierung zu konkretisieren.

7 Stromkreise

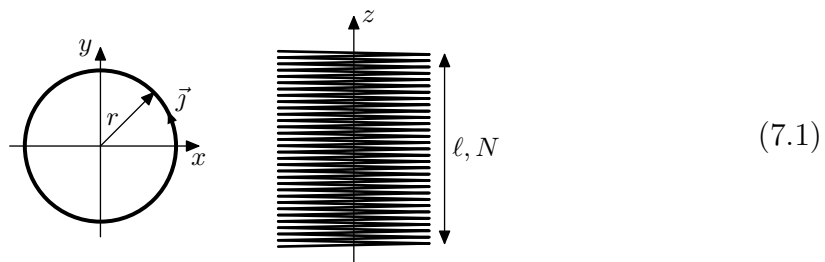
Eine erste einfache Anwendung der Elektrodynamik sind Stromkreise, die anstelle von komplizierten Feldkonfigurationen mit endlich vielen Freiheitsgraden gut (näherungsweise) beschrieben werden können. Ein *Stromkreis* ist eine Kombination von elektrischen und elektronischen Bauelementen, die eine gewisse Funktion erfüllen soll. Die elementaren Bauelemente sind Widerstände, Kondensatoren, Spulen, Verzweigungen, Stromquellen und Schalter, welche mit leitenden Drähten untereinander verbunden sind. Wir wollen hier das Verhalten von Stromkreisen kurz theoretisch behandeln.

7.1 Induktivitäten

- Spule
- Induktion
 - Nolting 4.2.1

Von den oben erwähnten Bauelementen haben wir die Spule noch nicht eingehend diskutiert, insbesondere in Bezug auf ihre Wechselwirkung mit einem variablen Magnetfeld.

Magnetfeld einer Spule. Wir wollen zunächst das Magnetfeld berechnen, welches von einer stromdurchflossenen Spule erzeugt wird. Dazu wickeln wir einen Draht im Abstand R um die z -Achse. Er soll N Windungen auf einer Länge ℓ aufweisen. Um das Problem besser mathematisch behandeln zu können, wollen wir einen Grenzfall annehmen, in dem der Draht dicht gewickelt ist und die Spule sehr lang ist.



Die Stromdichte einer stromdurchflossenen Spule ist dann auf die Zylinderfläche konzentriert, homogen, tangential zu dieser und hat nur eine vernachlässigbar kleine Komponente entlang der Spulenachse. Sie wird durch folgende Stromdichte in Zylinderkoordinaten r, φ, z beschrieben

$$\vec{j} = \eta \delta(r - R) \vec{e}_\varphi \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{IN}{\ell} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Wir wollen die magnetische Flussdichte B mittels des Gesetzes von Biot-Savart berechnen. Wir betrachten einen Punkt $\vec{x} = (d, 0, 0)$ und schreiben das Integral über $\vec{y} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\vec{B}(x) &= \mu_0 \int dy^3 \frac{\vec{j}(y) \times (\vec{x} - \vec{y})}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0 \eta R}{4\pi} \int d\varphi dz \frac{(-z \cos \varphi, -z \sin \varphi, R - d \cos \varphi)}{(R^2 + d^2 - 2dR \cos \varphi + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \eta R}{2\pi} \int d\varphi \frac{(0, 0, R - d \cos \varphi)}{R^2 + d^2 - 2dR \cos \varphi} \\ &= \mu_0 \eta \theta (R - d) \vec{e}_z.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Das letzte Integral lässt sich leicht mit dem Satz von Gauss in zwei Dimensionen ermitteln, wenn man den Integranden als Punktladung bei $(d, 0)$ ansieht. So erhält man im Inneren der Spule eine homogene magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = \mu_0 \eta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \vec{e}_z.\tag{7.4}$$

Die Feldenergie im Inneren der Spule ist dann gegeben als

$$W = \frac{\pi \mu_0 R^2 N^2 I^2}{2\ell}.\tag{7.5}$$

Induzierte Spannung. Eine Spule erzeugt nicht nur ein Magnetfeld, sondern nach dem Induktionsgesetz reagiert sie auch auf Änderungen des magnetischen Flusses. Die induzierte Spannung je Windung ist die negative Änderungsrate des magnetischen Flusses Ψ durch die Spule. Bei N Windungen ergibt dies eine Spannung U zwischen den Enden der Spule

$$U = -N \dot{\Psi}.\tag{7.6}$$

Nun kann das Magnetfeld in der Spule von einer zweiten Spule hervorgerufen werden. Betrachten wir der Einfachheit halber eine zweite Spule, welche auf dieselbe Zylinderfläche gewickelt ist, aber möglicherweise eine unterschiedliche Wicklungszahl hat. Für die Spannung über die erste Spule ergibt sich

$$U_1 = -N_1 \dot{\Psi}_2 = -N_1 A \partial_t B_z = \pi R^2 N_1 \frac{\mu_0 \dot{I}_2 N_2}{\ell} = L_{12} \dot{I}_2.\tag{7.7}$$

Hier bezeichnet die Konstante L_{12} die Induktivität zwischen den Spulen

$$L_{12} = \frac{\pi \mu_0 R^2 N_1 N_2}{\ell}.\tag{7.8}$$

Man sieht, dass der Induktionskoeffizient rein geometrischer Natur ist.

Die oben hergeleitete Beziehung $U_1 = L_{12}\dot{I}_2$ verallgemeinert sich auf alle Paare (j, k) von Bauelementen in Stromkreisen, so dass¹

$$U_k = - \sum_j L_{kj} \dot{I}_j, \quad W = \sum_{j,k} \frac{1}{2} L_{kj} I_j I_k \quad (7.9)$$

Die Induktionskoeffizienten L_{jk} hängen dabei von der Form, der relativen Lage und der Orientierung der Bauteile ab, aber auch von dritten Elementen oder Medien, die das magnetische Feld beeinflussen. Konkret kann man sie meist nur durch Messung ermitteln. Insbesondere tritt auch Selbstinduktion auf: Für die oben behandelte Spule ergibt sich z.B. der Koeffizient für Selbstinduktion

$$L = \frac{\pi \mu_0 R^2 N^2}{\ell}. \quad (7.10)$$

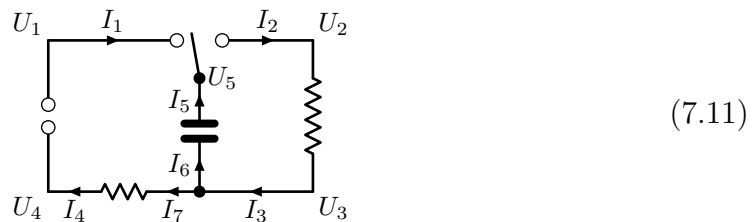
Auch alle anderen Bauelemente besitzen eine gewisse Selbstinduktion, sogar der Stromkreis an sich. Die Selbstinduktion erzeugt immer eine Spannung, die der Änderung des Stroms entgegenwirkt. Insofern kann man sie als ein Analogon der mechanischen Trägheit für elektrische Ströme ansehen. Ihre Energie entspricht in diesem Bild der kinetischen Energie.

7.2 Stromkreise

- Kirchhoffsche Regeln
- Elektrische Bauelemente

Einen Stromkreis kann man sich als mechanisches System mit einer Menge von Zustandsvariablen vorstellen, welche durch Bewegungsgleichungen miteinander in Beziehung stehen. Wir wollen hier die Regeln für die einzelnen Bauelemente zusammenfassen, nach denen man die Bewegungsgleichungen für den Stromkreis aufstellt.

Potentiale und Ströme. Ein Stromkreis ist eine Menge von Bauelementen, die mit leitenden Drähten verbunden sind. Er wird als Graph dargestellt.



Auf jedem Stück Draht k herrscht ein Potential U_k und es fließt ein gerichteter Strom I_k .² Dies sind die Zustandsvariablen für unser System.

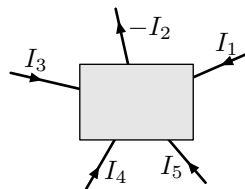
¹Wir befinden uns hier in der quasistationären Näherung, in der sich Felder viel schneller ausbreiten, als sich Ströme im Stromkreis ändern. Anders ausgedrückt gilt $L\omega \ll c$ wobei L die Ausdehnung des Stromkreises bezeichnet, ω die typische Frequenz oder Änderungsrate der Ströme und c die Lichtgeschwindigkeit.

²Man geht davon aus, dass die Resistivität, Kapazität und Induktivität der Drähte vernachlässigbar klein sind, zumindest gegenüber den weiteren Bauelementen. In dieser Näherung

Die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Bauelemente sollen nur von den angrenzenden Potentialen und einflussenden Strömen abhängen. Dies ist insofern eine Näherung, da die Bauelemente über das elektromagnetische Feld kommunizieren. Im Vergleich zu ihrer eigentlichen Funktion sind diese Effekte aber i.d.R. klein, und man vernachlässigt sie.³

Kirchhoffsche Regeln. Die Zustandsvariablen im Stromkreis erfüllen zwei Beziehungen, die Kirchhoffschen Regeln:

Die *erste Kirchhoffsche Regel* besagt, dass sich alle Ströme, die in ein Bauelement fließen, zu Null aufsummieren⁴



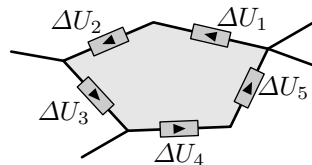
$$\sum_k I_k = 0. \quad (7.12)$$

Für diese Regel betrachtet man auslaufende Ströme als einlaufende Ströme mit negativem Vorzeichen. Die Regel basiert auf der Ladungserhaltung und der Annahme, dass sich keine Ladungen in dem Bauelement kumulieren. Für Bauelemente mit zwei Anschlüssen folgt, dass der einlaufende Strom gleich dem auslaufenden Strom ist.



$$(7.13)$$

Die *zweite Kirchhoffsche Regel* besagt, dass die Summe aller Potentialdifferenzen über einen geschlossenen Weg auf dem Graphen Null ist



$$\sum_k \Delta U_k = 0. \quad (7.14)$$

In unserer Formulierung mit expliziten Potentialen auf den Drähten ist die Regel per Konstruktion erfüllt.

Für einen geschlossenen, zusammenhängenden Graphen ergibt sich für alle Zustandsvariablen je eine Gleichung. Allerdings stellt sich immer eine der Gleichungen als abhängig von den anderen heraus, und somit ist letztlich eine Variable unbestimmt. Ersteres folgt aus der Ladungserhaltung (erste Kirchhoffsche Regel), letzteres ist die Unbestimmtheit des Referenzpotentials. Um diese Unbestimmtheit zu entschärfen, legt man ein beliebiges Potential auf einen festen Wert oder man betrachtet nur Potentialdifferenzen über die Bauelemente (zusammen mit der zweiten Kirchhoffschen Regel).

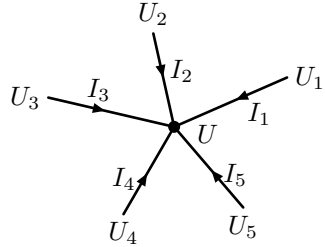
sind Potential und Strom entlang eines Drahtes konstant. Gilt diese Näherung nicht, so kann man die Drahtelemente formal durch funktionale Bauelemente beschreiben.

³Effektiv kommunizierende Bauelemente kann man formal zu einem einzigen kombinieren, oder die Bewegungsgleichungen entsprechend anpassen.

⁴Inbesondere gilt diese Regel für Verzweigungen von Drähten, für die sie meist formuliert wird.

Bauelemente. Wir zählen nun die wichtigsten elektrischen Bauelemente und ihre Beziehungen auf.


Für die *Verzweigung* ohne weitere Funktionalität gilt, dass alle äusseren Potentiale gleich sind.



$$U_i = U \text{ für alle } i, \quad \sum_i I_i = 0. \quad (7.15)$$

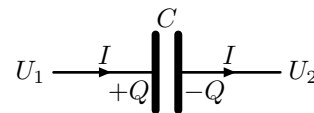
Es genügt also ein Potential U an der Verzweigung als Zustandsvariable zu wählen. Desweiteren ist die Summe der einlaufenden Ströme aufgrund der ersten Kirchhoffschen Regel Null.

Für einen *Widerstand* mit Resistivität R gilt die Beziehung



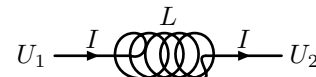
$$U_1 - U_2 = RI. \quad (7.16)$$

Für einen *Kondensator* mit Kapazität C benötigt man als zusätzliche Zustandsvariable die Ladung Q . Die Bewegungsgleichungen lauten



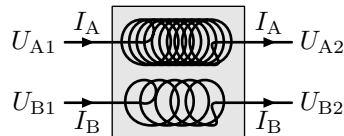
$$\dot{Q} = I, \quad U_1 - U_2 = \frac{Q}{C}. \quad (7.17)$$

Für eine *Spule* mit Induktivität L gilt wie oben ermittelt



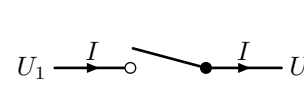
$$U_1 - U_2 = L\dot{I}. \quad (7.18)$$

Für zwei *gekoppelte Spulen* mit den Selbstinduktivitäten L_A, L_B sowie Gegeninduktivität $L_{AB} = L_{BA}$ gilt



$$\begin{aligned} U_{A1} - U_{A2} &= L_A \dot{I}_A + L_{AB} \dot{I}_B, \\ U_{B1} - U_{B2} &= L_B \dot{I}_B + L_{AB} \dot{I}_A. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Weiterhin können wir noch einen *Schalter* einführen. Sein elektrisches Verhalten hängt von seinem Öffnungszustand ab



$$\begin{cases} I = 0 & \text{offen,} \\ U_1 = U_2 & \text{geschlossen.} \end{cases} \quad (7.20)$$

Man kann den Schalter auch als variablen Widerstand betrachten, dessen Wert entweder $R = 0$ (geschlossen) oder $R = \infty$ (offen) beträgt.

Schliesslich gibt es noch die *Spannungsquelle* mit Spannung U_0 ⁵

$$U_1 \overset{+}{\underset{U_0, \omega, \phi}{\text{---}}} \overset{-}{\text{---}} U_2 \quad U_1 - U_2 = U_0 \cos(\omega t + \phi). \quad (7.21)$$

Hier ist ω die Winkelfrequenz einer Wechselspannungsquelle und ϕ ihre Phase. Für Gleichspannung setze man $\omega = \phi = 0$.

7.3 Schwingkreis

- Schwingkreis
- Dämpfung
 - Nolting 4.2.4,6

Als gebräuchliches Beispiel wollen wir den einfachen *Schwingkreis* behandeln. Er besteht aus Kondensator, Widerstand und Spule mit den Konstanten C , R und L , die in Serie geschaltet sind.



Der Kondensator sei zur Zeit $t = 0$ auf Ladung $Q(0) = Q_0$ geladen und es fliesse der Strom $I(0) = I_0$. Wie entwickeln sich diese Grössen mit der Zeit?

Bewegungsgleichung. Aus den Relationen für die drei Bauelemente ergeben sich folgende Differentialgleichungen

$$\dot{Q} = I, \quad L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = 0. \quad (7.23)$$

Zusammen ergibt dies eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Ladung $Q(t)$

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (7.24)$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$Q(0) = Q_0, \quad \dot{Q}(0) = I_0. \quad (7.25)$$

Diese gewöhnliche homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist mit einem einfachen Ansatz zu lösen

$$Q(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t}. \quad (7.26)$$

⁵Eine konstante Spannung U_0 ist eine Idealisierung, denn in der Praxis nimmt die Spannung für allzu grosse Ströme I (Überlastung, Kurzschluss) von ihrem Maximalwert U_0 ab, so dass der gelieferte Strom effektiv begrenzt ist.

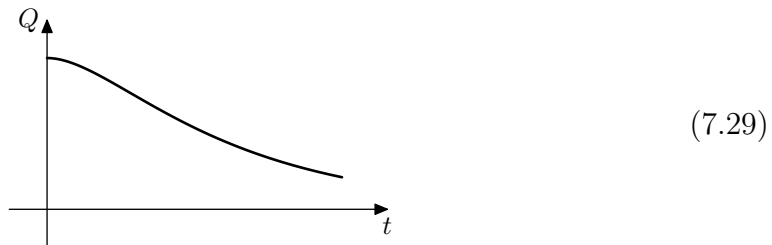
Aufgrund der Struktur der Differentialgleichung entkoppeln die beiden Summanden und man erhält eine quadratische Gleichung für $b_{1,2}$

$$Lb^2 + Rb + \frac{1}{C} = 0, \quad b_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}. \quad (7.27)$$

Die Anfangsbedingungen werden gelöst durch

$$a_1 = \frac{I_0 - Q_0 b_2}{b_1 - b_2}, \quad a_2 = \frac{I_0 - Q_0 b_1}{b_2 - b_1}. \quad (7.28)$$

Dämpfung. Das Verhalten des Schwingkreises wird vor allem durch die Exponenten $b_{1,2}$ beschrieben. Je nachdem, wie die Konstanten der Bauelemente eingestellt sind, kommt es zu drei unterschiedlichen Verhaltensarten, die durch die Diskriminante $CR^2 - 4L$ der quadratischen Gleichung unterschieden werden. Ist sie positiv, sind beide Exponenten $b_{1,2}$ reell. Weiterhin sind beide Exponenten immer negativ, und man erhält die sogenannte *starke Dämpfung*.



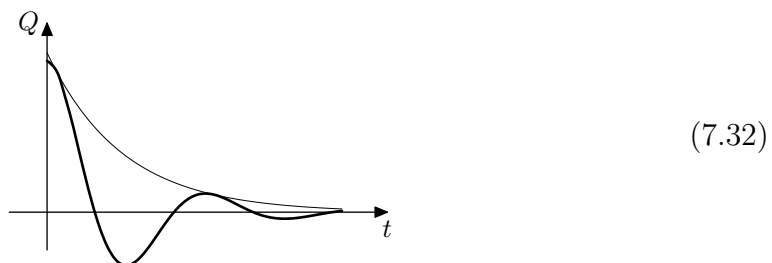
Ist die Diskriminante hingegen negativ, so sind die Exponenten $b_{1,2}$ komplex

$$b_{1,2} = -\kappa \pm i\omega, \quad \kappa = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (7.30)$$

Dies führt zu Oszillationen mit Kreisfrequenz ω . Immerhin ist der Realteil negativ, so dass die Lösung auf jeden Fall mit der Konstanten κ abklingt

$$Q(t) = \left[Q_0 \cos(\omega t) + \frac{I_0 + \kappa Q_0}{\omega} \sin(\omega t) \right] e^{-\kappa t}. \quad (7.31)$$

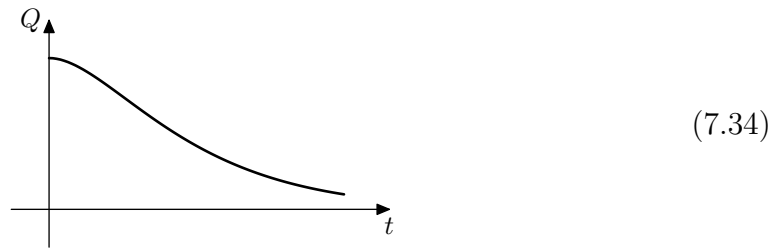
Dieser Fall wird *schwache Dämpfung* genannt.



Falls die Diskriminante Null ist, fallen beide Exponenten $b_{1,2} = -\kappa$ zusammen. Die Lösung nimmt hier eine aussergewöhnliche Form an

$$Q(t) = [Q_0 + (I_0 + \kappa Q_0)t] e^{-\kappa t}, \quad \kappa = \frac{R}{2L}. \quad (7.33)$$

Man kann sie als Grenzwert der allgemeinen Lösung erhalten. Dieser Fall wird *kritische Dämpfung* genannt.



Der Schwingkreis ist ein Modell für allgemeine Schaltvorgänge. Effektiv besitzt jeder Teil eines Stromkreises eine gewisse Resistivität, eine gewisse Kapazität und eine gewisse Induktivität. Schaltet man eine Stromquelle an oder aus, bzw. ändert man den Zustand eines Schalters, so werden sich die Zustandsvariablen des Stromkreises nicht instantan auf ihre asymptotischen Werte ändern, sondern sich wie oben beschrieben erst nach einer gewissen Zeit dort einpendeln. Hierfür ist die Dämpfung des Schwingkreises im Stromkreis relevant: Lange Abklingphasen und Oszillationen um den Endzustand sind meist unerwünscht, daher ist es vorteilhaft, die entsprechende Dämpfung möglichst kritisch einzustellen.

8 Erhaltungsgrößen und Symmetrien

Wie in vielen physikalischen Systemen gibt es auch in der Elektrodynamik einige erhaltene Größen wie Ladung, Energie, Impuls und Drehimpuls. Diese können gelegentlich zur Lösungsfindung hilfreich sein, bzw. um Informationen über Feldkonfigurationen zu erlangen, die auf direktem Weg nicht zugänglich sind. In der Regel hängen Erhaltungsgrößen mit Symmetrien des physikalischen Systems zusammen.

8.1 Ladungserhaltung

- Erhaltung der elektrischen Ladung

Eines der Grundprinzipien in der Elektrodynamik ist die *Ladungserhaltung* mittels der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (8.1)$$

Die Maxwell-Gleichungen sind so formuliert, dass die Kontinuitätsgleichung aus Konsistenzgründen erfüllt sein muss. Alternativ kann man sagen, dass die Kontinuitätsgleichung aus den Maxwell-Gleichungen folgt.

Integration über ein Volumen V ergibt die Ladungserhaltung

$$\begin{aligned} Q_V &= \int_V dx^3 \rho, \\ \dot{Q}_V &= \int_V dx^3 \partial_t \rho = - \int_V dx^3 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{j} =: -J_{\partial V}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Die Änderung der Gesamtladung im Gebiet V ist gleich dem Fluss J durch die Oberfläche ∂V von V . Verhindert man den Fluss durch ∂V oder ist V der gesamte Raum \mathbb{R}^3 ohne Rand, so ist Q eine Erhaltungsgröße.

8.2 Energie und Impuls

- Energiedichte und Energie
- Energiestromdichte, Poynting-Vektor
- Impulsdichte
- Maxwellscher Spannungstensor
 - Nolting 4.1.4,5; Jackson 6.8,9

Energie. Wir haben bereits die Energie der elektro- und magnetostatischen Felder bestimmt. Addiert man beide Beiträge, so erhält man die *Energiedichte*

$$w(x) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2. \quad (8.3)$$

Wie ändert sich die Energiedichte mit der Zeit?

$$\partial_t w = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B}. \quad (8.4)$$

Setzen wir nun die Maxwell-Gleichungen ein

$$\begin{aligned} \partial_t w &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{j} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{j}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Wir erhalten also eine weitere Kontinuitätsgleichung, den *Satz von Poynting*

$$\partial_t w + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j} \quad \text{mit} \quad \vec{S} := \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (8.6)$$

Der *Poynting-Vektor* \vec{S} ist somit die *Energiestromdichte* analog zur elektrischen Stromdichte j . Der inhomogene Term $\vec{E} \cdot \vec{j}$ beschreibt die Leistung, die das Feld an der existierenden Stromdichte verrichtet. Dieser Ausdruck ist konsistent mit der Kraftdichte auf die Ladungs- und Stromverteilung

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (8.7)$$

Für letzteres benutze man die Beziehung $\vec{j} = \rho \vec{v}$, die z.B. von Punktladungen folgt.

Für einen Bereich V ergibt sich per Integration

$$\dot{W}_V + S_{\partial V} + P_{\text{mech},V} = 0 \quad (8.8)$$

mit den Größen

$$\begin{aligned} W_V &:= \int_V dx^3 w(x), \\ S_{\partial V} &:= \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot \vec{S}, \\ P_{\text{mech},V} &:= \int_V dx^3 \vec{j} \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Das heisst, dass die Änderung der Feldenergie W im Bereich V gegeben ist durch den Energiefluss S durch die Oberfläche ∂V und durch die mechanische Leistung P_{mech} im Bereich V . Für ein freies Feld im gesamten Raum \mathbb{R}^3 ist W erhalten.

Impuls. Betrachten wir als Nächstes den Impuls P , der ebenso wie die Energie W erhalten sein sollte. Wir beginnen mit der (bekannten) elektromagnetischen Kraft, welche per Definition die Änderungsrate des Impulses beschreibt. Diese Beziehung lässt sich ebensogut mittels Kraftdichte f und Impulsdichte π ausdrücken, wenn man einen Divergenzterm hinzuaddiert

$$\dot{\vec{\pi}} + \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot T \quad \text{bzw. in Komponenten} \quad \partial_t \pi_k + f_k = \sum_{j=1}^3 \nabla_j T_{jk}. \quad (8.10)$$

Hier ist T ein Tensor vom Rang zwei (Matrix), der die Impulsstromdichte des Feldes beschreibt. Die integrierte Impulserhaltung lautet

$$\partial_t \vec{P}_V + \vec{F}_V = \oint_{\partial V} dx^2 \vec{n} \cdot T. \quad (8.11)$$

Hier stellen P_V den Gesamtimpuls im Gebiet V und F_V die Gesamtkraft auf V dar. Der letzte Term beschreibt den Impulsfluss durch den Rand ∂V .

Im Folgenden leiten wir geeignete Ausdrücke für diese Grössen her. Die Kraftdichte, die auf eine Ladungs- und Stromdichte wirkt, ist gegeben durch

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (8.12)$$

Wir setzen nun die Strom- und Ladungsdichte aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen ein

$$\vec{f} = \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \times \vec{B}. \quad (8.13)$$

Wir vervollständigen die zeitliche Ableitung im letzten Term, und benutzen die homogenen Maxwell-Gleichungen um $\partial_t \vec{B}$ zu ersetzen. Schliesslich fügen wir einen Term $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B}$ ein, der Aufgrund einer der Maxwell-Gleichungen Null ist

$$\begin{aligned} \vec{f} = & -\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}) \\ & - \varepsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} \\ & - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

Falls wir zeigen können, dass die hinteren Terme eine Divergenz darstellen, haben wir

$$\vec{\pi} := \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S} \quad (8.15)$$

als *Impulsdichte* des elektromagnetischen Feldes identifiziert.

Um dies zu zeigen, betrachten wir die Kombination $(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \vec{F} - \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ welche für das elektrische und das magnetische Feld gleichermassen auftritt

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \vec{F} - \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \vec{F} - \vec{\nabla} \vec{F} \cdot \vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}. \quad (8.16)$$

In Komponenten lautet dieser Ausdruck

$$\sum_{j=1}^3 (F_k \nabla_j F_j + F_j \nabla_j F_k - F_j \nabla_k F_j) = \sum_{j=1}^3 \nabla_j (F_j F_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{F}^2). \quad (8.17)$$

Demnach können wir für die *Impulsstromdichte* setzen

$$T_{jk} = \varepsilon_0 (E_j E_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{E}^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_j B_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \vec{B}^2). \quad (8.18)$$

Dieses Objekt heisst Maxwellscher *Spannungstensor*

8.3 Symmetrien

- Symmetrien
- Drehimpuls, Schwerpunkt
- Bezugssysteme

Ladungserhaltung hat i.d.R. etwas mit Symmetrien des physikalischen Systems zu tun:

Ladung	Symmetrie
Energie	Zeittranslation
Impuls	Ortstranslation
Drehimpuls	Rotation
Schwerpunktbewegung	Bezugssystemtransformation
elektrische Ladung	Eichtransformation

Energie und *Impuls* haben wir bereits kennengelernt

$$W = \int dx^3 w, \quad \vec{P} = \int dx^3 \vec{\pi}. \quad (8.19)$$

Der *Drehimpuls* und der *Energieschwerpunkt* sind definiert als

$$\vec{L} = \int dx^3 \vec{x} \times \vec{\pi}, \quad \vec{G} = \int dx^3 w \vec{x}. \quad (8.20)$$

Der Drehimpuls L ist wie gewohnt erhalten, der Energieschwerpunkt G bewegt sich hingegen linear mit dem Impuls P , d.h. die Kombination $\vec{G} - c^2 t \vec{P}$ ist erhalten.

Schliesslich gibt es noch die konforme Symmetrie und entsprechende Ladungen, die wir im Rahmen der Elektrodynamik nicht diskutieren wollen.

8.4 Elektromagnetische Dualität und Magnetische Monopole

- Elektromagnetische Dualität für freie Felder
- Magnetische Ladungen

Die freien Maxwell-Gleichungen weisen eine Symmetrie auf, die zumindest von theoretischem Interesse ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} &= 0.\end{aligned}\tag{8.21}$$

Die elektrischen und magnetischen Felder treten bis den Faktor $-c^2$ analog auf. Eine einfache Rotation von E und cB erhält die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}.\tag{8.22}$$

Diese Eigenschaft wird *elektromagnetische Dualität* genannt.

In Anwesenheit von elektrischen Ladungen und Strömen $\rho = \rho_{\text{el}}, j = j_{\text{el}}$ würde man zusätzliche magnetische Quellen einführen müssen: $\rho_{\text{mag}}, j_{\text{mag}}$.

- Solche magnetischen Ladungen wurden allerdings (bislang) nicht entdeckt.
- Das elektromagnetische Potential (Φ, A) erlaubt keine solchen Ladungen, da die homogenen Maxwell-Gleichungen impliziert sind.

Interessanterweise kann man *punktförmige magnetische Monopole* mittels der üblichen elektromagnetischen Ladungen (in der Mathematik mittels Differentialgeometrie) dennoch konsistent beschreiben. Man erhält so den hypothetischen *Dirac-Monopol*. In der entsprechenden Quantentheorie (QED) würde eine solche Feldkonfiguration die Ladungsquantisierung erklären (warum gilt $q_e = q_p$ exakt?). Der Monopol ist eine sehr spannende Feldkonfiguration mit wichtigen Aspekten der Differentialgeometrie und Topologie.

Teil III

Relativitätstheorie

9 Spezielle Relativitätstheorie

Die Maxwell-Gleichungen sowie die Kopplung an geladene Teilchen sind invariant unter Lorentz-Transformationen. Vertraut man den Maxwell-Gleichungen und verallgemeinert diese Symmetrie auf alle physikalischen Prozesse, so erhält man die spezielle Relativitätstheorie. Hier wollen die Elektrodynamik in kovarianter Raumzeit-Schreibweise formulieren.

9.1 Poincaré-Transformationen

- Galilei-Transformationen
- Symmetrie der Wellengleichung
- Lorentz-Transformationen
- Maxwell-Gleichungen
- Jackson 11.1–4

Galilei-Transformationen. Wir haben bereits gesehen, dass die Maxwell-Gleichungen nicht invariant unter der Galilei-Symmetrie sind

$$\vec{x} = \vec{x}' - \vec{v}t', \quad t' = t, \quad (9.1)$$

welche den Wechsel von gleichmässig bewegten Bezugssystemen beschreibt. Jeweils zwei der Gleichungen sind invariant unter den Transformationen

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B} \quad (9.2)$$

bzw.

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}, \quad \rho' = \rho, \quad \vec{j}' = \vec{j} - \vec{v}\rho. \quad (9.3)$$

Allerdings sind die beiden Transformationsregeln untereinander nicht kompatibel, welches man am deutlichsten anhand der Wellengleichung

$$\square \Psi = 0 \quad (9.4)$$

erkennen kann, welche für alle Komponentenfelder Ψ von E und B gilt. Hier leiten wir die Gleichung für B aus der Differentialgleichung für das Vektorpotential in Abwesenheit von Quellen her

$$-\square \vec{A} + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] = 0. \quad (9.5)$$

Die Rotation dieser Gleichung ergibt unmittelbar $\square \vec{B} = 0$. Wir werden die Wellengleichungen und ihre Lösungen später diskutieren, hier betrachten wir sie

lediglich als eine bestimmte Differentialgleichung. Ihre Galilei-Transformierte hat einige zusätzliche Terme

$$\left(\square - \frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \partial_t - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})^2 \right) \Psi' = 0, \quad (9.6)$$

welche die Symmetrie verletzen. Für die Ausbreitung von Schall gilt zwar eine analoge Wellengleichung (mit deutlich kleinerer Schallgeschwindigkeit c). Die Verletzung der Galilei-Invarianz stellt aber kein Problem dar, denn der Schall ist an ein Medium gebunden (Luft, Festkörper), welches in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedliche Geschwindigkeiten hat. Damit darf die Wellengleichung im Medium durchaus von der Geschwindigkeit v des Mediums abhängen.

Um die Maxwell-Gleichungen in Einklang mit der Unabhängigkeit vom Bezugssystem zu bringen, hat man um 1900 den *Äther* als Medium postuliert, auf dem sich elektromagnetische Wellen fortpflanzen. Dessen Bewegungszustand würde zu zusätzlichen Termen in den Maxwell-Gleichungen führen, die die Galilei-Invarianz widerherstellen. Allerdings konnte experimentell keine Abhängigkeit vom Bezugssystem (d.h. Bewegungszustand des Äthers) festgestellt werden. Die Beobachtung, dass die Lichtgeschwindigkeit isotrop und unabhängig von Tages- und Jahreszeit ist, führte zu seltsamen Hypothesen, wie z.B. dass der Äther von der Erde mitgezogen wird und damit sich für uns immer in Ruhe befindet.

Es gibt aber eine viel einfachere (wenn auch seltsame und radikale) Erklärung, welche ohne Äther auskommt, mit allen Daten in Einklang ist und damit wissenschaftlich vorzuziehen ist: Die spezielle Relativitätstheorie mit Lorentz- bzw. Poincaré-Symmetrie.

Ein Indiz für eine exakte Symmetrie, welche die Galilei-Symmetrie verallgemeinert, ist die gleichmässige Bewegung des Energieschwerpunkts des elektromagnetischen Feldes, welche sich als Erhaltungsgrösse formulieren lässt. Sie deutet auf eine Symmetrie der Feldgleichung hin, die ähnlich der Bezugssysteminvarianz der Galilei-Symmetrie ist.

Symmetrie der Wellengleichung. Wir können die gewünschte Symmetrie aus der Wellengleichung $\square\Psi = 0$ herleiten. Man vergleiche dafür die Wellengleichung

$$\left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \right] \Psi(x, t) = 0 \quad (9.7)$$

mit der Laplace-Gleichung

$$\left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 \right] \Psi(x) = 0. \quad (9.8)$$

Letztere ist bekanntermassen invariant unter Rotationen, d.h. $\Psi'(x') = \Psi(x)$ mit $x' = Rx$ erfüllt die Gleichung $\Delta\Psi' = 0$ falls $\Delta\Psi = 0$. Rotationen sind so

ausgezeichnet, dass sie das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ invariant lassen

$$\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x}'^T \vec{y}' = \vec{x}^T R^T R \vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad (9.9)$$

d.h. es muss gelten $R^T R = 1$. Die Matrix R muss demnach orthogonal sein, sie gehört zur kontinuierlichen Gruppe $SO(3)$ (bzw. $O(3)$ falls Spiegelungen erwünscht sind). Ebenso transformieren die Ableitungen $\vec{\nabla}' = R \vec{\nabla}$ und demnach

$$\Delta' = \vec{\nabla}'^2 = \vec{\nabla}'^T R^T R \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^T \vec{\nabla} = \Delta. \quad (9.10)$$

Wir sehen nun klar und deutlich, wie wir die Symmetrie auf die Wellengleichung verallgemeinern können. Wir haben lediglich eine weitere Koordinate t , die wir mit $x^0 := ct$ bezeichnen wollen, damit sie ebenfalls die Dimension Länge trägt. Die Wellengleichung lautet somit etwas einheitlicher

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 \right] \Psi(x^0, \vec{x}) \\ &= \sum_{\mu=0}^3 \eta^{\mu\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^2 \Psi(x) = 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Hier ist $\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ eine bestimmte Diagonalmatrix.

Lorentz-Transformationen. Wir müssen also die Symmetrietransformation so definieren, dass der D'Alembert-Operator invariant ist

$$\begin{aligned} \square' &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \right) \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \square. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Mit der Transformation der Ableitungen bei einer linearen Abbildung

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right) = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\nu{}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right), \quad (9.13)$$

sollte also für Invarianz von \square gelten

$$\Lambda \eta \Lambda^T = \eta \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\rho, \sigma=0}^3 \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu}. \quad (9.14)$$

Zusätzlich zu den Rotationen für \vec{x} mit 3 Freiheitsgraden gibt es hier 3 weitere Freiheitsgrade, welche die Zeit und den Raum vermischen. In $1 + 3$ Block-Notation kann man sie schreiben als die Matrix (*Lorentz-Boost*)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \vec{v}^T / c \\ \gamma \vec{v} / c & 1 + \gamma^2 \vec{v} \vec{v}^T / c^2 (1 + \gamma) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2 / c^2}}. \quad (9.15)$$

Für die transformierten Koordinaten gilt somit:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \gamma \vec{v} t + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v}, \quad t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{x}. \quad (9.16)$$

Für $\|v\| \ll c$ und somit $\gamma \approx 1$ ergeben sich als Näherung die 3 Galilei-Transformationen $x' = x - vt$, $t' = t$. Eine Besonderheit der exakten Symmetrie ist allerdings, dass sich die Zeit nichttrivial transformiert und sogar von den räumlichen Koordinaten des ursprünglichen Koordinatensystems abhängt. Dies ist der unintuitive Preis, den man für die Symmetrie zahlen muss.¹

Diese Symmetrien sind letztlich für die lineare Bewegung des Energie-Schwerpunkts verantwortlich. Da die Maxwell-Gleichungen mit hoher Genauigkeit unter verschiedenen Voraussetzungen bestätigt wurden, kann man von der Relevanz dieser sogenannten Lorentz-Symmetrie ausgehen. Einige Fakten hierzu:

- Die Komposition zweier Lorentz-Boosts mit kollinearen Geschwindigkeiten ergibt wieder einen Lorentz-Boost

$$\Lambda(\vec{n}v_1)\Lambda(\vec{n}v_2) = \Lambda(\vec{n}v_3) \quad \text{mit} \quad v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \quad (9.17)$$

Geschwindigkeiten addieren sich also nichtlinear! Dieses Additionstheorem impliziert, dass falls $\|v_1\|, \|v_2\| < c$ auch $\|v_3\| < c$ sowie $\|v_3\| = c$ falls $\|v_1\| = c$ oder $\|v_2\| = c$.

- Die Komposition zweier Lorentz-Boosts mit verschiedenen Richtungen ergibt einen Lorentz-Boost kombiniert mit einer Rotation. Das Ergebnis hängt von der Reihenfolge ab (wie bei Rotationen).
- Die (kontinuierliche) Gruppe der Symmetrien der Wellengleichung $\square\Psi = 0$ (mit der Einschränkung, dass $x = 0$ festgehalten wird) ist $\text{SO}(3, 1)$ und heisst *Lorentz-Gruppe*.
- Translationen in Zeit und Raum sind ebenfalls Symmetrien. Zusammen mit den Lorentz-Transformationen bilden sie die *Poincaré-Gruppe*.
- Es gibt auch diskrete Transformationen, nämlich die Raum- und Zeit-Spiegelungen (bzw. auch die Raum-Zeit-Spiegelung), welche die Wellengleichung invariant lassen. Diese erweitern die minimale Poincaré-Gruppe.

Maxwell-Gleichungen. Schliesslich können wir noch die Lorentz-Boosts der elektromagnetischen Felder angeben

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma \vec{E} + \gamma \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{v}, \\ \vec{B}' &= \gamma \vec{B} - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{v}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Diese Transformation erhält die Maxwell-Gleichungen wenn E', B' bei x' ausgewertet werden, während E, B bei x definiert sind. Den Ursprung dieser

¹Er darf unintuitiv sein, da im Alltag $\|v\| \ll c$.

(komplizierten) Formeln werden wir in Kapitel ?? verstehen, in Termen von einfachen Transformationsformeln in tensorieller Sprache. Man kann die Invarianz der Maxwellgleichungen aber auch direkt mit etwas Ausdauer überprüfen. Man erkennt auch die beiden Sätze von Galilei-Transformationen für $\|v\| \ll c$ und $\gamma \approx 1$ je nachdem, ob $E \sim vB$ oder $E \sim (c^2/v)B$ angenommen wird. Für die Quellen ergibt sich weiterhin

$$\rho' = \gamma\rho - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{j}, \quad \vec{j}' = \vec{j} - \gamma\rho\vec{v} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{j} \cdot \vec{v})\vec{v}. \quad (9.19)$$

Dies hat ebenfalls die partiellen Galilei-Transformationen als Grenzfall. Weiterhin erfüllen die transformierten Quellen die Kontinuitätsgleichung exakt.

9.2 Raumzeit und relativistische Kinematik

Der wesentliche konzeptuelle Schritt zum Verständnis der speziellen Relativitätstheorie besteht darin, Raum und Zeit als einheitliche 3+1-dimensionale **Raumzeit** zu behandeln. Diese Raumzeit wird durch 4 Koordinaten

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x^i \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

mit $\mu = 0, \dots, 3$ und $i = 1, 2, 3$ beschrieben, und ist mit der Lorentz-invarianten Minkowski (pseudo-) Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ausgestattet ist. Punkte in der Raumzeit beschreiben “Ereignisse”, und die Trajektorie oder Bahn $x^\mu(t)$ eines Teilchens in der Raumzeit wird als “Weltlinie” bezeichnet. Der (Lorentz-invariante) Vierer-Abstand zweier Ereignisse x^μ und y^μ ist dann gegeben durch

$$s^2 := \|x - y\|^2 := (x^0 - y^0)^2 - \sum_i (x_i - y_i)^2 =: c^2\tau^2$$

Dieser “vierer-” Abstand ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten, solange diese durch eine Lorentz-Transformation zusammenhängen:

$$x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu. \quad (9.21)$$

Eine Wahl solcher Koordinaten nennt man *Inertialsystem*. Punkte bzw Vektoren $x^\mu - y^\mu$ mit $\tau^2 > 0$, $\tau^2 = 0$ bzw. $\tau^2 < 0$ werden als zeitartig, lichtartig oder raumartig bezeichnet. Das *Einstein'sche Relativitätsprinzip* besagt, dass die Form der Naturgesetze in allen Inertialsystemen die gleiche ist. Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich, was durch die Konstruktion der Lorentz-Transformationen sichergestellt ist.

Wir wählen ein Ereignis x mit Koordinaten x^μ auf dieser Trajektorie (zB zum Zeitpunkt t). Der *Lichtkegel* von x ist definiert als die Menge aller Punkte y , die einen lichtartigen Abstand haben von x , also $\|x - y\|^2 = 0$. Dies ist die Vereinigung aller möglichen Lichtstrahlen ausgehend von x . Das Relativitätsprinzip ist erfüllt, da der 4er Abstand in allen Inertialsystemen der gleiche ist. Die Menge aller

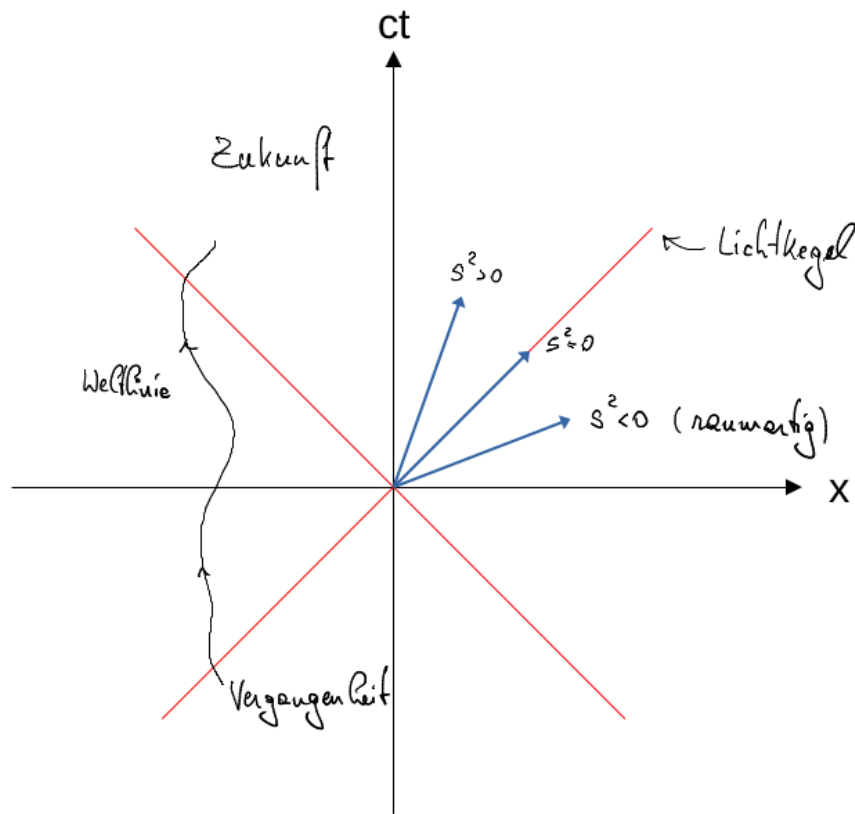


Abbildung 9.1: Raumzeit-Diagramm

Punkte y der Raumzeit mit zeitartigem Abstand $\|y - x\|^2 > 0$ und $y^0 > x^0$ bezeichnet man als *Zukunft* von x , und für $y^0 < x^0$ als *Vergangenheit* von x . Zwischen Punkten x und y der Raumzeit mit raumartigem Abstand $\|y - x\|^2 < 0$ ist kein kausaler Zusammenhang möglich; solche Punkte bezeichnet man als *kausal getrennt*.

Zum Verständnis von kausalen Zusammenhängen in der Relativitätstheorie ist es nützlich, die Trajektorien $x^\mu(t)$ von Objekten in einem Raumzeit Diagramm zu veranschaulichen².

Betrachten wir eine (zeitartige) Trajektorie von A nach B (Skizze). Die *Eigenzeit* entlang der Weltlinie ist definiert als

$$\begin{aligned}\tau_{AB} &= \int_A^B d\tau = \frac{1}{c} \int_A^B \sqrt{dx_0^2 - \sum_i dx_i^2} \\ &= \frac{1}{c} \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} d\sigma \sqrt{\left(\frac{dx_0}{d\sigma}\right)^2 - \sum \left(\frac{dx_i}{d\sigma}\right)^2}\end{aligned}\tag{9.22}$$

²Die Wahl des Parameters ist dabei unerheblich, aber es ist oft am einfachsten t als Parameter zu wählen.

für einen beliebigen Parameter σ entlang der Trajektorie. Dies ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung und des Inertialsystems. Insbesondere können wir $\sigma = t$ als Parameter wählen, und erhalten

$$\tau_{AB} = \frac{1}{c} \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{c^2 - \sum_i \dot{x}_i^2} = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} = \int_{t_A}^{t_B} dt \frac{1}{\gamma(t)} . \quad (9.23)$$

Dies ist die Zeit, die eine entlang der Trajektorie mitgeführte Uhr misst, also die physikalisch relevante Zeit entlang der Trajektorie. Dies kann man sich kurz als

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)}$$

merken, mit $d\tau \leq dt$ (da $\gamma \geq 1$). Hier ist dt das (infinitesimale) Zeitintervall gemessen im Inertialsystem x^μ , und $d\tau$ das entsprechende (infinitesimale) Zeitintervall gemessen in einem mitbewegten Inertialsystem. Insbesondere vergeht z.B. in einem Raumschiff von der Erde zum Mars und zurück weniger Zeit als auf der ruhenden Erde (Übungsaufgabe). Dies ist das bekannte Zwillingsparadoxon, welches zwar faszinierend aber nicht paradox ist: es gibt einfach keine universelle Zeit. Man kann also sagen, dass die Zeit in einem bewegten System um den Faktor γ langsamer verläuft wie in einem ruhenden System.

9.3 Tensoren

- Kontra- und Kovariante Vektoren
- Tensoren und Minkowski Metrik
- Tensorfelder und Ableitungen
- Jackson 11.7,8

Die obigen Ausdrücke für die Lorentz-Transformationen sind lang und wenig aufschlussreich, und explizite Rechnungen werden unnötig kompliziert. In dem Formalismus der *Vierer-Vektoren* der *Raumzeit* vereinfachen sich viele Ausdrücke enorm und man kann die Struktur der Raumzeit unmittelbar erkennen. Wir wollen also kurz den Formalismus, der bereits in der Mechanik eingeführt wurde, wiederholen.

Kontravariante und Kovariante Vektoren. Die Koordinaten $x^\mu = (ct, \vec{x})$ transformieren mit der Matrix Λ^{-1} und der Verschiebung b^μ (Poincaré-Transformation) als

$$x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu =: \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \quad (9.24)$$

bzw. in Matrixnotation $x' = \Lambda^{-1}x + b$. Man verwendet bei der Notation mit Indizes $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ in aller Regel die Summenkonvention, dass über wiederholte Indizes innerhalb eines Tensors (ein oberer, ein unterer) implizit über alle

erlaubten Werte summiert wird. Dies entspricht einer Matrix-Multiplikation, wenn der (erste) untere Index die Spalten aufzählt, während der (zweite) obere Index die Zeilen nummeriert.

Ein Vierer-Vektor A^μ mit oberem Index heisst *kontravariant*, wenn er ähnlich wie x^μ (allerdings ohne Translation) transformiert,³ d.h.

$$A'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu A^\nu, \quad \text{bzw.} \quad A' = \Lambda^{-1} A. \quad (9.25)$$

Das Duale eines kontravarianten Vektors ist ein *kovarianter* Vektor B_μ mit unterem Index. Er transformiert mit der Matrix Λ

$$B'_\mu = B_\nu \Lambda^\nu{}_\mu, \quad \text{bzw.} \quad B' = B \Lambda. \quad (9.26)$$

Per Konstruktion ist die Kontraktion eines kovarianten Vektors mit einem kontravarianten Vektor ein *Skalar*, d.h. invariant⁴

$$B' \cdot A' = B'_\mu A'^\mu = B_\mu \Lambda^\mu{}_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho A^\rho = B_\mu \delta^\mu{}_\rho A^\rho = B_\mu A^\mu = B \cdot A. \quad (9.27)$$

Tensoren und Metrik. Das Tensorprodukt zweier Vektorräume ist ein Vektorraum dessen Dimension das Produkt der Dimensionen der Faktoren ist. Tensorräume erlauben es, das Produkt aller Kombinationen von Komponenten zweier Vektoren darzustellen:

$$A, B \in V, \quad C := A \otimes B \in V \otimes V, \quad C_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu. \quad (9.28)$$

Lorentz-Transformationen lassen sich natürlich auf Tensorprodukten darstellen. Die Transformationsregel

$$C'_{\mu\nu} = C_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu. \quad (9.29)$$

ist kompatibel mit $C_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$ für zwei kovariante Vektoren. Tensorprodukte gibt es für beliebig viele ko- und kontravariante Vektorräume. Ein *Tensor* vom Rang (p, q) hat die Indexstruktur⁵

$$C_{\mu_1 \dots \mu_p}{}^{\nu_1 \dots \nu_q} \quad (9.30)$$

und transformiert mit p Faktoren Λ und q Faktoren Λ^{-1} .

Die obigen Überlegungen gelten für allgemeine lineare Transformationen. Wir interessieren uns für Lorentz-Transformationen, welche die folgende Relation erfüllen

$$\Lambda^\mu{}_\rho \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \Lambda \eta \Lambda^T = \eta. \quad (9.31)$$

³Genaugenommen muss sich A^μ wie die Differentialform dx^μ transformieren, die invariant unter Translationen ist.

⁴Vom Standpunkt der linearen Algebra ist diese Kontraktion eine natürliche Operation: Sei $V = \mathbb{R}^{3,1}$ der Raum der kovarianten Vektoren, so ist der duale Raum $V^* = \mathbb{R}^{3,1}$ der Raum der kontravarianten Vektoren. Die Kontraktion $B \cdot A$ ist die Anwendung der linearen Abbildung $A \in V^*$ auf einen Vektor $B \in V$.

⁵Sei $V = \mathbb{R}^{3,1}$ der Raum der kovarianten Vektoren. Dann ist ein Tensor vom Rang (p, q) ein Element des Tensorprodukts $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ oder alternativ eine lineare Abbildung $V^{\otimes q} \rightarrow V^{\otimes p}$.

Sie sind genau so geartet, dass sie die (inverse) *Minkowski-Metrik* η invariant lassen⁶

$$\eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (9.32)$$

Die inverse Metrik ist ein Tensor vom Rang $(0, 2)$, der symmetrisch in beiden Indizes ist, $\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}$.

Die eigentliche Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ ist das Inverse von $\eta^{\mu\nu}$ und damit ein Tensor vom Rang $(2, 0)$. Aufgrund der Invarianz der Metrik kann man nun ko- in kontravariante Vektoren umwandeln, ohne ihr Transformationsverhalten zu ändern

$$\begin{aligned} A_\mu &:= \eta_{\mu\nu} A^\nu, & A'_\mu &= \eta'_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} A'^\nu, \\ B^\mu &:= \eta^{\mu\nu} B_\nu, & B'^\mu &= \eta'^{\mu\nu} B'_\nu = \eta^{\mu\nu} B'_\nu. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Dank der Metrik η spielt die Art des Vektors in der speziellen Relativitätstheorie keine Rolle, ko- und kontravariante Indizes sind äquivalent, haben aber durchaus verschiedene Rechenregeln. Für Tensoren der Art (p, q) ist also nur der gesamte Rang $p + q$ relevant, da man mit der Metrik alle Indizes nach oben bzw. nach unten verschieben kann.

Die Metrik definiert ein invariantes *Skalarprodukt* für zwei gleichartige Vektoren

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \quad (9.34)$$

Ebenso kann man über zwei Indizes eines Tensors die Spur bilden

$$C_\mu{}^{\mu\cdots} = \eta_{\mu\nu} C^{\mu\nu\cdots} = \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu\cdots}, \quad (9.35)$$

und erhält wieder einen Tensor mit um 2 Indizes reduziertem Rang, welcher sich unter Transformationen entsprechend verhält.

Tensorfelder und Ableitungen. Für die Elektrodynamik verwenden wir Felder, welche von \vec{x} und t abhängen. Ein skalares Feld $\Psi(x) = \Psi(\vec{x}, t)$ hat hier die Transformationsregel

$$\Psi'(x') = \Psi(x). \quad (9.36)$$

Nun haben wir in der Elektrodynamik viel mit Vektor- bzw. Tensorfeldern zu tun. Solche transformieren wie Felder, die auch Vektoren bzw. Tensoren sind, z.B. ein ko- bzw. kontravariantes Vektorfeld

$$A'_\mu(x') = A_\nu(x) \Lambda^\nu{}_\mu, \quad B'^\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu B^\nu(x). \quad (9.37)$$

Die Koordinaten von Feldern werden oft unterdrückt, demnach ist es wichtig zu verstehen, wie partielle Ableitungen transformieren. Hierfür ist wichtig, dass x von

⁶Es gibt zwei Konventionen für die Minkowski-Metrik, die sich durch ein allgemeines Vorzeichen unterscheiden. Dies führt zu unterschiedlichen Interpretationen der Vorzeichen von Skalarprodukten von Vierer-Vektoren. Die Physik ist allerdings in beiden Konventionen dieselbe.

x' abhängt und mittels Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)\Psi'(x') &= \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)\Psi(x(x')) \\ &= \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\Psi(x) = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi(x).\end{aligned}\quad (9.38)$$

Somit schreibt man mit der Abkürzung $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$ die Transformationsregel als

$$\partial'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu. \quad (9.39)$$

Die partiellen Ableitungen transformieren also als kovarianter Vektor.⁷ Weiterhin transformieren partielle Ableitungen von Tensorfeldern wie Tensorfelder mit einem zusätzlichen kovarianten Rang, z.B.

$$A_\mu(x) = \partial_\mu \Psi(x), \quad C^\mu{}_\nu(x) = \partial_\nu B^\mu(x). \quad (9.40)$$

9.4 Kovariante Elektrodynamik

- Felder und Gleichungen
- Erhaltungsgrößen
- Potentiale
- Jackson 11.9–11

Wir sind nun in der Lage, die Felder und Gleichungen der Elektrodynamik in den Formalismus der Vierer-Vektoren zu überführen.

Felder und Gleichungen. Eine Beobachtung ist, dass das magnetische Feld i.d.R. mit Kreuzprodukten auftritt, wo das elektrische Feld mit Skalarprodukten erscheint und umgekehrt. Wir müssen also eine Möglichkeit haben, beide Arten von Produkten zu vereinheitlichen. Hierzu können wir den total antisymmetrischen Tensor ε_{ijk} mit $\varepsilon_{123} = +1$ gut gebrauchen, z.B.

$$(\vec{A} \times \vec{B})_k = \varepsilon_{ijk} A_i B_j. \quad (9.41)$$

Das bedeutet insbesondere, dass wir die Operation $\vec{A} \times \vec{B}$ als Matrixmultiplikation $A^\times \vec{B}$ mit einem dualen Tensor A^\times schreiben können

$$(A^\times)_{ij} := -\varepsilon_{ijk} A_k = \begin{pmatrix} 0 & -A_z & +A_y \\ +A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & +A_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.42)$$

Alternativ gilt $(\vec{A} \times \vec{B})^\top = \vec{A}^\top B^\times$ oder umgekehrt

$$A_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (A^\times)_{ij}. \quad (9.43)$$

⁷Dieses Verhalten fasst man meist als Definition allgemeiner kovarianter Vektoren auf.

Die inhomogene Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{B} - c^{-2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$ lässt sich also nun schreiben als

$$\partial_j B_{jk}^\times - \frac{1}{c^2} \partial_t E_k = \mu_0 j_k. \quad (9.44)$$

Weiterhin lautet die andere inhomogene Gleichung

$$\frac{1}{c} \partial_j E_j = \mu_0 c \rho. \quad (9.45)$$

Sie hat also eine ähnliche Form, wobei der 2. Term links fehlt. Man führt einen Tensor $F_{\mu\nu}$ für die elektromagnetischen Felder E und B , den sogenannten *Feldstärketensor*

$$F_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \vec{E}^\top \\ -c^{-1} \vec{E} & B^\times \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} F_{ij} &= B_{ij}^\times = -\varepsilon_{ijk} B_k, \\ F_{0k} &= c^{-1} E_k = -F_{k0}, \\ F_{00} &= 0. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Analog definiert man die *Vierer-Stromdichte* als Vektor J_μ für die Quellen ρ und j

$$J_\mu := \begin{pmatrix} -c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} J_k &= j_k, \\ J_0 &= -c\rho. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Dann lassen sich beide Gleichungen wie folgt kombinieren

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \mu_0 J_\rho. \quad (9.48)$$

Für den zweiten Term links, beachte man dass $\partial_0 = c^{-1} \partial_t$.

Diese kompakte Form hat viele Vorteile:

- Geht man davon aus, dass $F_{\mu\nu}$ ein Tensorfeld mit Rang $(2, 0)$ ist und J_μ ein Tensorfeld mit Rang $(1, 0)$, so sind diese Maxwell-Gleichungen manifest Poincaré-invariant.⁸ Demnach beschreiben $F'_{\mu\nu}$ und J'_μ die transformierten Felder, was konsistent mit obigen Aussagen ist.
- Die Erhaltung der Ströme folgt ohne Nachdenken aus der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$,

$$0 = \partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\mu J^\mu = \mu_0 (-c^{-1} \partial_t (-c\rho) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}). \quad (9.49)$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen lassen sich weiterhin schreiben als

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (9.50)$$

oder alternativ

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \quad (9.51)$$

⁸Für Gleichungen können die Bezeichnungen *invariant* und *kovariant* äquivalent sein: Hier bilden einerseits die Maxwell-Gleichungen einen kovarianten Vierer-Vektor. Andererseits werden die Gleichungen insgesamt auf sich selbst abgebildet, und somit sind sie invariant.

mit dem *dualen Feldstärketensor* \tilde{F} , welcher definiert ist als

$$\tilde{F} := \begin{pmatrix} 0 & -\vec{B}^\top \\ \vec{B} & c^{-1} E^\times \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{F}_{ij} &= c^{-1} E_{ij}^\times = -c^{-1} \varepsilon_{ijk} E_k, \\ \tilde{F}_{0k} &= -B_k = -\tilde{F}_{k0}, \\ \tilde{F}_{00} &= 0. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Das duale Feld \tilde{F} transformiert wieder wie ein Tensorfeld und somit sind beide Formulierungen der Gleichung invariant unter Poincaré-Transformationen. Der duale Tensor \tilde{F} steht mit dem Feldtensor F über den total antisymmetrischen Tensor $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, $\varepsilon_{0123} = +1$, in Beziehung

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}^{\rho\sigma} = -F_{\mu\nu}. \quad (9.53)$$

Das Symbol $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ist ein Pseudotensor, er transformiert wie

$$\varepsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = \det \Lambda \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (9.54)$$

wobei $\det \Lambda = +1$ für Rotationen und Lorentz-Boosts und $\det \Lambda = -1$ für Spiegelungen im Raum oder in der Zeit.

Erhaltungsgrößen. Die erhaltenen Energie- und Impulsdichten und -ströme w , $\vec{S} \sim \vec{\pi}$ und T_{ij} lassen sich in einem Tensor $T_{\mu\nu}$ zusammenfassen, dem *Energie-Impuls-Tensor*, welcher den dreidimensionalen Spannungstensor auf $3+1$ Dimensionen erweitert

$$\begin{aligned} T_{ij} &= T_{ij} = \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{B}^2), \\ T_{0i} &= T_{i0} = \frac{1}{c} S_i = \frac{1}{\mu_0 c} \varepsilon_{ijk} E_j B_k, \\ T_{00} &= -w = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Wir können ihn auch kompakter mittels Feldtensoren ausdrücken

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{4\mu_0} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (9.56)$$

Er ist symmetrisch $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, spurlos $T_\mu{}^\mu = 0$ und er erfüllt die Kontinuitätsgleichung⁹

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = -\partial^\mu F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{2\mu_0} F^{\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = -J_\rho F_\nu{}^\rho. \quad (9.57)$$

Hier wandeln wir den erste Term mit der inhomogenen Maxwell-Gleichung in die Stromdichte J um und die weiteren beiden Terme heben sich mittels der homogenen Maxwell-Gleichung gegenseitig auf. Der verbleibende Term stellt die Leistung- und Kraftdichte des elektromagnetischen Feldes auf eine Ladungs- und Stromdichte dar.

⁹Die Kontinuitätsgleichung drückt zunächst die Translationsinvarianz aus. Die Symmetrie der Indizes hängt mit Lorentz-Symmetrie zusammen und die Spurlosigkeit mit konformer Symmetrie.

Potentiale. Als Nächstes wollen wir die elektromagnetischen Potentiale in einen Vierer-Vektor überführen. Man gelangt durch Vergleich zu der Form

$$A_\mu = (-c^{-1}\Phi, \vec{A}), \quad F_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu. \quad (9.58)$$

Hieraus folgen unmittelbar die homogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = \dots = 0. \quad (9.59)$$

Die Freiheit, die Potentiale A so zu wählen, dass ein vorgegebenes Feld F folgt, bedingt die Eichtransformation

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (9.60)$$

dann

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = F_{\mu\nu}. \quad (9.61)$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen für das Potential lauten

$$\mu_0 J_\nu = \partial^\mu F_{\mu\nu} = -\partial^2 A_\nu + \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = -\square A_\nu + \partial_\nu (\partial \cdot A). \quad (9.62)$$

Eine beliebige Wahl zur Fixierung der unphysikalischen Freiheitsgrade in A ist die Lorenz-Eichung

$$\partial^\mu A_\mu = \partial \cdot A = 0. \quad (9.63)$$

Dann gilt für A die Wellengleichung

$$\square A_\mu = -\mu_0 J_\mu. \quad (9.64)$$

Dies ist eine direkte Verallgemeinerung der dreidimensionalen Gleichung $\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ auf $3 + 1$ Dimensionen.

Zusammenfassung. Alle wesentlichen Größen und Beziehungen der Elektrodynamik lassen sich also mittels Vierer-Vektoren viel kompakter schreiben und man kann unmittelbar erkennen, wie sie sich unter allgemeinen Poincaré-Transformationen verhalten.

Differentialformen. Eine weitere Vereinfachung der Formulierung ergibt sich mittels Differentialformen auf dem Minkowski-Raum. Als Zugabe folgt hier eine kurze Übersicht über diese Formulierung.

Der Feldstärketensor ist eine 2-Form

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu. \quad (9.65)$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen schreiben sich kompakt als

$$dF = 0. \quad (9.66)$$

Für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen benötigen wir den dualen Feldstärketensor $\star F$ und die Quellen J als 3-Form

$$\begin{aligned}\star F &= \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\sigma, \\ J &= \star(J_\mu dx^\mu) = \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^\mu dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma.\end{aligned}\quad (9.67)$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten

$$d\star F = \mu_0 J. \quad (9.68)$$

und sie implizieren direkt die Erhaltung $dJ = 0$ der Quellen.

Das Potential $A = A_\mu dx^\mu$ ist eine 1-Form, so dass

$$F = dA. \quad (9.69)$$

Die homogene Maxwell-Gleichung $dF = ddA = 0$ ist dann automatisch erfüllt. Die Eichtransformationen lauten

$$A' = A + d\Lambda \quad \text{und} \quad F' = F + dd\Lambda = F. \quad (9.70)$$

9.5 Geladene Teilchen

- Pfade in der Raumzeit
- Lorentz-Kraft
 - Jackson 12.1,5

Pfade in der Raumzeit. Betrachten wir ein geladenes relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld. Das Teilchen sei gegeben durch einen Pfad $x^\mu(\sigma)$ in der Raumzeit. Die Beschreibung unterscheidet sich etwas von der nichtrelativistischen Beschreibung im Raum mittels $\vec{x}(t)$: Zum einen ist hier die Zeit $x^0(\sigma) = ct(\sigma)$ eine Funktion des Pfadvariablen σ . Zum anderen ist die Wahl der Pfadvariablen σ beliebig. Man darf sie z.B. durch eine beliebige monoton steigende Funktion einer anderen Variablen ersetzen. Somit hat die vierdimensionale Beschreibung effektive dieselbe Anzahl physikalischer Freiheitsgrade.

- Zur Übersetzung zur nichtrelativistischen Beschreibung wählt man z.B. $t(\sigma) = \sigma$, dann ergibt sich als Pfad $x^\mu(\sigma) = (ct, \vec{x}(t))$. Offensichtlich hängt diese Wahl vom Bezugssystem ab, in dem t definiert ist.
- In der Relativitätstheorie bietet sich an, σ als die Eigenzeit τ auf dem Pfad zu wählen. Hierzu muss gelten $(x')^2 = -c^2$. Diese Wahl ist unabhängig vom Bezugssystem.
- Man kann die Wahl auch offen lassen, was allerdings zu einigen zusätzlichen Termen führt.

Die Vierer-Geschwindigkeit des Teilchens ist definiert als normierter Tangentialvektor entlang der Trajektorie:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \quad (9.71)$$

und erfüllt somit die Gleichung

$$\|v^2\| = -v^\mu v_\mu = c^2 . \quad (9.72)$$

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \dot{\vec{x}} \end{pmatrix} = \frac{dx^\mu}{d\tau} . \quad (9.73)$$

Der kinetische Vierer-Impuls des Teilchens ist damit definiert als

$$p^\mu = mv^\mu = mc \frac{x'^\mu}{\|x'\|} . \quad (9.74)$$

Explizit ist dies

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (9.75)$$

Die Komponente $p^0 = \frac{E}{c}$ ist (per definition bzw Einsicht, siehe unten) die kinetische Energie. Die Norm des Vierer-Impulses konstant ist gegeben durch die Masse des Teilchens:

$$\|p\|^2 = -p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (9.76)$$

und somit

$$E^2 = (mc^2)^2 + \vec{p}^2 c^2 . \quad (9.77)$$

Für ruhende Teilchen erhalten wir die bekannte Formel $E = mc^2$ für die Ruheenergie de Teilchens.

Der Grund für die physikalische Relevanz dieser Konzepte ist die Erhaltung des gesamten Vierer-Impulses

$$P_{\text{gesamt}}^\mu = \sum p_{(i)}^\mu \quad (9.78)$$

eines isolierten Systems. Dies beinhaltet sowohl Energie- als auch Impulserhaltung, und ist eine Konsequenz der Translationsinvarianz von relativistisch invarianten Systemen. ("Noether-Theorem").

Lorentz-Kraft. Die Lorentz-Kraft lässt sich schreiben als (vgl. Erhaltung von $T_{\mu\nu}$)

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{q}{m} F_{\mu\nu} p^\nu . \quad (9.79)$$

Beide Seite sind Vierer-Vektoren, somit ist die Gleichung konsistent. Die linke Seite definiert die Viererkraft. Deren nullte Komponente K^0 bezeichnet die Leistung, welche durch Kraft mal Geschwindigkeit gegeben ist, $\vec{K} \cdot \vec{v}$. Dies folgt aus der Beziehung $p_\mu p^\mu = -m^2 c^2$ und somit $\frac{d}{d\tau} p_\mu p^\mu = 0$, d.h.

$$0 = K_\mu p^\mu = -K_0 p_0 + \sum_i \vec{K} \vec{p} .$$

Diese Einschränkung ist konsistent mit der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$.

Setzt man

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad \sigma = t \quad (9.80)$$

so ergibt sich die Lorentz-Kraft

$$\dot{\vec{p}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.81)$$

sowie die Leistung

$$c\dot{p}^0 = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}}. \quad (9.82)$$

Teil IV

Wellen und Strahlung

10 Lösungen der freien Wellengleichung

Eine besondere Eigenschaft der Maxwellschen Ergänzung ist, dass die Gleichungen der elektrischen und magnetischen Felder nun nicht-triviale Lösungen zulassen, die sich unabhängig von Ladungen und Strömen über den gesamten Raum ausbreiten. Dies ist ein wichtiges Indiz, dass die elektromagnetischen Felder nicht nur Hilfsgrößen für die Wechselwirkungen von Ladungen und Strömen sind, sondern eine unabhängige physikalische Realität besitzen.

10.1 Freie Wellengleichung

- Entkopplung
- Freie Wellengleichung
 - Nolting 4.3.1

In Abwesenheit von Quellen $\rho = j = 0$ lauten die Feldgleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}.\end{aligned}\tag{10.1}$$

Entkopplung. Eine Komplikation ist, dass die Gleichungen für E und B über Rotationsoperatoren gekoppelt sind. Wir können sie aber leicht über eine zweite Rotation entkoppeln

$$\begin{aligned}0 &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B}) \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} + c^{-2} \partial_t^2 \vec{E} = -\square \vec{E}, \\ 0 &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B} - c^{-2} \partial_t \vec{E}) \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} + c^{-2} \partial_t^2 \vec{B} = -\square \vec{B}.\end{aligned}\tag{10.2}$$

Wir erhalten also für beide Felder äquivalente *Wellengleichungen*

$$\square \vec{E} = 0, \quad \square \vec{B} = 0,\tag{10.3}$$

mit $\square = \Delta - c^{-2} \partial_t^2$. Diese Gleichungen gelten für alle Komponenten von E und B . Letztere sind aber über die ursprünglichen Maxwell-Gleichungen weiterhin gekoppelt.

10.2 Ebene Wellen

- Ansatz für ebene Wellen
- Monochromatische Wellen
- Komplexe und reelle Lösungen
- Superposition ebener Wellen
- Fourier Transformation
- Vollständigkeit
- Impulsdarstellung der Wellengleichung
 - Nolting 4.3.2,6; Jackson 7.1

Ebene Wellen. Betrachten wir zunächst ein einfaches skalares Feld $\Psi(x, t)$ für welches wir die Wellengleichung $\square\Psi = 0$ lösen wollen. Eine vereinfachende Annahme ist, dass das Feld nur von einer der drei Koordinaten x anhängt, sagen wir in Richtung n , d.h. $\Psi(x, t) = \psi(\vec{n}\cdot\vec{x}, t)$. Die Wellengleichung für die eindimensionale, zeitabhängige Funktion ψ lautet nun

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi. \quad (10.4)$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass die allgemeine Lösung dieser Form eine Linearkombination zweier Lösungen ist

$$\Psi(x, t) = \psi(\vec{n}\cdot\vec{x}, t) = \psi_+(\vec{n}\cdot\vec{x} + ct) + \psi_-(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct), \quad (10.5)$$

welche jeweils nur von einer Kombination der Raum- und Zeitkoordinaten abhängt. Die Form der Funktion ψ_{\pm} spielt keine Rolle, da sich die Ableitungen gegenseitig vollständig aufheben.

Die obigen Lösungen beschreiben Felder, die entlang zwei Raumrichtungen unendlich und homogen ausgedehnt sind, den sogenannten *ebenen Wellen*. Eine besondere Eigenschaft der obigen Wellengleichung ist, dass sie nicht-dispersiv ist. Sie erhält die Form der individuellen Wellen ψ_+ und ψ_- mit der Zeit, sie werden lediglich in gegensätzliche Richtungen mit der Geschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ bewegt. Da sich Licht und elektromagnetische Wellen im Vakuum mit ebendieser Geschwindigkeit bewegen, wird c die *Lichtgeschwindigkeit* genannt.

Monochromatische Wellen. Eine besonders einfache Form haben die *monochromatischen* ebenen Wellen

$$\Psi(x, t) = \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t). \quad (10.6)$$

Hier ist $\vec{k} = \|k\|\vec{n}$ der *Wellenzahlvektor* und $\omega = \pm\|k\|c$ die Kreisfrequenz der Welle. Die Funktion Ψ erfüllt neben der Wellengleichung $\square\Psi = 0$ zweiter Ordnung auch die Eigenwertgleichungen erster Ordnung

$$\vec{\nabla}\Psi = i\vec{k}\Psi \quad \text{und} \quad \partial_t\Psi = -i\omega\Psi. \quad (10.7)$$

Die Wellengleichung beläuft sich also auf die algebraische Beziehung

$$\omega^2 = c^2\vec{k}^2. \quad (10.8)$$

Die monochromatischen ebenen Wellen sind homogen in zwei Dimensionen. In der verbleibenden Richtung k sind sie periodisch mit *Wellenlänge* $\lambda = 2\pi/\|k\|$. Ebenso sind sie zeitlich periodisch mit Takt $\tau = 2\pi/\omega$.



Man beachte, dass die monochromatische Wellenfunktion komplex ist, physikalische Felder hingegen müssen reell sein. Eine reelle Wellenfunktion erreicht man durch geeignete Linearkombination zweier gegenläufiger Wellen

$$\begin{aligned}\Psi &= 2 \operatorname{Re}[A e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t}] = A e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} + A^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega t} \\ &= 2 \operatorname{Re}(A) \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) - 2 \operatorname{Im}(A) \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t).\end{aligned}\quad (10.10)$$

Man könnte demnach die Welle auch direkt mit diesen trigonometrischen Funktionen schreiben. Allerdings ist es oft bequemer mit komplexen Wellenfunktionen zu rechnen, da diese einen wohldefinierten Wellenzahlvektor k und eine wohldefinierte Kreisfrequenz ω haben. Solange man nur mit linearen Ausdrücken in den Feldern arbeitet, spielt es keine Rolle, ob das Feld reell oder komplex ist. Die Real- bzw. Imaginärteile von Ψ sind jeweils geeignete Lösungen.

Fourier-Transformation. Da die Wellengleichung eine lineare Differentialgleichung ist, können wir Lösungen mit beliebigen Wellenzahlvektoren k überlagern

$$\Psi(x, t) = \sum_j [A_j \exp(i\vec{k}_j\cdot\vec{x} - i\omega_j t) + A_j^* \exp(-i\vec{k}_j\cdot\vec{x} + i\omega_j t)]. \quad (10.11)$$

Vielmehr können wir Lösungen mit kontinuierlichen Wellenzahlen überlagern

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \left[A(k) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\|k\|ct) \right. \\ &\quad \left. + A(k)^* \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\|k\|ct) \right].\end{aligned}\quad (10.12)$$

Für eine komplexe Lösung Ψ sollte man die Koeffizienten $A(k)$ und $A(k)^*$ als unabhängig betrachten; für eine reelle Lösung müssen sie komplex konjugiert sein. Man beachte, dass die $A(k)$ in jedem Fall komplexe Größen sind.

Die Form der obigen Lösung entspricht einer *Fourier-Transformation*. Die Fourier-Transformation ist eine Verallgemeinerung der Fourier-Reihe von periodischen Funktionen auf allgemeine aperiodische Funktionen auf der gesamten Zahlengerade \mathbb{R} . Die Fourier-Transformation in einer Variablen t ist definiert als

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{F}(\omega). \quad (10.13)$$

Die inverse Transformation lautet

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} F(t). \quad (10.14)$$

Für höhere Dimensionen ist die Fourier-Transformation für alle (kartesischen) Koordinaten nacheinander durchzuführen.

Fourier-Integrale lassen sich oft mittels komplexer Funktionentheorie und dem Residuensatz ausrechnen. Dabei entsteht i.d.R. ein Faktor 2π , welcher auf die Fourier-Transformation und ihre Inverse aufgeteilt werden muss. Dies kann als $1/\sqrt{2\pi}$ gleichmässig geschehen, oder wie in der Physik gebräuchlich als $d\omega/2\pi$ für Integrale über Kreisfrequenzen (und Wellenzahlen) gegenüber dt für Integrale über die Zeit (und den Raum).

Vollständigkeit. Die obige Lösung ist vollständig in dem Sinne, dass sich jede Lösung der Wellengleichung (formal) durch geeignete Wahl der Koeffizientenfunktion $A(k)$ ausdrücken lässt. Dies lässt sich mit der *Vollständigkeit* der Fourier-Transformation begründen. In einer Dimension basiert letztere auf den formalen Relationen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} = 2\pi\delta(\omega), \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{+i\omega t} = \delta(t). \quad (10.15)$$

Diese Relationen sind distributioneller Natur und damit mit grosser Vorsicht zu geniessen und anzuwenden. Man kann sie mithilfe einer Konvergenzfaktors begründen, z.B. indem man das Integral mittels $\exp(-\frac{1}{2}\epsilon\omega^2)$ dämpft und so die delta-Funktion im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ erhält.

Die Relationen implizieren, dass die Komposition beider Transformationen die Identität ergibt, zum Beispiel

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i\omega t'} F(t') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(t - t') F(t') = F(t). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Somit ist die Fourier-Transformation bijektiv und damit vollständig (auf einem geeigneten Raum von Funktionen).

Führen wir nun eine Fourier-Transformation der obigen Lösung der Wellengleichung in der Zeit und allen drei Raumrichtungen aus

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(k, \omega) &= \int dx^3 dt e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t} \Psi(x, t) \\ &= \int dt [A(k) e^{-i\|k\|ct} + A(-k)^* e^{+i\|k\|ct}] e^{i\omega t} \\ &= 2\pi\delta(\omega - \|k\|c) A(k) + 2\pi\delta(\omega + \|k\|c) A(-k)^*. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Die Wellengleichung $\square\Psi = 0$ ist eine lineare Differentialgleichung welche durch Fourier-Transformation (mittels partieller Integration) in eine algebraische Gleichung übergeht

$$\left[\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right]\Psi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right]\tilde{\Psi} = 0. \quad (10.18)$$

Die allgemeine Lösung der letzteren lautet

$$\Psi \text{ beliebig bei } \omega = \pm\|k\|c \quad \text{ansonsten} \quad \tilde{\Psi} = 0. \quad (10.19)$$

Die Koeffizienten $A(k)$ und $A(-k)^*$ parametrisieren genau die Freiheitsgrade dieser Lösung, die man damit als vollständig betrachten kann. Das komplexe Feld $A(k)$ im sogenannten *Fourier-Raum* ist somit die Fourier-Transformierte der Lösung Ψ im *Ortsraum*.

10.3 Polarisation

- Allgemeine ebene Wellen
- Lineare Polarisation
- Zirkulare Polarisation
- Elliptische Polarisation
- Nolting 4.3.3; Jackson 7.2

Feldgleichungen. Nun müssen wir noch der Kopplung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern Rechnung tragen. Beginnen wir wieder mit einer nicht-monochromatischen ebenen Welle

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct). \quad (10.20)$$

Aufgrund der Divergenzgleichungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ gilt

$$\vec{n}\cdot\vec{E}' = \vec{n}\cdot\vec{B}' = 0. \quad (10.21)$$

Weiterhin soll die dritte Maxwell-Gleichung gelten

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \quad \text{also} \quad \vec{B}' = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}'. \quad (10.22)$$

Schliesslich können wir die letzte Maxwell-Gleichung durch Einsetzen bestätigen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} &= \vec{n}\times\vec{B}' + \frac{1}{c}\vec{E}' = \frac{1}{c}\left[\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{E}') + \vec{E}'\right] \\ &= \frac{1}{c}\left[\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{E}') - \vec{n}^2\vec{E}' + \vec{E}'\right] = 0. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Man beachte, dass die Maxwell-Gleichungen lediglich die Ableitungen von E und B betreffen. Ein konstantes elektrisches und magnetisches Feld ist also ohne Einschränkungen erlaubt. Im folgenden wollen wir konstante Beiträge ignorieren;

dann können wir alle obige Gleichungen integrieren und gelangen zu einem Satz von algebraischen Beziehungen zwischen den Feldern

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}. \quad (10.24)$$

Die ersten beiden Gleichungen erlauben nur je 2 von 3 möglichen Ausrichtungen für E und B . Die letzte Gleichung bestimmt B anhand von E , und stellt sicher, dass $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ gilt. Eine ebene Welle, die alle Maxwell-Gleichungen erfüllt, wird demnach durch ein $E(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct)$ mit der Einschränkung $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$ beschrieben. Es gibt also zwei unbestimmte Freiheitsgrade zu jeder Position.

Monochromatische Wellen. Für eine monochromatische Welle gibt es verschiedene Verhaltensmuster je nach Polarisation. Betrachten wir eine Welle der Art

$$E, B \sim \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\|k\|ct). \quad (10.25)$$

Sei zudem n_1, n_2, n_3 ein orthonormales System dreier Vektoren mit $\vec{k} = \|k\|\vec{n}_3$. Dann können wir den folgenden Ansatz machen

$$\vec{E} = \text{Re}[(a_1\vec{n}_1 + a_2\vec{n}_2) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\|k\|ct)] \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{C}. \quad (10.26)$$

Es gilt folglich für das magnetische Feld ($\vec{n}_i \times \vec{n}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \vec{n}_k$)

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \text{Re}[(a_1\vec{n}_2 - a_2\vec{n}_1) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\|k\|ct)]. \quad (10.27)$$

Diese Form deckt alle monochromatischen Lösungen zu gegebener Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω ab, der Lösungsraum ist also \mathbb{C}^2 . Für die Zeitabhängigkeit haben wir $e^{-i\omega t}$ gewählt mit $\omega > 0$, welches unter dem Realteil äquivalent zu $e^{+i\omega t}$ ist. Um die resultierenden Wellenformen zu klassifizieren, können wir a_1 und a_2 mit ein paar einfachen Transformationen geeignet einschränken:

- Rotation in der n_1, n_2 -Ebene \rightarrow Rotation von a_1 und a_2 ,
- Translation im Raum oder Zeit \rightarrow Phasenverschiebung,
- Skalierung der Amplitude \rightarrow Normierung von a_1 .

So gelangen wir zu einer allgemeinen Lösung modulo obige Transformationen

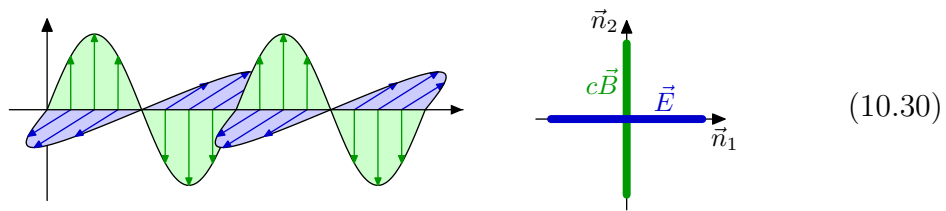
$$(a_1, a_2) = (1, i\alpha) \quad \text{mit} \quad -1 \leq \alpha \leq +1. \quad (10.28)$$

Wichtige Spezialfälle sind $\alpha = 0$ und $\alpha = \pm 1$, welche wir im Folgenden etwas genauer diskutieren.

Lineare Polarisierung. Für $\alpha = 0$ erhalten wir eine *linear polarisierte* Welle:

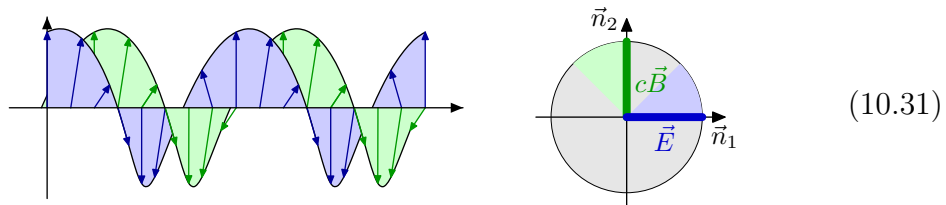
$$\vec{E} \sim \vec{n}_1, \quad \vec{B} \sim \vec{n}_2, \quad (10.29)$$

Hier stehen das elektrische und das magnetische Feld senkrecht zueinander und zur Ausbreitungsrichtung, und sie schwingen in Phase.



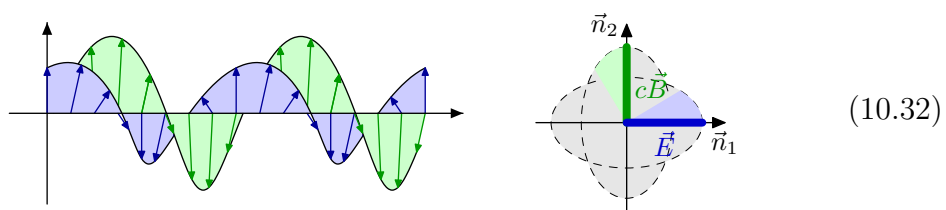
In der Tat gibt es zwei unabhängige lineare Polarisationsmoden; die zweite Mode ist um Vierteldrehung um die Ausbreitungsrichtung gekippt. Beide Moden können koexistieren und unterschiedliche Phasen haben, so dass sie eine Basis für den Lösungsraum \mathbb{C}^2 bilden.

Zirkulare Polarisierung. Für $\alpha = \pm 1$ erhalten wir eine *zirkular polarisierte* Welle



Das elektrische Feld dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der n_1, n_2 -Ebene. Das magnetische Feld dreht sich ebenso, ist aber eine Vierteldrehung versetzt. Das Vorzeichen von α bestimmt die Drehrichtung.¹ Beide zirkulare Polarisationsmoden können koexistieren und sie spannen den Lösungsraum \mathbb{C}^2 auf.

Elliptische Polarisierung. Schliesslich gibt es noch die *elliptische Polarisation* mit $\alpha \neq 0, \pm 1$. Sie beschreibt den allgemeinen Fall



Elliptische Polarisierung entsteht durch Linearkombination zweier linear polarisierter Wellen mit unterschiedlichen Phasen. Alternativ kann man sie als Linearkombination zirkular polarisierter Wellen ansehen. Die elektrischen und magnetischen Felder sind in einer allgemeinen Phasenbeziehung.

¹Interessanterweise ist die Drehrichtung eine Invariante unter Drehungen des Raumes. Die beiden zirkularen Polarisationsmoden lassen sich nur durch Raumspiegelung ineinander überführen. Zirkular polarisierte Wellen sind somit *chiral*.

10.4 Energietransport

- Ebene Wellen
- Zeitliche Mittelung
- Nolting 4.3.8

Wir wollen nun den Energie- und Impulstransport in monochromatischen ebenen Wellenfeldern ausrechnen.

Zirkulare Polarisation. Da die Energiedichte, etc. quadratische Kombinationen der Felder sind, können wir nicht direkt auf die komplexe Schreibweise vertrauen. Eine reelle Form für eine zirkular polarisierte Welle lautet

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 [\vec{n}_1 \cos(k\vec{n}_3 \cdot \vec{x} - \omega t) - \vec{n}_2 \sin(k\vec{n}_3 \cdot \vec{x} - \omega t)], \\ \vec{B} &= \frac{E_0}{c} [\vec{n}_1 \sin(k\vec{n}_3 \cdot \vec{x} - \omega t) + \vec{n}_2 \cos(k\vec{n}_3 \cdot \vec{x} - \omega t)].\end{aligned}\quad (10.33)$$

Die relevanten Kombinationen für die Energie- und Impulsdichte lauten:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \vec{E}^2 &= \varepsilon_0 E_0^2 (\vec{n}_1^2 \cos^2 - 2\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \cos \sin + \vec{n}_2^2 \sin^2) = \varepsilon_0 E_0^2, \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} (\vec{n}_1^2 \sin^2 + 2\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \cos \sin + \vec{n}_2^2 \cos^2) = \varepsilon_0 E_0^2, \\ \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{c} (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \cos^2 - \vec{n}_2 \times \vec{n}_1 \sin^2) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{c} \vec{n}_3.\end{aligned}\quad (10.34)$$

Wir finden also, dass diese Welle eine räumlich und zeitlich konstante Energie- und Impulsdichte hat

$$w = \varepsilon_0 E_0^2, \quad \vec{\pi} = \frac{\varepsilon_0}{c} E_0^2 \vec{n}_3 = \frac{w}{c} \vec{n}_3. \quad (10.35)$$

Man beachte:

- Die Energiedichte setzt sich zu gleichen Anteilen aus elektrischen und magnetischen Beiträgen zusammen.
- Die Impulsdichte ist entlang der Ausbreitungsrichtung \vec{n}_3 ausgerichtet und proportional zur Energiedichte mit Faktor $1/c$.

Untersuchen wir noch den Energie- und Impulsfluss. Die Energieflussdichte \vec{S} beträgt

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{n}_3 = w c \vec{n}_3. \quad (10.36)$$

Das bedeutet, dass die gesamte Feldenergiedichte sich mit der Geschwindigkeit c entlang der Ausbreitungsrichtung \vec{n}_3 bewegt. Die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* ist also die Lichtgeschwindigkeit c . Für den Spannungstensor erhält man mit etwas Geduld (günstig ist die Betrachtung in Komponenten im System $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$)

$$T = -\varepsilon_0 E_0^2 \vec{n}_3 \vec{n}_3^\top = -c \vec{n}_3 \vec{\pi}^\top. \quad (10.37)$$

Der Impulsfluss ist also auf die Komponente entlang der Ausbreitung beschränkt und erfolgt nur in dieser Richtung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt ebenso c .

Lineare Polarisation. Die linear polarisierte Welle bringt eine Komplikation ins Spiel

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \vec{n}_1 \cos(k\vec{n}_3 \cdot \vec{x} - \omega t), \\ \vec{B} &= \frac{E_0}{c} \vec{n}_2 \cos(k\vec{n}_3 \cdot \vec{x} - \omega t).\end{aligned}\tag{10.38}$$

Die relevanten Grössen sind nun

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \vec{E}^2 &= \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2, \\ \vec{S} &= \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{n}_3 \cos^2, \\ \vec{\pi} &= \frac{\varepsilon_0}{c} E_0^2 \vec{n}_3 \cos^2, \\ T &= -\varepsilon_0 E_0^2 \vec{n}_3 \vec{n}_3^T \cos^2.\end{aligned}\tag{10.39}$$

Wir finden also

$$\vec{\pi} = \frac{w}{c} \vec{n}_3, \quad \vec{S} = cw \vec{n}_3, \quad T = -w \vec{n}_3 \vec{n}_3^T = -c \vec{n}_3 \vec{\pi}^T.\tag{10.40}$$

Diese Beziehungen zwischen Energiedichte, Impulsdichte und Spannungstensor sind genau dieselben wie bei zirkular polarisierten Wellen. Die Energiedichte selbst ist allerdings nicht konstant, sondern sie oszilliert

$$w = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(k\vec{n}_3 \cdot \vec{x} - \omega t).\tag{10.41}$$

Man betrachtet deshalb das räumliche bzw. zeitliche Mittel

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2.\tag{10.42}$$

Dieses ist halb so gross wie der grösste Ausschlag. Man kann dieses Verhalten auf zwei Weisen interpretieren:

- Die linear polarisierte Welle entsteht als Interferenz zweier zirkular polarisierter Wellen, und die Schwankungen in der Energiedichte sind Interferenzeffekte.
- Zwei um eine Vierteldrehung phasenverschobene Wellen mit orthogonaler Polarisation ergeben eine konstante Energiedichte, die der zirkular polarisierten Welle entspricht.

10.5 Weitere Wellenlösungen

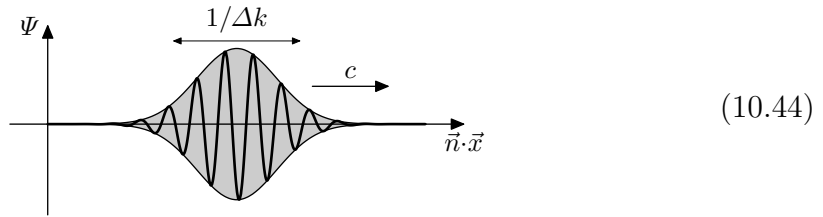
- Wellenpakete
- Gaussförmiges Wellenpaket
- Phasen- und Gruppengeschwindigkeit
- Kugelwellen
 - Nolting 4.3.4,5; Jackson 7.3

Neben den monochromatischen ebenen Wellen gibt es noch viele relevante Wellenformen, von denen wir zwei Arten diskutieren möchten.

Wellenpakete. Die monochromatischen ebenen Wellen sind in alle Richtungen und auf alle Zeiten ausgedehnt. Zudem haben sie eine exakt definierte Wellenzahl und Frequenz. Diese Eigenschaften sind allerdings nicht realistisch, denn in der Wirklichkeit haben Wellen eine endliche Ausdehnung und bestenfalls sehr scharf definierte Frequenzen. Man spricht hier von *Wellenpaketen*.

Ein instruktives Beispiel ist ein ebenes *Gaußsches Wellenpaket* (wir ignorieren die Polarisation)

$$\Psi(x, t) \sim \text{Re} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \Delta k^2 (\vec{n} \cdot \vec{x} - ct)^2 \right) e^{ik_0(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct)} \right]. \quad (10.43)$$



Diese Wellenfunktion hat eine ungefähre Wellenzahl k_0 und die charakteristische Breite $1/\Delta k$. In diesem Fall lässt sich die Fourier-Transformation exakt ausführen und man erhält

$$\Psi(x, t) = 2 \text{Re} \int \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{i(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct)k}. \quad (10.45)$$

mit

$$A(k) \sim \exp \left(-\frac{1}{2} (k - k_0)^2 / \Delta k^2 \right). \quad (10.46)$$

Die Funktion $A(k)$ beschreibt einen stark lokalisierten Puls bei k_0 der charakteristischen Breite Δk . Die inverse Beziehung zwischen den charakteristischen Breiten im Orts- und Impulsraum ist typisch für Wellenpakete und dient in der Quantenmechanik als Unschärferelation.

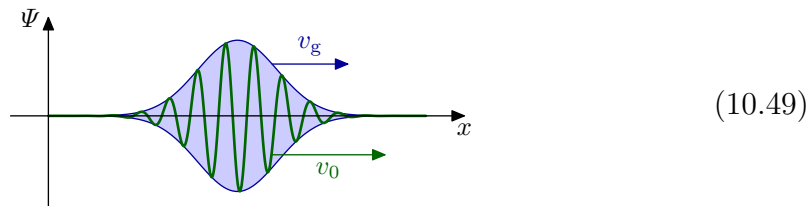
Das ebene Wellenpaket im Beispiel ist weiterhin in zwei Richtungen unendlich ausgedehnt. Natürlich gibt es auch komplett endliche Wellenpakete. Allerdings lassen sich diese meist nicht analytisch beschreiben, zumal die Wellenform aufgrund der unterschiedlichen Ausbreitungsrichtungen auseinanderläuft. Es gibt aber zwei wichtige allgemeingültige Konzepte um Wellenpakete zu beschreiben: Die *Phasengeschwindigkeit*

$$v_0 = \frac{\omega}{\|k\|} \quad (10.47)$$

beschreibt die Geschwindigkeit der einzelnen Berge und Täler der Welle. Die *Gruppengeschwindigkeit* hingegen

$$v_g = \frac{d\omega}{d\|k\|} \quad (10.48)$$

beschreibt die Geschwindigkeit des Pakets an sich.



Für ebene Wellenpakete im Vakuum betragen beide Geschwindigkeiten c , da sich das ganze Paket mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt. Im Medium mit Dispersion bewegen sich Wellen mit frequenzabhängiger Geschwindigkeit und somit ist $v_0 \neq v_g \neq c$. Weiterhin muss man v_0 und v_g als charakteristische (gemittelte) Größen ansehen, da ω und k keine exakte Gültigkeit mehr haben. Für die Gruppengeschwindigkeit gilt, dass $v_g \leq c$. Dies ist wünschenswert, da v_g die Geschwindigkeit von Information und Energie beschreibt, die durch die Lichtgeschwindigkeit beschränkt sein sollte. Die Phasengeschwindigkeit ist lediglich eine virtuelle Größe, denn die Phase an sich trägt keine Information. Damit kann sie die Lichtgeschwindigkeit durchaus überschreiten ohne Widersprüche in der Kausalität zu erzeugen.²

Kugelwellen. Eine andere wichtige Wellenform sind die *Kugelwellen*. Sie sind kugelsymmetrisch um einen Punkt (o.B.d.A. dem Ursprung) und man wählt den Ansatz

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{r} \psi(r, t), \quad (10.50)$$

Die Wellengleichung $\square\Psi = 0$ lautet dann einfach

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \psi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = 0. \quad (10.51)$$

Analog zur ebenen Welle gibt es hier zwei Funktionen, welche die einlaufende und die auslaufende Kugelwelle beschreiben

$$\Psi = \frac{1}{r} \psi_+(r + ct) + \frac{1}{r} \psi_-(r - ct). \quad (10.52)$$

Erstaunlicherweise genügen wieder zwei allgemeine Funktionen ψ_{\pm} zur Beschreibung. Der Vorfaktor $1/r$ wird benötigt, um die räumliche Ausdehnung der Welle in der Differentialgleichung zu kompensieren.

Es gibt natürlich weiterhin Kugelwellen mit Winkelabhängigkeit, welche insbesondere auch mit der Polarisation der elektromagnetischen Felder in Beziehung steht; wir werden diese Lösungen in einem späteren Kapitel besprechen.

²Eine Analogie ist die Geschwindigkeit des Bildes eines Lichtkegels auf einem entfernten Gegenstand. Hier wird zwar Information übertragen, aber jeweils nur von der Quelle zu dem Gegenstand. Es findet kein Informationsaustausch zwischen benachbarten Punkten auf dem Gegenstand statt, und somit kann die Geschwindigkeit beliebig gross sein.

Schliesslich wollen wir noch den Energietransport in monochromatischen Kugelwellen diskutieren

$$\Psi \sim \frac{1}{r} e^{ik\vec{n} \cdot \vec{x} - i\omega t}. \quad (10.53)$$

Hier gilt aufgrund der quadratischen Beziehung

$$w \sim \frac{1}{r^2}, \quad \vec{S} \sim \frac{1}{r^2} \vec{n}, \quad T \sim \frac{1}{r^2} \vec{n} \vec{n}^\top. \quad (10.54)$$

Man sieht direkt:

- Die Energie je Kugelschale ($4\pi r^2$) ist konstant; der gesamte Impuls ist Null.
- Durch jede Kugelschale fliesst dieselbe Energie; der gesamte Impulsfluss ist Null.
- Bei $x = 0$ befindet sich demnach eine Energiequelle: Sender!

Ein relevanter Unterschied zwischen Kugelwellen und elektrostatischen Lösungen ist, dass letztere mindestens wie $E \sim 1/r^2$ für $r \rightarrow \infty$ abfallen während erstere immer das asymptotische Verhalten $E \sim 1/r$ zeigen. Wie wir im kommenden Kapitel sehen werden, hängt dies mit dem Energiefluss des elektromagnetischen Feldes zusammen und ist eine einfache Konsequenz der Geometrie: Die Energieflussdichte ist proportional zu $E^2 \sim 1/r^2$ und damit der Energiefluss durch jede Kugelschale mit Fläche $\sim r^2$ konstant.

11 Elektrodynamik mit Materie

Wir wollen nun die Auswirkung von Materie auf die Elektrodynamik diskutieren. Wichtige Effekte sind die Dispersion, Reflexion und Brechung an Grenzflächen und Streuung an Objekten.

11.1 Wellen im Medium

- Maxwell-Gleichungen
- Ebene Wellen
- Dispersion
- Gaberdiel 8.3–5; Jackson 6.10, 7.4

Wir haben die Elektro- und Magnetostatik in Anwesenheit von Materie bereits diskutiert. Im Wesentlichen übertragen sich die Relationen auf die Elektrodynamik.

Maxwell-Gleichungen. Die Maxwell-Gleichungen in Materie lauten:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{j}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0.\end{aligned}\quad (11.1)$$

Für die erhaltenen Größen ergibt sich dann

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}, & \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H}, \\ \vec{\pi} &= \vec{D} \times \vec{B}, & T_{ij} &= D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}).\end{aligned}\quad (11.2)$$

Die Beziehungen zwischen D , H und E , B hängen von der Materie ab. Im linearen, isotropen Fall gilt mit den Materialkonstanten ε_r und μ_r die Beziehung

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}. \quad (11.3)$$

Ebene Monochromatische Wellen. Wie bereits zuvor gesehen, ergeben sich die Maxwell-Gleichungen in Materie formuliert mittels E und B durch Ersetzen von

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0. \quad (11.4)$$

Insbesondere erhalten wir für die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* u von Wellen im Medium

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{n}, \quad n := \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}. \quad (11.5)$$

Die numerische Grösse n wird *Brechungsindex* genannt.

Wählt man für eine freie ebene monochromatische Welle den Ansatz

$$\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t}], \quad \vec{B} = \text{Re}[\vec{B}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t}], \quad (11.6)$$

so gelten folgende Relationen

$$\begin{aligned} \|k\| &= \frac{\omega}{u} = \frac{\omega n}{c}, \\ \vec{k}\cdot\vec{E}_0 &= \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = \vec{E}_0\cdot\vec{B}_0 = 0, \\ \vec{B}_0 &= \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Für die gemittelte Energie(strom)dichte ergibt sich dann

$$\begin{aligned} w &= \frac{\|E_0\|^2}{2\mu u^2} = \frac{n^2}{2\mu_0 c^2} \|E_0\|^2, \\ \vec{S} &= \frac{1}{\mu u} \frac{\vec{k}}{\|k\|} \|E_0\|^2 = \frac{c}{n} \frac{\vec{k}}{\|k\|} w. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Dispersion. Schauen wir uns noch einmal die Beziehung zwischen $D = \varepsilon_0 E + P$ und E an (bzw. analog H und B). Wir hatten die Polarisation P als Antwort der Materie auf ein angelegtes Feld E eingeführt. Aufgrund der Kausalität kann das Feld P nicht instantan auf das Feld E reagieren, sondern nur mit einer gewissen Retardierung. Für die Elektrostatik war dieser Effekt irrelevant, da wir an dem statischen Endzustand interessiert waren. Ändert sich das Feld E hingegen schnell, so kann man davon ausgehen, dass P erst nach einiger Zeit den statischen Grenzwert annimmt. Die Relation $D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$ kann also in der Elektrodynamik nicht exakt gelten. Für hinreichend schwache Felder sollte allerdings ein linearer Zusammenhang bestehen und aufgrund der Translationsinvarianz in der Zeit bietet sich die Fourier-Darstellung an. Man erhält so frequenzabhängige Dielektrizitätskonstanten ¹

$$D(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E(\omega). \quad (11.9)$$

Die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante führt zu einer Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit und damit der Relation zwischen Wellenzahl und Frequenz

$$\|k\| = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \omega(\|k\|). \quad (11.10)$$

Die Dispersionsrelation $\omega = \omega(\|k\|)$ ist somit nicht exakt linear. Man erhält eine Phasengeschwindigkeit $\omega(\|k\|)/\|k\|$ und eine Gruppengeschwindigkeit $d\omega/d\|k\|$. Letztere ist durch c nach oben beschränkt.

¹In der zeitlichen Darstellung entspricht dies einem Faltungsintegral $D(t) = \int dt' \varepsilon_0 \varepsilon_r(t-t') E(t')$, was in der Tat eine zeitlich um $t-t'$ verzögerte Reaktion auf das Feld $E(t')$ beschreibt.

11.2 Reflexion und Brechung

- Ein- und auslaufende Wellen
- TE- und TM-Moden
- Strahlungsbilanz
- Brewster Winkel
- Totalreflexion
- Nolting 4.3.10; Jackson 7.5,6

Insbesondere ist das Verhalten elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen zwischen zwei verschiedenen Medien interessant.

Stetigkeitsbedingungen. Aus den Maxwell-Gleichungen lassen sich gewisse Bedingungen folgern mittels derer die Felder vor und hinter einer Grenzfläche in Beziehung stellen. Die Bedingungen sind bereits aus der Statik bekannt, die zusätzlichen Zeitableitungen in den Maxwell-Gleichungen haben keine Auswirkungen (da sie keinen Beitrag zu den Gaußschen Kästchen und Stokesschen Schleifen liefern). Es gilt:

$$\vec{E}_{\parallel}, \vec{H}_{\parallel}, D_{\perp}, B_{\perp} \text{ stetig.} \quad (11.11)$$

Alternativ lassen sie sich ausdrücken als

$$\vec{n} \times \Delta \vec{E} = \vec{n} \times \Delta \vec{H} = 0, \quad \vec{n} \cdot \Delta \vec{D} = \vec{n} \cdot \Delta \vec{B} = 0. \quad (11.12)$$

Dies entspricht je drei Gleichungen für E , D und für B , H , somit sind alle Komponenten je eines der Felder hierdurch bestimmt.

Einlaufende und Auslaufende Wellen. Wir betrachten eine Welle, die auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien trifft. Aufgrund von Linearität und Translationsinvarianz entlang der Grenzfläche und in der Zeit können wir das Problem auf monochromatische ebene Wellen reduzieren (und deren Linearkombinationen). Die Translationsinvarianz besagt, dass die auslaufenden Wellen dieselbe Frequenz ω und dieselben Parallelkomponenten \vec{k}_{\parallel} des Wellenvektors haben wie die vorgegebene einlaufende Welle

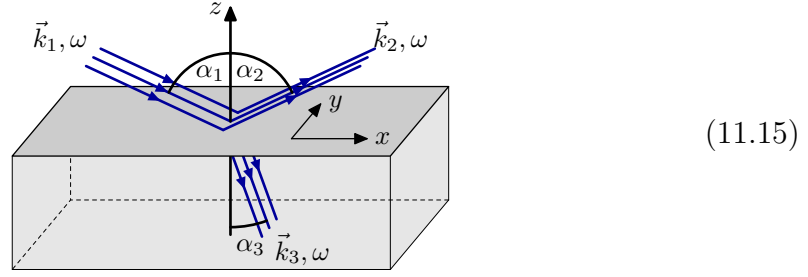
$$\omega' = \omega, \quad \vec{k}'_{\parallel} = \vec{k}_{\parallel}. \quad (11.13)$$

Alle Felder schwingen also mit demselben Faktor

$$\sim \exp(i\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{x}_{\parallel} - i\omega t). \quad (11.14)$$

Für die Normalkomponenten k_{\perp} der Wellen $\sim \exp(ik_{\perp}x_{\perp})$ gilt dies nicht, denn es gibt keine Translationsinvarianz in dieser Richtung. Allerdings wird die Normalkomponente k_{\perp} von k durch die Dispersionsrelation bestimmt.

Definieren wir das Problem etwas konkreter.



(11.15)

Die Grenzfläche sei die x,y -Ebene. Die Wellen breiten sich in der x,z -Ebene aus. Diese Ausgangslage lässt sich durch Rotation des Raumes erreichen. Wir haben also

$$\vec{k}_1 = k_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ 0 \\ -\cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_2 = k_2 \begin{pmatrix} \sin \alpha_2 \\ 0 \\ \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{k}_3 = k_3 \begin{pmatrix} \sin \alpha_3 \\ 0 \\ -\cos \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (11.16)$$

Die Gleichheit der x -Komponenten der Wellenvektoren bedingt die Relation

$$k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2 = k_3 \sin \alpha_3. \quad (11.17)$$

Die Dispersionsrelationen implizieren

$$k_1 = \frac{\omega n_1}{c}, \quad k_2 = \frac{\omega n_1}{c}, \quad k_3 = \frac{\omega n_3}{c}. \quad (11.18)$$

Zusammen erhält man

$$k_1 = k_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \frac{k_3}{k_1} = \frac{n_3}{n_1}, \quad \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n_3}. \quad (11.19)$$

Die in dasselbe Medium zurück reflektierte Welle hat denselben Winkel zur Normalen der Grenzfläche. Die in das andere Medium transmittierte d.h. refraktierte (gebrochene) Welle hat einen Winkel, der durch das *Snelliussche Gesetz* bestimmt ist

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_1}. \quad (11.20)$$

All dies ergibt sich aus der Universalität von ω , k_x und k_y (Translation) und den Dispersionsrelationen, welche die möglichen Werte von k_z (im jeweiligen Medium) bestimmen. Da es sich um eine quadratische Gleichung handelt, gibt es jeweils zwei Lösungen, die den ein- und auslaufenden Wellen entsprechen.

Elektromagnetische Felder. Die oben beschriebene Konfiguration von Feldern hat folgende Form (analog für B)

$$\begin{aligned} \vec{E}_{z>0} &= \text{Re}[(\vec{E}_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + \vec{E}_2 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}}) e^{-i\omega t}], \\ \vec{E}_{z<0} &= \text{Re}[\vec{E}_3 e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{x}} e^{-i\omega t}], \end{aligned} \quad (11.21)$$

Hier sind die x, y, t -Abhängigkeiten aller Felder identisch (aufgrund der Translationsinvarianz mischen die Gleichungen nicht). Wir möchten E_1 vorgeben. Die Maxwell-Gleichungen und die Stetigkeitsbedingungen bestimmen dann alle anderen Koeffizienten E_2, E_3, B_1, B_2, B_3 eindeutig. Zur Vereinfachung des Problems nehmen wir an, dass μ_r für beide Medien gleich ist ($\mu_r \approx 1$ für optische Medien bei optischen Frequenzen ω). Weiterhin sei $n = n_3/n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r,3}/\varepsilon_{r,1}}$ der relative Brechungsindex, der die einzig relevante Kombination in unserem Problem darstellt.

Die Maxwell-Gleichungen setzen E und B in Beziehung

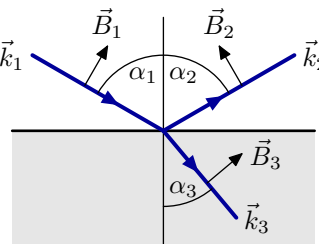
$$\vec{B}_j = \frac{1}{\omega} \vec{k}_j \times \vec{E}_j, \quad \|\vec{B}_j\| = \frac{k_j}{\omega} \|E_j\| = \frac{n_j}{c} \|E_j\|. \quad (11.22)$$

Die Stetigkeitsbedingungen besagen

$$\begin{aligned} \vec{e}_z \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 - \vec{E}_3) &= 0, \\ \vec{e}_z \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 - n^2 \vec{E}_3) &= 0, \\ \vec{B}_1 + \vec{B}_2 &= \vec{B}_3. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Es bietet sich an, diese Gleichungen nicht allgemein zu lösen, sondern getrennt für die zwei Polarisationsmoden der elektromagnetischen Wellen. Hierfür nimmt man Wellen, für die entweder das elektrische oder das magnetische Feld entlang der y -Achse ausgerichtet ist.

Transversal Elektrische Mode. Hier werden die elektrischen Felder durch ihre y -Komponenten beschrieben, $\vec{E}_n = \vec{e}_y E_n$, sie sind parallel zur Grenzfläche, es gilt

$$E_1 + E_2 = E_3. \quad (11.24)$$


Für die magnetischen Felder betrachten wir x - und z -Komponenten sowie $\|B_n\| = (n_n/c)|E_n|$

$$\frac{n_1}{c} E_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ 0 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \frac{n_1}{c} E_2 \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 \\ 0 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} = \frac{n_3}{c} E_3 \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ 0 \\ \sin \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (11.25)$$

Die z -Komponente dieser Gleichung ist äquivalent zum Snelliusschen Gesetz. Die x -Komponente zusammen mit der Gleichung für das elektrische Feld ergibt

$$E_2 = \frac{\cos \alpha_1 - n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} E_1, \quad E_3 = \frac{2 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} E_1. \quad (11.26)$$

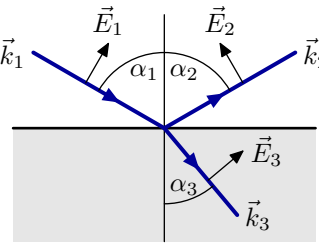
Dies bestimmt also die reflektierten und transmittierten Wellen eindeutig.

In Bezug auf die Energiebilanz ist wichtig, dass alle Energie, die in die Grenzfläche fließt, in dem anderen Medium wieder erscheint.² Betrachten wir die *Reflexions-* und *Transmissionskoeffizienten*

$$\begin{aligned} R &= -\frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{e}_z}{\vec{S}_1 \cdot \vec{e}_z} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\|E_2\|^2}{\|E_1\|^2} = \left(\frac{\cos \alpha_1 - n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} \right)^2, \\ T &= \frac{\vec{S}_3 \cdot \vec{e}_z}{\vec{S}_1 \cdot \vec{e}_z} = \frac{\cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1} \frac{w_3}{w_1} = \frac{n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1} \frac{\|E_3\|^2}{\|E_1\|^2} \\ &= \frac{4n \cos \alpha_1 \cos \alpha_3}{(\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3)^2}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Die Koeffizienten $0 \leq R, T \leq 1$ bestimmen den Anteil der reflektierten bzw. transmittierten Intensität. Es gilt dann offensichtlich die Erhaltung des Energieflusses durch die Grenzfläche: $R + T = 1$.

Transversal Magnetische Mode. Hier impliziert die Stetigkeit der magnetischen Felder $\vec{B}_n = \vec{e}_y B_n$ direkt

$$B_1 + B_2 = B_3. \quad (11.28)$$


Für die elektrischen Felder betrachten wir x - und z -Komponenten sowie $\|E_n\| = (c/n_n)|B_n|$

$$\begin{aligned} &\frac{c}{n_1} B_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ 0 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \frac{c}{n_1} B_2 \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 \\ 0 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{c}{n_3} B_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ 0 \\ \sin \alpha_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Die z -Komponente ist wieder im Einklang mit dem Snelliusschen Gesetz. Die x -Komponente ergibt zusammen mit dem magnetischen Feld

$$B_2 = \frac{n \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} B_1, \quad B_3 = \frac{2n \cos \alpha_1}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} B_1. \quad (11.30)$$

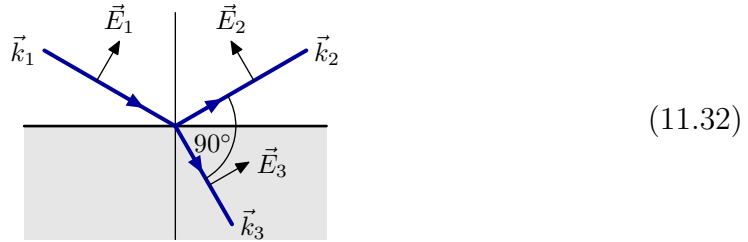
Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten haben die Form

$$\begin{aligned} R &= \frac{\|B_2\|^2}{\|B_1\|^2} = \left(\frac{n \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} \right)^2, \\ T &= \frac{\cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1} \frac{\|B_3\|^2}{\|B_1\|^2} = \frac{4n \cos \alpha_1 \cos \alpha_3}{(n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3)^2}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

²Von der Energieflussdichte \vec{S} ist nur die Normalkomponente $\vec{S} \cdot \vec{e}_z$ relevant. Der tangentielle Fluss auf beiden Seiten der Grenzfläche steht nicht unmittelbar miteinander in Beziehung.

Es gilt wieder $R + T = 1$, allerdings mit unterschiedlichen R und T . Die Intensität der Reflexion und Transmission ist somit polarisationsabhängig.

Brewster-Winkel. Eine Kuriosität ist der Einfallswinkel $\alpha_1 = \alpha_B$ mit $\tan \alpha_B = n$. Hier steht die reflektierte Welle senkrecht zur transmittierten Welle: $\alpha_1 + \alpha_3 = \frac{1}{2}\pi$. Dann ist für TM $R = 0$ und es gibt keine reflektierte TM-Mode. Da die reflektierte TE i.d.R. existiert, ist das reflektierte Licht bei dem *Brewster-Winkel* vollständig linear polarisiert. Dies liegt daran, dass die reflektierte Welle von der Polarisation $\vec{P} \sim \vec{E}_3$ im Medium erzeugt wird. Die erzeugte Welle ist proportional zu der Projektion $\vec{P} \cdot \vec{E}_2$, aber aufgrund der Geometrie gilt hier $\vec{P} \perp \vec{E}_2$ für die TM-Mode.



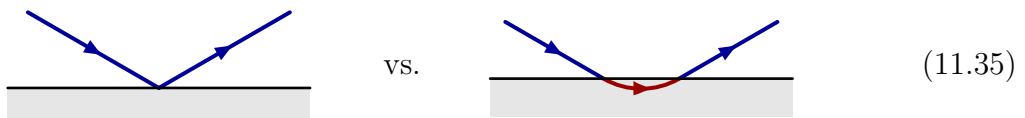
Totalreflexion. Ein anderes interessantes Phänomen ist die *Totalreflexion*. Für den Übergang von einem optisch dichten zu einem optisch dünnen Medium, $n < 1$, und bei einem Winkel α_1 mit $\sin \alpha_1 > n$ hat das Snelliussche Gesetz $\sin \alpha_3 = (\sin \alpha_1)/n$ keine (reelle) Lösung. Allerdings können wir formal mit der komplexen Lösung für α_3 weiterrechnen. Für $\sin \alpha_3 > 1$ gilt, dass $\cos \alpha_3 \in i\mathbb{R}$ rein imaginär ist, da $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha < 0$. Der Wellenvektor für die transmittierte Welle hat also die Form

$$\vec{k}_3 = k_3 \begin{pmatrix} \sin \alpha_3 \\ 0 \\ -\cos \alpha_3 \end{pmatrix} = nk_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha_3 \\ 0 \\ -i\sqrt{\sin^2 \alpha_3 - 1} \end{pmatrix}. \quad (11.33)$$

Das bedeutet, dass die z -Komponente (negativ) imaginär ist und die Intensität der transmittierten Welle exponentiell von der Grenzfläche abnimmt, wobei $1/|k_{3,z}|$ die *Eindringtiefe* beschreibt. Im Wesentlichen wird damit also keine Energie durch die Grenzfläche transportiert. Betrachten wir hingegen die reflektierte Welle:

$$\begin{aligned} E_2^{\text{TE}} &= \frac{\cos \alpha_1 - n \cos \alpha_3}{\cos \alpha_1 + n \cos \alpha_3} E_1, \\ E_2^{\text{TM}} &= \frac{n \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3}{n \cos \alpha_1 + \cos \alpha_3} E_1. \end{aligned} \quad (11.34)$$

Da Zähler und Nenner jeweils komplex konjugiert sind, hat die reflektierte Welle jeweils die gleiche Amplitude. Damit ist auch $R = 1$. Es gibt lediglich eine *Phasendifferenz* (abhängig von der Mode). Diese kann man verstehen als das temporäre Eindringen der Welle in den verbotenen Bereich im optisch dünneren Medium.



12 Wellenleiter

Wir haben gesehen, wie sich elektromagnetische Wellen im Vakuum ausbreiten und Energie transportieren können. Nun ist es günstig, diesen Energietransport so gut wie möglich kontrollieren zu können. Dies geschieht mittels elektrischer Leiter, die das Feld umschliessen (Hohlleiter) oder sonst wie führen. Wir wollen zunächst die Wellenausbreitung in elektrischen Leitern untersuchen, und dann Hohlleiter und Kavitäten behandeln.

12.1 Wellen in Leitern

- Telegraphengleichung
- Eindringtiefe
 - Nolting 4.3.9; Jackson 7.7,8

In einem elektrischen Leiter wird ein elektrischer Strom j durch ein angelegtes elektrisches Feld E erzeugt über

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (12.1)$$

wobei σ den spezifischen Widerstand bezeichnet. Ansonsten gelten die Maxwell-Gleichungen. Zunächst sollten wir eine allfällige Ladungsdichte ρ im Leiter betrachten. Ihre zeitliche Ableitung ist durch folgende Gleichungen bestimmt

$$\partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho. \quad (12.2)$$

Danach klingt jede bestehende Ladungsverteilung in der charakteristischen Zeit ε_0/σ ab, indem sie zu den Rändern des Leiters diffundiert. Wir können also davon ausgehen, dass (nach kurzer Zeit) jede Ladungsverteilung verschwindet, und setzen entsprechend $\rho = 0$.

Kombinieren wir nun die zeitliche Ableitung der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{B} - c^{-2} \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$ mit der Rotation der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_0 \sigma \partial_t \vec{E} &= \mu_0 \partial_t \vec{j} = \vec{\nabla} \times \partial_t \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \\ &= -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \\ &= \Delta \vec{E} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Nutzen wir nun die Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 = 0$ so erhalten wir die *Telegraphen-Gleichung*

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma \partial_t \vec{E} = 0. \quad (12.4)$$

Dies ist eine entkoppelte lineare Differentialgleichung, die wir mittels komplexer monochromatischer ebener Wellen lösen können:

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi - \mu_0 \sigma \partial_t \Psi = 0, \quad \Psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}. \quad (12.5)$$

Dies ergibt die algebraische Gleichung $-\vec{k}^2 + \omega^2/c^2 + i\omega\mu_0\sigma = 0$. Da die Koeffizienten komplex sind, muss der Wellenvektor k oder die Kreisfrequenz ω ebenfalls komplex sein, ggf. beide. Untersuchen wir also beide Fälle.

Zeitlich Abklingende Welle. Sei k reell und ω komplex. Dann erhalten wir unmittelbar

$$\omega = -\frac{i}{2}\mu_0\sigma c^2 \pm \sqrt{\vec{k}^2 c^2 - \frac{1}{4}\mu_0^2\sigma^2 c^4} = \omega_r + i\omega_i. \quad (12.6)$$

Der Imaginärteil von ω ist in jedem Fall negativ, $\omega_i < 0$, somit klingt die Welle $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_r t} e^{\omega_i t}$ exponentiell ab. Die Energie der Welle wird durch elektrischen Widerstand in Wärme umgewandelt.

Räumlich Abklingende Welle. Wir können aber auch verlangen, dass ω reell ist und damit die Welle immer die gleiche Amplitude beibehält. Dann muss allerdings k komplex sein. Entsprechend wird die Welle in einer räumlichen Richtung exponentiell abfallen. In der entgegengesetzten Richtung wird sie allerdings exponentiell anwachsen. Ein beliebig stark anwachsendes Feld ist unrealistisch, dies lässt sich nur verhindern, indem man annimmt, dass dort der Leiter irgendwo endet. Dieser Fall beschreibt also ein exponentielles Abklingen der Welle vom Rand des Leiters her.

Konkret kann man annehmen, dass die Welle entlang der z -Achse ausgerichtet ist mit $\vec{k} = (k_r + ik_i)\vec{e}_z$. Die Gleichung ergibt dann

$$-k_r^2 - 2ik_r k_i + k_i^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \sigma i\omega = 0. \quad (12.7)$$

Man kann nun den Imaginärteil lösen als $k_i = \mu_0 \sigma \omega / 2k_r$ und die Lösung einsetzen

$$-k_r^2 + \frac{\mu_0^2 \sigma^2 \omega^2}{4k_r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (12.8)$$

Dies ist eine bi-quadratische Gleichung für k_r mit der Lösung

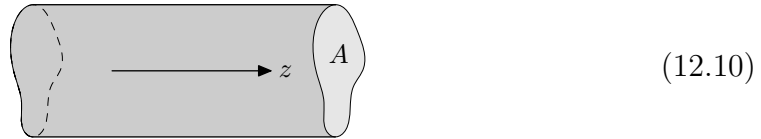
$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{2c^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4c^4} + \frac{1}{4}\mu_0^2\sigma^2\omega^2}. \quad (12.9)$$

Die Grösse $1/k_i$ beschreibt die *Eindringtiefe* des Feldes in den elektrischen Leiter. Wellen können nur in die Umgebung des Randes eines Leiters vordringen. Desgleichen fließen Wechselströme vor allem an der Oberfläche eines Leiters. Dies wird Skin-Effekt genannt.

12.2 Wellenleiter

- Reduktion auf zwei Dimensionen
- Randbedingung
- Eigenwertproblem
- TE- und TM-Moden
- TEM-Moden
- Rechteckiger und kreisförmiger Querschnitt
- Energie und Fluss
- Jackson 8.1–5

Wir behandeln nun einen zylinderförmigen *Hohlleiter*.



Er sei entlang der z -Achse ausgerichtet und durch ein Gebiet A in der x,y -Ebene beschrieben.¹ Der Rand des Gebiets sei ein idealer Leiter.

Reduktion auf Zwei Dimensionen. Das Problem ist translationsinvariant in der Zeit und der z -Achse. Hier wollen wir ebene monochromatische Wellen ansetzen mit Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k . Demnach gilt für alle Felder F

$$F(x, y, z, t) = \text{Re}[F(x, y) e^{ikz} e^{-i\omega t}], \quad \partial_t F = -i\omega F. \quad (12.11)$$

Wir reduzieren das Problem also auf zweidimensionale komplexe Felder $F(x, y) \in \mathbb{C}$. Weiterhin zerfallen die dreidimensionalen Vektoren \vec{F}_3 in entsprechende Vektoren \vec{F} in zwei Dimensionen mit $\vec{F} \cdot \vec{e}_z = 0$ und Skalare f . Wir schreiben

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= \vec{F} + \vec{e}_z f, \\ \vec{x}_3 &= \vec{x} + \vec{e}_z z. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Die entsprechende Vektoralgebra lautet

$$\vec{F}_3 \cdot \vec{G}_3 = \vec{F} \cdot \vec{G} + fg, \quad \vec{\nabla}_3 \cdot \vec{F}_3 = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + ikf. \quad (12.13)$$

Für das Kreuzprodukt benötigen wir eine *Dualitätsoperation* für Vektoren in zwei Dimensionen

$$\vec{F}^\times := \vec{F} \times \vec{e}_z = \begin{pmatrix} F_y \\ -F_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12.14)$$

Für die Dualitätsoperation gelten folgende Relationen

$$\begin{aligned} \vec{F}^\times \cdot \vec{e}_z &= \vec{F}^\times \cdot \vec{F} = 0, \\ \vec{F}^{\times \times} &= -\vec{F}, \\ \vec{F} \cdot \vec{G}^\times &= -\vec{F}^\times \cdot \vec{G} = F_x G_y - F_y G_x, \\ \vec{\nabla}_3 \times \vec{F}_3 &= -ik\vec{F}^\times + \vec{\nabla}^\times f + \vec{e}_z \vec{\nabla} \cdot \vec{F}^\times. \end{aligned} \quad (12.15)$$

¹Man kann durchaus auch offene Gebiete betrachten, z.B. beschreibt das Gebiet \mathbb{R}^2 mit zwei Löchern zwei parallele Drähte im freien Raum.

Damit lautet das Kreuzprodukt

$$\vec{F}_3 \times \vec{G}_3 = f \vec{G}^\times + g \vec{F}^\times + \vec{e}_z \vec{F} \cdot \vec{G}^\times. \quad (12.16)$$

Wir können nun die Maxwell-Gleichungen auf zwei Dimensionen reduzieren. Zunächst betrachten die Wellengleichung $\square_{3+1}\Psi = 0$, die für alle Felder $\Psi = \vec{E}, \vec{B}, e, b$ gilt,

$$0 = \square_{3+1}\Psi = \Delta_3\Psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\Psi = \Delta\Psi - k^2\Psi + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi. \quad (12.17)$$

Hier ist Δ der zweidimensionale Laplace-Operator, und die Gleichung lautet kurz

$$\Delta\Psi = -\lambda\Psi \quad \text{mit} \quad \lambda := \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (12.18)$$

In Abwesenheit von Quellen lauten die skalaren Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla}_3 \cdot \vec{E}_3 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + ike, \\ 0 &= \vec{\nabla}_3 \cdot \vec{B}_3 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + ikb. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Die vektoriellen Maxwell-Gleichungen spalten auf in vektorielle und skalare Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -ik\vec{E}^\times + \vec{\nabla}^\times e - i\omega\vec{B}, & 0 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^\times - i\omega b, \\ 0 &= -ik\vec{B}^\times + \vec{\nabla}^\times b + \frac{i\omega}{c^2}\vec{E}, & 0 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^\times + \frac{i\omega}{c^2}e. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Die longitudinalen Felder b, e sind also auf zwei Arten durch die transversalen Felder \vec{E}, \vec{B} bestimmt (für $k, \omega \neq 0$). Weiterhin legen die vektoriellen Gleichungen eines der Felder \vec{E}, \vec{B} durch das jeweils andere fest. Überzählige Gleichungen stellen die obigen Wellengleichungen $\Delta\Psi = -\lambda\Psi$. Wir können also das Problem (für $k, \omega \neq 0$) anhand des Feldes \vec{E} alleine formulieren

$$\begin{aligned} e &= \frac{i}{k} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \\ b &= -\frac{i}{\omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^\times, \\ \vec{B} &= -\frac{k}{\omega} \vec{E}^\times + \frac{1}{k\omega} \vec{\nabla}^\times (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}). \end{aligned} \quad (12.21)$$

Randbedingungen. Die Felder werden auf dem Rand ∂A durch Leiter begrenzt. Hier kann das Feld nicht eindringen (bis auf eine kleine Eindringtiefe aufgrund des Widerstands, welche wir vernachlässigen). Es gelten die üblichen Randbedingungen, dass \vec{E}_3 senkrecht zur Oberfläche steht, während \vec{B}_3 parallel ist. Es gilt also auf dem Rand mit Normalenvektor n (wobei $\vec{n} \cdot \vec{e}_z = 0$)

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{n} \times \vec{E}_3 = \vec{n}^\times e + \vec{e}_z \vec{n} \cdot \vec{E}^\times, \\ 0 &= \vec{n} \cdot \vec{B}_3 = \vec{n} \cdot \vec{B}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Daher gilt auf dem Rand ∂A ,

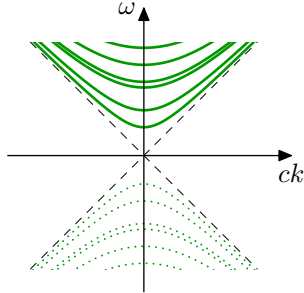
$$e = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}^\times = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0. \quad (12.23)$$

Wir wollen diese anhand des Feldes \vec{E} ausdrücken: Da $e = (i/k)\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ muss gelten $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Die Randbedingung $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ folgt dann automatisch aus den beiden Randbedingungen für \vec{E} durch Einsetzen der Lösung, $\vec{n} \cdot \vec{B} = -(k/\omega)\vec{n} \cdot \vec{E}^\times - (i/\omega)\vec{n} \cdot \vec{\nabla}^\times e$. Der erste Term verschwindet aufgrund der Randbedingung $\vec{n} \cdot \vec{E}^\times = 0$, der zweite ist eine Ableitung *entlang* des Randes ($\vec{n} \cdot \vec{\nabla}^\times$) und dort ist $e = 0$. Somit lauten die kompletten Bedingungen

$$\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E}, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}^\times|_{\partial A} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}|_{\partial A} = 0. \quad (12.24)$$

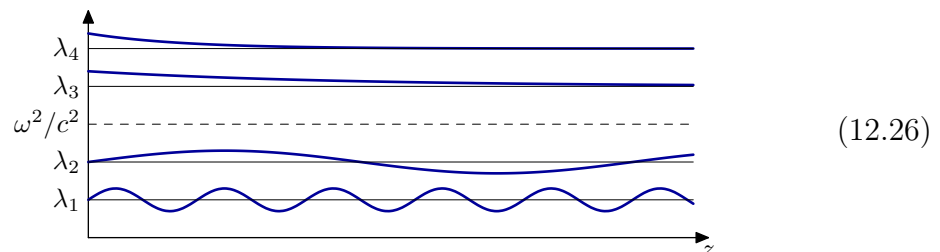
Dies entspricht im Wesentlichen einer Dirichlet-Randbedingung an $\vec{n} \cdot \vec{E}^\times$ und einer Neumann-Randbedingung an $\vec{n} \cdot \vec{E}$. Zusammen genügen sie, um die zwei Komponenten von \vec{E} eindeutig festzulegen.

Eigenwertproblem. Die obigen Differentialgleichungen mit Randbedingungen bestimmen in der Regel die Lösung eindeutig. Die offensichtliche Lösung für diese homogene Differentialgleichung ist $\vec{E} = 0$. Wir lernen also nichts aus der allgemeinen Lösung. Nur für gewisse Werte $\lambda = \lambda_n$ gibt es weitere Lösungen. Man kann dann eine Beziehung zwischen k und ω aufstellen:

$$\omega = c\sqrt{\lambda_n + k^2}, \quad \text{bzw.} \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda_n}. \quad (12.25)$$


Das Spektrum der reellen Eigenwerte λ_n hängt von der Geometrie des Querschnitts A ab, und es kann sehr irregulär sein (vgl. Schwingungsmoden einer Glocke). Wir werden etwas später sehen, dass $\lambda_n \geq 0$ und dass der Fall $\lambda_n = 0$ ausgezeichnet ist.

Speist man an einem Ende des Wellenleiters ein Feld mit gegebener reeller Frequenz ω ein, so werden im Prinzip alle Moden \vec{E}_n angeregt. Jede Mode besitzt dann eine charakteristische Wellenzahl $k_n = \sqrt{\omega^2/c^2 - \lambda_n}$. Ist $\omega/c > \sqrt{\lambda_n}$, so propagiert diese Mode eine beliebige Distanz als Welle, anderenfalls dringt sie nur die charakteristische Länge $1/|k_n| = 1/\sqrt{\lambda_n - \omega^2/c^2}$ entlang des Leiters vor. Das Spektrum der Eigenwerte λ_n ist durch den Querschnitt vorgegeben, und somit können für festes ω nur endlich viele Moden als Wellen in dem Wellenleiter propagieren.



TE- und TM-Moden. Üblicherweise klassifiziert man die Moden als *transversal elektrisch (TE)* bzw. *transversal magnetisch (TM)*, welche keine longitudinalen (entlang der z -Achse) Felder dieses Typs besitzen:

$$\text{TE: } e = 0, \quad \text{TM: } b = 0. \quad (12.27)$$

Diese Einschränkungen sind konsistent, da man das Problem (für $\lambda \neq 0$) alternativ über die skalaren Felder e und b formulieren kann

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{ik}{\lambda} \vec{\nabla} e + \frac{i\omega}{\lambda} \vec{\nabla}^\times b, \\ \vec{B} &= -\frac{i\omega}{c^2 \lambda} \vec{\nabla}^\times e + \frac{ik}{\lambda} \vec{\nabla} b. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Die übrigen Gleichungen folgen aus $\Delta e = -\lambda e$ und $\Delta b = -\lambda b$ sowie den Randbedingungen $e = 0$ (Dirichlet) und $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} b = 0$ (Neumann)

$$\text{TE: } \vec{n} \cdot \vec{\nabla} b(y) = 0, \quad \text{TM: } e(y) = 0 \quad \text{für } y \in \partial A. \quad (12.29)$$

Die Probleme für e und b entkoppeln also vollständig und man kann unabhängig Lösungen mit $e = 0$ und $b = 0$ suchen.

TEM-Moden. Die obigen Betrachtungen gelten nicht für den Fall $\lambda = 0$ bzw. $k^2 = \omega^2/c^2$. Dort muss man die Laplace-Gleichung $\Delta \vec{E} = 0$ für E direkt lösen, deren Lösungen harmonische Funktionen genannt werden.

Um dieses Problem besser zu verstehen, benötigen wir eine Greensche Identität für das Vektorfeld

$$\begin{aligned} & \int_A dx^2 \left[|\vec{\nabla} \cdot \vec{E}|^2 + |\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^\times|^2 + \text{Re}(\vec{E} \cdot \Delta \vec{E}) \right] \\ &= \text{Re} \oint_{\partial A} dx \vec{n} \cdot [\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^*) + \vec{E}^\times(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{\times*})]. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Die rechte Seite ist Null aufgrund der Randbedingungen $\vec{n} \cdot \vec{E}^\times = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Setzt man weiterhin die Differentialgleichung $\Delta \vec{E} = -\lambda \vec{E}$ ein, ergibt sich

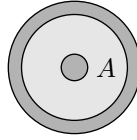
$$\int_A dx^2 \left[|\vec{\nabla} \cdot \vec{E}|^2 + |\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^\times|^2 - \lambda \|\vec{E}\|^2 \right] = 0. \quad (12.31)$$

Aus der Positivität der Terme folgt unmittelbar, dass es nur für $\lambda_n \geq 0$ nicht-triviale Lösungen geben kann. Falls $\lambda = 0$ ist die linke Seite positiv definit, und somit müssen die longitudinalen Felder e , b beide verschwinden:

$$\text{TEM: } e \sim \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad b \sim \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^\times = 0. \quad (12.32)$$

Diese sogenannten *transversal elektromagnetischen (TEM)* Moden sind somit ein Grenzfall, der nicht für alle Geometrien A existiert: Wenn das Gebiet A einfach zusammenhängend ist, so können wir ein Potential Φ für $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$ einführen mit $\Delta \Phi = 0$, so dass automatisch $e = b = 0$ folgt. Die Randbedingung $\vec{n} \cdot \vec{E}^\times = 0$ lässt

sich dann als Dirichlet-Bedingung $\Phi = \text{const}$ schreiben. Für dieses Problem wissen wir, dass die einzige Lösung $\Phi = \text{const}$ lautet, und somit $\vec{E} = 0$. Demnach können TEM-Moden nur existieren für offene Gebiete (z.B. einen Draht im freien Raum) oder nicht-einfach zusammenhängende Gebiete (d.h. Gebiete mit Löchern, z.B. Koaxialkabel).



$$(12.33)$$

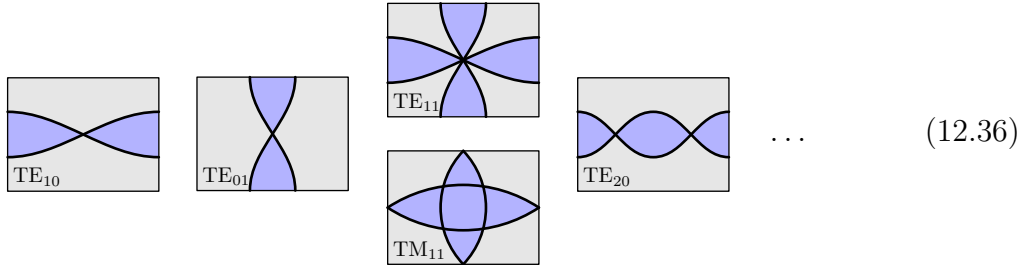
Rechteckiger Hohlleiter. Das einfachste Beispiel eines Wellenleiters ist der Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt $A = [0, d_x] \times [0, d_y]$. Dann sind die Moden offensichtlich gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{TE}_{n_x, n_y}: \quad b_{n_x, n_y} &\sim \cos \frac{\pi n_x x}{d_x} \cos \frac{\pi n_y y}{d_y} \quad (n_x > 0 \text{ oder } n_y > 0), \\ \text{TM}_{n_x, n_y}: \quad e_{n_x, n_y} &\sim \sin \frac{\pi n_x x}{d_x} \sin \frac{\pi n_y y}{d_y} \quad (n_x > 0 \text{ und } n_y > 0), \end{aligned} \quad (12.34)$$

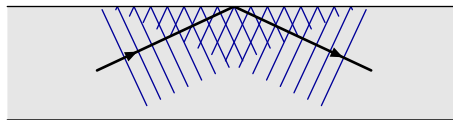
Die Eigenwerte zu diesen Moden betragen

$$\lambda_{n_x, n_y} = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{d_x^2} + \frac{n_y^2}{d_y^2} \right). \quad (12.35)$$

Es gibt keine TEM-Mode da A einfach zusammenhängend ist.



Alle diese Moden können auch verstanden werden als Überlagerung von ebenen monochromatischen Wellen mit Wellenvektoren $(\pm \pi n_x / d_x, \pm \pi n_y / d_y, k)$. Die Vorzeichen in den x, y -Komponenten entsprechen einer Welle und ihren Reflexionen an den vier seitlichen Wänden des Hohlraums. Die Interferenz am Ort der Wände muss dabei so sei, dass die Randbedingungen erfüllt sind (analog zu Spiegelladungen).



$$(12.37)$$

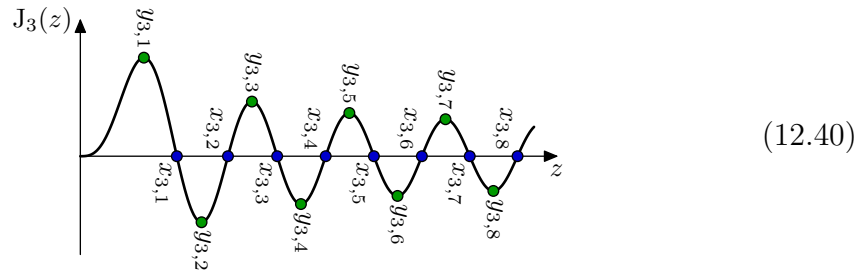
Kreisförmigen Hohlleiter. Ein weiteres beliebtes Beispiel ist der Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt. Die Rotationsinvarianz impliziert einen faktorisierten Ansatz in Radialkoordinaten

$$e, b \sim f(r) e^{im\varphi}. \quad (12.38)$$

Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} f \right) - \frac{m^2}{r^2} f + \lambda f = 0. \quad (12.39)$$

Die Lösungen heissen *Bessel-Funktionen* $f \sim J_m(\sqrt{\lambda} r)$. Die Randbedingungen bei $r = R$ verlangen, dass entweder f dort eine Nullstelle (TM) oder einen Wendepunkt (TE) besitzt. Die Nullstellen $x_{m,n}$ und Wendepunkte $y_{m,n}$ der Besselfunktionen J_m haben keine geschlossene Form, sie sind irrationale Zahlen die das Spektrum $\lambda_{m,n}^{\text{TE}} = y_{m,n}^2/R^2$ bzw. $\lambda_{m,n}^{\text{TM}} = x_{m,n}^2/R^2$ bestimmen.



13 Erzeugung Elektromagnetischer Wellen

Wir haben allgemeine Wellenlösungen sowie deren Energietransport betrachtet. Nun wollen wir einige formale Elemente zu allgemeinen Lösungen ohne und mit Quellen untersuchen und auf die Abstrahlung von dynamischen Ladungsverteilungen anwenden.

13.1 Anfangswertproblem

- Definition und Existenz von Lösungen der freien Maxwell-Gleichungen
- Lösung im Fourier-Raum
- Lösung im Ortsraum
 - Nolting 4.3.7;

In der Elektrostatik haben wir uns viel mit Randwertproblemen beschäftigt, wobei die Ränder meist Leiteroberflächen entsprechen. Für dynamische Probleme verwendet man stattdessen oft *Anfangswertprobleme*, bei denen man die Werte der Felder zu einer festen Zeit vorgibt, und die zeitliche Entwicklung auf einem nicht-kompakten Gebiet des Raumes und der Zeit untersucht. Kompakte Gebiete der Zeit, wie man sie für Randwertprobleme benötigt, ergeben sich meist nicht aus physikalischen Fragestellungen.

Definition und Existenz von Lösungen. Wir nehmen zunächst einen quellfreien Raum an, $\rho = j = 0$, und geben die Felder E und B zur Zeit $t = 0$ vor. Dies muss im Einklang mit den beiden räumlichen Maxwell-Gleichungen geschehen, die als *Zwangsbedingungen* für unser Anfangswertproblem fungieren

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (13.1)$$

Die anderen beiden Maxwell-Gleichungen bestimmen die *Zeitentwicklung*

$$\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad \partial_t \vec{E} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (13.2)$$

Sie genügen, um die Felder zu einem infinitesimal späteren Zeitpunkt zu bestimmen. Letztere kann man als neue Daten für unser Anfangswertproblem betrachten und wiederum die Zeit um einen infinitesimalen Betrag voranschreiten lassen. So ist die gesamte Zeitentwicklung eindeutig bestimmt, sowohl in der Zukunft als auch in der Vergangenheit.

Einige Anmerkungen dazu:

- Die neuen Felder erfüllen wieder die Zwangsbedingungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, denn es gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} = c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0, \quad (13.3)$$

und äquivalent für B . Es genügt also, die Zwangsbedingungen auf die Anfangswerte anzuwenden.

- Die Erhaltung der Feldenergie

$$W = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \vec{B}^2 \right] \quad (13.4)$$

hilft zu zeigen, dass die Zeitentwicklung der Differentialgleichungen gutartig ist. Für eine endliche, räumlich beschränkte Feldkonfiguration ist sie endlich und positiv. Diese Einschränkungen führen dazu, dass keine beliebig schnellen und starken Oszillationen auftreten können, da letztere unendliche Energie erfordern würden.

- Die Eindeutigkeit der Lösung folgt ebenfalls aus Energieerhaltung zusammen mit Linearität: Die Differenz ΔE , ΔB zweier Lösungen erfüllt die freien Maxwell-Gleichungen. Aus Gleichheit der Anfangsbedingungen, $\Delta E = \Delta B = 0$ bei $t = 0$, folgt $\Delta E = \Delta B = 0$ bei beliebiger Zeit t mittels positiv definiter Energie.

Fourier-Raum. Wir können das Anfangswertproblem mit der allgemeinen Lösung der Wellengleichung $\square E = \square B = 0$ im Fourier-Raum vergleichen ($\omega = \omega(k) = c\|k\|$):

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} [\vec{\alpha}(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + \vec{\alpha}(k)^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t}], \\ \vec{B}(x, t) &= \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} [\vec{\beta}(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + \vec{\beta}(k)^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t}]. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Diese setzt man in die Maxwell-Gleichungen ein und erhält die algebraischen Gleichungen

$$\vec{k} \cdot \vec{\alpha} = \vec{k} \cdot \vec{\beta} = 0, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{\alpha}, \quad \vec{\alpha} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{\beta}. \quad (13.6)$$

Setzt man weiterhin die Anfangswerte in der Fourier-Darstellung ein

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, 0) &= \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \vec{E}_0(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ \vec{B}(x, 0) &= \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \vec{B}_0(k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \end{aligned} \quad (13.7)$$

und vergleicht mit obigen Ausdrücken bei $t = 0$, so erhält man die Beziehungen

$$\vec{\alpha}(k) + \vec{\alpha}(-k)^* = \vec{E}_0(k), \quad \vec{\beta}(k) + \vec{\beta}(-k)^* = \vec{B}_0(k). \quad (13.8)$$

Weiterhin gilt mittels der algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(k) - \vec{\alpha}(-k)^* &= -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{\beta}(k) - \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{\beta}(-k)^* \\ &= -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0(k).\end{aligned}\quad (13.9)$$

Zusammen kann man diese Beziehungen nach α und schliesslich β auflösen

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(k) &= \frac{1}{2} \vec{E}_0(k) - \frac{c^2}{2\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0(k), \\ \vec{\beta}(k) &= \frac{1}{2} \vec{B}_0(k) + \frac{1}{2\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0(k).\end{aligned}\quad (13.10)$$

Ebenso kann man ein Anfangswertproblem für die elektromagnetischen Potentiale definieren. Allerdings leidet hier die Eindeutigkeit unter der Existenz von Eichtransformationen. Weiterhin benötigt man i.d.R. die Felder und ihre Zeitableitung als Anfangswerte (zuvor E und $B \sim \partial_t E$).

Ortsraum. Die Fourier-Transformation trivialisiert das Problem im freien Raum zu einfachen algebraischen Gleichungen. Man kann die Lösung aber auch gut im Ortsraum formulieren. Betrachten wir der Einfachheit halber ein skalares Feld Ψ mit $\square\Psi = 0$ und den Anfangswerten $\Psi(x, 0) = \Psi_0(x)$ und $\partial_t\Psi(x, 0) = \dot{\Psi}_0(x)$. Dieses Problem lässt sich wie oben auf die elektromagnetischen Felder oder Potentiale verallgemeinern. Man beginnt mit dem Ansatz (analog zum Randwertproblem ohne Quellen)

$$\Psi(x, t) = \int dy^3 [\partial_t D(x - y, t) \Psi_0(y) + D(x - y, t) \dot{\Psi}_0(y)]. \quad (13.11)$$

Der Vergleich mit der allgemeinen Lösung im Fourier-Raum (analog zu obiger Lösung) mit $\omega = \omega(k) = c\|k\|$.

$$\Psi(x, t) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \left[\Psi_0(k) \cos(\omega t) + \dot{\Psi}_0(k) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (13.12)$$

liefert eine Darstellung für D im Fourier-Raum

$$D(x, t) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (13.13)$$

Per Konstruktion hat diese Funktion die Eigenschaften

$$\square D = 0, \quad D(x, 0) = 0, \quad \partial_t D(x, 0) = \delta^3(x), \quad (13.14)$$

so dass $\Psi(x, t)$ tatsächlich die gewünschte Lösung ist. Wir wollen nun noch die Darstellung der Funktion D im Ortsraum ermitteln. Dazu benutzen wir, dass D rotationssymmetrisch ist und verwenden Polarkoordinaten für k mit

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = kr \cos \vartheta \quad \int dk^3 \dots = 2\pi \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \dots, \quad (13.15)$$

so dass¹

$$\begin{aligned}
D(x, t) &= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{ikr \cos \vartheta} \frac{k^2}{\omega} \sin(\omega t) \\
&= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} dz e^{ikr z} \frac{k}{2ic} [e^{ikct} - e^{-ikct}] \\
&= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{ikr} [e^{ikr} - e^{-ikr}] \frac{k}{2ic} [e^{ikct} - e^{-ikct}] \\
&= \frac{1}{2cr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} [e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)}] \\
&= \frac{1}{4\pi rc} [\delta(r-ct) - \delta(r+ct)] \\
&= \frac{1}{4\pi rc} \begin{cases} \delta(r-ct) & \text{für } t > 0 \\ -\delta(r+ct) & \text{für } t < 0. \end{cases} \tag{13.16}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erinnert an die kugelförmigen Wellen. Das ist nicht weiter verwunderlich, denn man erwartet, dass sich jede Störung gegeben durch die Anfangswerte kugelförmig um ihren Ursprung bei $t = 0$ ausbreitet. Eine besondere Eigenschaft ist, dass die Welle nicht zerläuft, d.h. bei fester Zeit t auf einer Kugelschale um ihren Ursprung beschränkt ist. Dies liegt daran, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit c unabhängig von allen äusseren Faktoren ist, insbesondere von der Wellenform und -amplitude.

Damit ist das Anfangswertproblem gelöst.

13.2 Greensche Funktionen

- Ansatz und Lösung der Gleichungen mit Quellen
- Greensche Funktion im Fourier-Raum
- Anwendung auf Elektrodynamik
- Nolting 4.5.1; Jackson 6.6

Als nächstes wollen wir die allgemeine Lösung *mit Quelltermen* beschreiben. Wir beginnen wieder mit einem skalaren Feld Ψ welches die Feldgleichung $\square\Psi = -\rho$ erfüllen soll.

Lösung mit Quellen. Analog zur Elektrostatik machen wir den Ansatz

$$\Psi(x, t) = \int dy^3 ds G(x - y, t - s) \rho(y, s) + \Psi^{\text{hom}}(x, t) \tag{13.17}$$

mit einer Greenschen Funktion welche $\square G = -\delta^3(x)\delta(t)$ erfüllt; hier ist Ψ^{hom} eine beliebige Lösung der homogenen Maxwellgleichungen. Die Greensche Funktion ist gegeben als einer der beiden Terme der obigen Funktion D :

$$G_{\text{ret}}(x, t) = \frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct). \tag{13.18}$$

¹Wir verwenden die Substitution $z = \cos \vartheta$ und drücken die Summe der Integranden $f(k) + f(-k)$ durch eine Erweiterung des Integrals auf negative Werte von k aus.

Von der definierenden Eigenschaft kann man sich für $x \neq 0$ mittels $\Delta = r^{-1}(\partial/\partial r)^2 r$ leicht überzeugen

$$\Delta G_{\text{ret}} = \frac{c\delta''(r-ct)}{4\pi r} \quad \text{und} \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 G_{\text{ret}} = \frac{c\delta''(r-ct)}{4\pi r}. \quad (13.19)$$

Daher gilt $\square G_{\text{ret}} = 0$ für $r \neq 0$. Ansonsten muss man beachten, dass der singuläre Nenner eine Distribution erzeugt

$$\Delta \frac{1}{4\pi r} = -\delta^3(x). \quad (13.20)$$

Es gilt also

$$\square G_{\text{ret}} = -c\delta^3(x)\delta(r-ct) = -c\delta^3(x)\delta(ct) = -\delta^3(x)\delta(t). \quad (13.21)$$

Die Funktion G_{ret} wird *retardierte* Greensche Funktion genannt, denn sie ist nur für $t > 0$ von 0 verschieden (da $r \geq 0$). Dies ist physikalisch sinnvoll, weil so die Quelle ρ bei der Zeit s nur das Feld bei Zeiten $t > s$ beeinflussen kann. Sie respektiert also die Kausalität.²

Es existieren auch alternative Greensche Funktionen, die die Kausalität nicht respektieren. Man erhält sie durch Addition von homogenen Lösungen, z.B. liefert die Addition von $-c^{-2}D$ die *avancierte* Greensche Funktion

$$G_{\text{av}} = \frac{c}{4\pi r} \delta(r+ct), \quad (13.22)$$

welche einlaufende Kugelwellen beschreibt. Die Maxwell-Gleichungen sind zeitumkehrinvariant, demnach muss eine solche Lösung formal existieren. Die Kausalität ist allerdings verkehrt herum.

Kausalität, Greensche Funktionen und elektromagnetische Strahlung.

Es ist sehr lehrreich, den Zusammenhang zwischen Kausalität und den unterschiedlichen Greenschen Funktionen G_{ret} und G_{av} zu diskutieren. Dazu betrachten wir nochmal die Gleichung (13.17)

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int dy^3 ds G_{\text{ret}}(x-y, t-s) \rho(y, s) + \Psi_{\text{ein}}^{\text{hom}}(x, t) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dy^3 \frac{\rho(y, t-|x-y|/c)}{|x-y|} + \Psi_{\text{ein}}^{\text{hom}}(x, t) \end{aligned} \quad (13.23)$$

unter Verwendung der Identität $\delta(ct) = \frac{1}{c} \delta(t)$, sowie deren Analog mit G_{av} :

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int dy^3 ds G_{\text{av}}(x-y, t-s) \rho(y, s) + \Psi_{\text{aus}}^{\text{hom}}(x, t) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dy^3 \frac{\rho(y, t+|x-y|/c)}{|x-y|} + \Psi_{\text{aus}}^{\text{hom}}(x, t). \end{aligned} \quad (13.24)$$

²Es ist interessant zu sehen, wie das physikalische Konzept der Kausalität von der abstrakten Differentialgleichung getragen werden kann.

Hier sind $\Psi_{\text{ein,aus}}^{\text{hom}}$ Lösungen der freien Maxwellgleichungen, und beide Formen singulär gleichermassen gültig. Ihre Bedeutung erschliesst sich wie folgt:

Angenommen die Quelle sei nur für Zeiten $t \geq T$ eingeschaltet, dh $\rho(x, t) = 0$ für $t < T$. Dann ist $\Psi(x, t) = \Psi_{\text{ein}}^{\text{hom}}(x, t)$ für³ $t < T$. Analog ist $\Psi(x, t) = \Psi_{\text{aus}}^{\text{hom}}(x, t)$ für $t > T$, falls die Quelle nur für Zeiten $t \leq T$ eingeschaltet ist. Insbesondere ist das **Strahlungsfeld**

$$\Psi_{\text{rad}} := \Psi_{\text{aus}} - \Psi_{\text{ein}} = c^2 \int dy^3 ds D(x - y, t - s) \rho(y, s) \quad (13.25)$$

(cf. (13.16)) jene Lösung der *freien* Wellengleichung, welche angibt, wie sich das Feld durch eine nur im Zeitraum $T_a < t < T_b$ eingeschaltete Quelle ρ **ändert**.

Als Beispiel betrachten wir ein geladenes Teilchen, das sich für $t < T_a$ und $t > T_b$ unbeschleunigt bewegt mit $\Psi_{\text{ein}} = 0$, aber im Intervall $[T_a, T_b]$ zB durch Wechselwirkung mit einem anderen Objekt beschleunigt wird. Für einen Beobachter in einem gewissen Abstand entspricht das Feld des Teilchens vor und nach der Beschleunigung einem (ggf. geboosteten) Coulomb-Feld, welches wie $\sim r^{-2}$ mit dem Abstand abfällt. Dies ist *kein* Strahlungsfeld. Das langreichweitige Strahlungsfeld $\Psi_{\text{rad}} \sim r^{-1}$ (siehe z.B. Dipolstrahlung sect. 13.3.1) existiert nur in dem mit dem Beschleunigung-Weltlinie kausal zusammenhängenden Teil der Raumzeit, siehe Fig. 13.1.

Dort ist das erzeugte Feld gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_{\text{aus}} + \int dy^3 ds G_{\text{adv}}(x - y, t - s) \rho(y, s) \\ &= \Psi_{\text{rad}} + (\text{Coulomb-Feld}) \end{aligned} \quad (13.26)$$

da $\Psi_{\text{ein}} = 0$. Somit kann Ψ_{rad} als das durch einen Streuprozess im Zeitintervall $[T_a, T_b]$ erzeugte Strahlungsfeld interpretiert werden.

Fourier-Darstellung. Wir betrachten die Fourier-Darstellung der retardierten Greenschen Funktion. Offensichtlich muss gelten

$$G(x, t) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \hat{G}(k, \omega) \quad (13.27)$$

mit

$$\tilde{G} = \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2}, \quad (13.28)$$

denn $\square G \simeq -(k^2 - \omega^2/c^2)\tilde{G}$ und $\delta^3(x)\delta(t) \simeq 1$ im Fourier-Raum. Diese Darstellung ist zunächst dieselbe für die retardierte und avancierte Greensche Funktion G_{ret} und G_{av} . Sie unterscheiden sich aber durch das Verhalten an den Polen $\omega = \pm \|k\|c$. Bei der Fourier-Transformation muss man durch letztere

³genaugenommen gilt diese Beziehung dann, wenn der Vergangenheitskegel von (x, t) den Träger von $\rho(x, t)$ nicht schneidet.

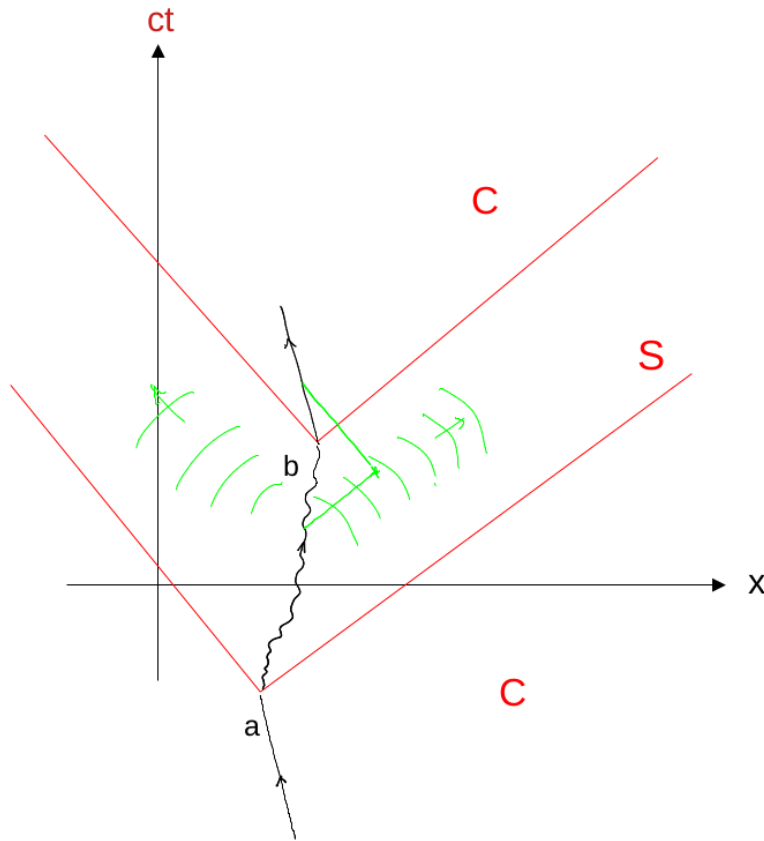
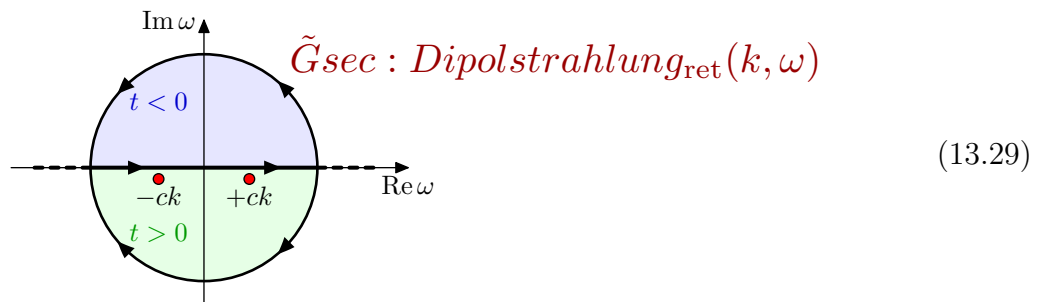


Abbildung 13.1: C: Coulomb-Feld. S: Strahlung (langreichweitig). Das geladene Teilchen ist vor a und nach b unbeschleunigt.

hindurch integrieren, womit das Integral nicht mehr wohldefiniert ist. Man legt deshalb die Pole in der komplexen ω -Ebene etwas unterhalb der reellen Achse.



Dies führt erstaunlicherweise direkt zum gewünschten kausalen Verhalten. Zum Auswerten der Fourier-Integrale schliesst man die Kontur mittels eines Halbkreises bei $|\omega| \rightarrow \infty$, um den *Residuensatz* verwenden zu können. Bei $t > 0$ muss dies in der unteren Halbebene geschehen, und bei $t < 0$ in der oberen. Da in letzterem Fall keine Pole existieren, ist das Fourier-Integral Null und die Kausalität gewährleistet, d.h. $G_{\text{ret}} = 0$ für $t < 0$. Analog hat die avancierte Greensche Funktion den Pol über der reellen Achse, welches direkt zu $G_{\text{av}} = 0$ für $t > 0$ führt.

Elektrodynamik. Schliesslich sollen wir noch das eigentliche elektromagnetische Problem behandeln. Hier bietet sich die Lösung für die Potentiale Φ, \vec{A} an. Eine Komplikation sind die Eichtransformationen, welche impliziert, dass es keine eindeutige Lösung geben kann. Wir können aber eine gewisse Eichung wählen, um das Problem zu konkretisieren. Es bietet sich die Lorenz-Eichung an, in der die Gleichungen lauten

$$\square\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \square\vec{A} = -\mu_0\vec{j}. \quad (13.30)$$

Somit lautet die Lösung

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int dy^3 ds G_{\text{ret}}(x - y, t - s) \rho(y, s), \\ \vec{A}(x, t) &= \mu_0 \int dy^3 ds G_{\text{ret}}(x - y, t - s) \vec{j}(y, s). \end{aligned} \quad (13.31)$$

Die Eichbedingung der Lorenz-Eichung folgt nach Übertragung der Ableitungen von x, t nach y, s und partieller Integration aus der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (13.32)$$

Durch Ausnutzung der delta-Funktion in G_{ret} können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \int dy^3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \|x - y\|} \rho(y, t - \|x - y\|/c), \\ \vec{A}(x, t) &= \int dy^3 \frac{\mu_0}{4\pi \|x - y\|} \vec{j}(y, t - \|x - y\|/c). \end{aligned} \quad (13.33)$$

Diese Felder heissen *retardierte Potentiale*, da die Zeit von Φ, A gegenüber ρ, j verschoben ist. In anderen Eichungen erhält man andere Ausdrücke. So hat in der Coulomb-Eichung ρ wie in der Elektrostatik keine Retardierung. Dieser akausale Effekt wird durch andere komplizierte Terme in A aufgehoben, so dass sich die Felder E und B kausal verhalten.

Relativistische Formulierung. Die Greensche Funktion lässt sich ebenfalls elegant mittels Vierer-Vektoren ausdrücken. Betrachten wir das analoge skalare Problem $\square\Psi = -\rho$ und den Ansatz

$$\Psi(x) = \int dy^4 G(x - y) \rho(y) + \Psi_{\text{hom}}(x) \quad (13.34)$$

mit G , so dass $\square G = -\delta^4(x) = -c^{-1}\delta^3(x)\delta(t)$.⁴ Die retardierte Lösung lautet dann

$$\begin{aligned} G_{\text{ret}}(x) &= \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \theta(x^0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \delta(\vec{x}^2 - c^2 t^2) \theta(t) \end{aligned}$$

⁴Im Vergleich zu der vorherigen Definition von G taucht hier ein zusätzlicher konventioneller Faktor c auf.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2r} \delta(r - ct) + \frac{1}{2r} \delta(r + ct) \right] \theta(t) \\
&= \frac{1}{4\pi r} \delta(r - ct).
\end{aligned} \tag{13.35}$$

Die Fourier-Transformierte lautet entsprechend

$$G(x) = \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \tilde{G}(k) \quad \text{mit} \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2}. \tag{13.36}$$

Die Verallgemeinerung auf das vektorielle Potential A bzw. das tensorielle Feld F ist analog zu früheren Ausdrücken.

13.3 Strahlung oszillierender Ströme

- Dipolstrahlung
- Monochromatische Wellen
- Grosser Abstand, Strahlungszone
- Multipolentwicklung, Dipolstrahlung
- Nahzone
- Nolting 4.5.2–4; Jackson 16.3,4

Wir wollen nun eine dynamische Ladungs- und Stromverteilung betrachten, die auf einen kleinen Raum $\|y\| < d$ konzentriert ist. Uns interessieren die Felder und der Energiefluss in einem Abstand $\|x\| = r \gg d$.



Eine Schwierigkeit in dieser Aufgabenstellung ist, dass es drei relevante Längen r , d und λ gibt. Die Form des Resultats hängt wesentlich von dem Verhältnis $r : d : \lambda$ ab.

13.3.1 Dipolstrahlung

Ausgangspunkt:

$$\begin{aligned}
A_\mu(x, t) &= \mu_0 \int d^3y ds G_{\text{ret}}(x - y, t - s) j_\mu(y, s) \\
&= \mu_0 \int d^3y \frac{1}{4\pi|x - y|} j_\mu(y, t - \frac{|x - y|}{c})
\end{aligned} \tag{13.38}$$

wobei $G_{\text{ret}}(x, t) = \frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct)$ mit $r = |x|$. Wir nehmen an, dass die Quelle $j_\mu(y)$ auf ein kleines Gebiet um $y = 0$ konzentriert ist, und suchen das erzeugte Feld in der Fernzone, also für

$$|x| =: r \gg |y|. \tag{13.39}$$

Dann ist die folgende Näherung sinnvoll:

$$|x - y| = r - \vec{n} \cdot \vec{y} + O(1/r) \quad (13.40)$$

aufgeschlüsselt in $A_\mu = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi\right)$ und $j_\mu = \left(\frac{-c\rho}{j}\right)$ erhalten wir für die Fernzone $r \rightarrow \infty$ die führenden Terme

$$\vec{A}(x, t) \sim \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3y \vec{j}(y, t - \frac{r}{c}) \stackrel{*}{=} \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \quad (13.41)$$

wobei \vec{p} das Dipolmoment der Ladungsverteilung ist, und

$$\phi(x, t) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3y \rho(y, t - \frac{r}{c}) \quad (13.42)$$

Begründung für *: wegen

$$0 = \int d^3y \vec{\nabla}(y_i \vec{j}) = \int d^3y (j_i + y_i \vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \quad (13.43)$$

erhalten wir zusammen mit der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$$\int d^3y \vec{j} = \int d^3y \vec{y} \dot{\rho} = \frac{d}{dt} \left(\int d^3y \vec{y} \rho \right) = \dot{\vec{p}} \quad (13.44)$$

Um daraus explizite Formeln für $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}}$ zu erhalten, müssen wir die Ableitungen nach x berechnen. Dazu beachten wir die folgenden Näherungen

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{x}}{r}, \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{x}}{r^3} = O(1/r^2) \quad (13.45)$$

deswegen ist $\nabla \frac{1}{r}$ für $r \rightarrow \infty$ vernachlässigbar im Vergleich mit den inneren Ableitungen von ρ bzw \vec{j} , und wir erhalten

$$\vec{\nabla} \rho(t - \frac{r}{c}) \sim -\frac{\vec{x}}{cr} \dot{\rho}(t - \frac{r}{c}) \quad (13.46)$$

und analog

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \sim -\frac{\vec{x}}{cr} \cdot \dot{\vec{A}}. \quad (13.47)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}} \\ &\sim \frac{\vec{x}}{cr} \dot{\phi} - \dot{\vec{A}} \\ &= -\frac{c\vec{x}}{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \dot{\vec{A}} \end{aligned} \quad (13.48)$$

unter Verwendung der Lorenz-Eichung $0 = \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Mit (13.47) erhalten wir

$$\vec{E}(x) \sim -\dot{\vec{A}} + \frac{\vec{x}}{r} \left(\frac{\vec{x}}{r} \cdot \dot{\vec{A}} \right) \quad (13.49)$$

und zusammen mit (13.41) erhalten wir

$$\boxed{\vec{E}(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\ddot{\vec{p}} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) \right)} \quad (13.50)$$

Beachte, dass $E \sim \frac{1}{r}$ viel lang-reichweitiger ist als das Coulomb-Feld einer statischen (oder unbeschleunigten) Punktladung. Analog finden wir

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \sim -\frac{1}{c} \vec{n} \times \dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n})} \quad (13.51)$$

Beachte, dass sowohl \vec{E} also auch \vec{B} normal auf \vec{n} stehen. Der Energiefluss-Vektor ergibt sich daraus als

$$\vec{S} \sim \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \sim |\vec{E}|^2 \vec{n} \sim \frac{1}{r^2} \sin^2(\vartheta) \quad (13.52)$$

wobei ϑ der Winkel zwischen \vec{p} und \vec{n} ist. Die Abstrahlung ist also maximal in die Ebene normal zu $\ddot{\vec{p}}$, und verschwindet in Richtung von $\ddot{\vec{p}}$. Die Abhängigkeit von $\sim 1/r^2$ bedeutet, dass der gesamte Energiefluss durch eine Sphäre mit Radius r unabhängig von r ist, wie es sein muss.

13.3.2 Allgemeine monochromatische Wellen.

Da die Wellengleichung linear in den Feldern ist, und damit alle Frequenzen in der obigen allgemeinen Lösung separieren, genügt es, eine isolierte Kreisfrequenz ω zu betrachten. Für nicht-monochromatische Probleme benutze man lineare Kombinationen. Alle Felder und Quellen haben nun die Form

$$F(x, t) = \text{Re}[F_0(x) e^{-i\omega t}] \quad (13.53)$$

mit

$$F(x, t) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad F_0(x) \in \mathbb{C}. \quad (13.54)$$

Die Zeitableitung $\partial_t F$ einer Funktion F ist demnach gegeben durch $\partial_t F = \text{Re}[\dot{F}_0 e^{-i\omega t}]$ mit der Funktion

$$\dot{F}_0(x) = -i\omega F_0(x). \quad (13.55)$$

Grosser Abstand, Strahlungszone. Zunächst betrachten wir wiederum die Felder weit ausserhalb der Quellregion

$$\|x\| = r \gg d > \|y\|. \quad (13.56)$$

Weiterhin soll der Abstand gross gegenüber der Wellenlänge sein

$$r \gg \lambda \sim 1/k. \quad (13.57)$$

Wir wollen uns auf die dominanten Terme für $r \rightarrow \infty$ beschränken, wir haben allerdings noch nicht festgelegt, wie sich y im Verhältnis zu λ im Limes $r \rightarrow \infty$ entwickelt. Hier sollten wir annehmen, dass $y \sim \lambda$, d.h. die Grösse der Quellregion ist vergleichbar mit der Wellenlänge und insbesondere ist ihr Verhältnis unabhängig von r

$$y/\lambda \sim r^0. \quad (13.58)$$

Wir entwickeln also den Abstandsbetrag wie oben

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= r \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{r^2} + \frac{\vec{y}^2}{r^2}} \\ &= r - \vec{n} \cdot \vec{y} - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{y})^2}{2r} + \frac{\vec{y}^2}{2r} + \mathcal{O}(1/r^2). \end{aligned} \quad (13.59)$$

Eingesetzt in die exakte Formel für das Vektorpotential erhalten wir⁵ $A(x) = A_{\text{as}}(x) + \mathcal{O}(e^{ikr}/r^2)$ mit dem asymptotischen Vektorpotential

$$\vec{A}_{\text{as}}(x) = \int dy^3 \frac{\mu_0 \vec{J}(y)}{4\pi r} e^{ikr} e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{y}}. \quad (13.60)$$

Um die Felder zu bestimmen, benötigen wir die Ableitung ∇ . Sie wirkt auf x und reduziert das asymptotische Verhalten in der Regel um den Faktor $1/r$. Lediglich wenn ∇ auf den (stark) oszillierenden Term e^{ikr} wirkt, erhält man keinen Faktor $1/r$ und damit ein stärkeres asymptotisches Verhalten. Somit gilt allgemein in führender Ordnung

$$\vec{\nabla} \sim ik\vec{n} + \mathcal{O}(1/r). \quad (13.61)$$

Die elektrischen und magnetischen Felder haben also die führende Form

$$\begin{aligned} \vec{B} &= ik\vec{n} \times \vec{A} + \mathcal{O}(e^{ikr}/r^2), \\ \vec{E} &= ikc(\vec{A} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{A})) + \mathcal{O}(e^{ikr}/r^2). \end{aligned} \quad (13.62)$$

Sie fallen wie A_{as} als $\sim e^{ikr}/r$ ab. Weiterhin erkennt man, dass die radialen Komponenten $A_r \sim \vec{A} \cdot \vec{n}$ irrelevant sind, da sie aus den Ausdrücken für B und E herausfallen.

⁵Ein Problem dieser Entwicklung ist, dass die Exponentialfunktion für $r \rightarrow \infty$ stark oszilliert. Wir trennen daher das asymptotische Wellenverhalten e^{ikr} von den übrigen exponentiellen Beiträgen.

Wir erhalten nun auch direkt die Energiegrößen (gemittelt über eine Periode)

$$\begin{aligned}
\langle \tfrac{1}{4}\varepsilon_0 \vec{E}^2 \rangle &= \varepsilon_0 k^2 c^2 (\|A\|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}|^2) + \mathcal{O}(1/r^3) = \langle \tfrac{1}{4}\mu_0^{-1} \vec{B}^2 \rangle, \\
\langle w \rangle &= \frac{k^2}{2\mu_0} (\|A\|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}|^2) + \mathcal{O}(1/r^3), \\
\langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{B}^*] \\
&= \frac{k^2 c}{2\mu_0} \operatorname{Re}[\vec{A} \times (\vec{n} \times \vec{A}^*) - (\vec{A} \cdot \vec{n}) \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}^*)] \\
&= \dots = c \vec{n} \langle w \rangle + \mathcal{O}(1/r^3), \\
\langle T \rangle &= \dots = -\vec{n} \vec{n}^T \langle w \rangle + \mathcal{O}(1/r^3).
\end{aligned} \tag{13.63}$$

Das bedeutet, dass der Energie- und Impulsfluss wieder radial von der Quelle fort gerichtet und proportional zur Energiedichte w ist. In den höheren Ordnungen in $1/r$ gibt es Abweichungen von diesem Verhalten. Weiterhin sind alle Größen $\sim 1/r^2$, d.h. die abgestrahlte Leistung je Raumwinkelement beträgt

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} := r^2 \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{ck^2 r^2}{2\mu_0} (\|A\|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}|^2) + \mathcal{O}(1/r). \tag{13.64}$$

Die gesamte Strahlungsleistung ist demnach

$$P = \oint d^2 \Omega r^2 \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{ck^2 r^2}{2\mu_0} \oint d^2 \Omega (\|A_{\text{as}}\|^2 - |\vec{n} \cdot \vec{A}_{\text{as}}|^2). \tag{13.65}$$

Dieser Ausdruck der Ordnung $1/r^0$ ist interessanterweise exakt, d.h. es existieren keine Beiträge der Ordnung $1/r$, wie man aus dem Satz von Poynting folgern kann. Höhere Terme in $1/r$ existieren zwar für den Integranden $d^2 P/d^2 \Omega$, kürzen sich aber gegenseitig im Integral $\oint d^2 \Omega$ heraus. Physikalisch muss die abgestrahlte Leistung je Kugelschale für alle Kugelschalen aufgrund der Energieerhaltung gleich sein. Sie ist gleich der Leistung, die vom der Ladungs- und Stromverteilung in der Quellregion aufgebracht wird.

Multipolentwicklung. Wenn wir nun den Term $e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{y}}$ entwickeln unter der Annahme, $\|y\| \ll 1/k \sim \lambda$, d.h. die Wellenlänge ist gross im Vergleich zu den Ausmassen der Quelle, erhalten wir bekannte Terme aus der statischen Multipolentwicklung

$$\vec{A}_{\text{as}}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int dy^3 \vec{j}(y) (1 - ik\vec{n} \cdot \vec{y} + \dots). \tag{13.66}$$

Der erste Term verschwindet in der Statik aufgrund der Stromerhaltung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, hier allerdings gilt die Ladungserhaltung bei fester Frequenz, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho = ikc\rho$. Zur Herleitung der Verallgemeinerung verwenden wir, dass $\rho = j = 0$ auf ∂V , und betrachten wie zuvor die Kombination

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^3 \oint_{\partial V} dx^2 n_k (x_l j_k) = \sum_{k=1}^3 \int dx^3 \nabla_k (x_l j_k) \\
&= \int dx^3 j_l + \int dx^3 x_l \vec{\nabla} \cdot \vec{j}.
\end{aligned} \tag{13.67}$$

Deshalb gilt

$$\int dx^3 \vec{j} = - \int dx^3 \vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) = -ikc \int dx^3 \vec{x} \rho = -ikc \vec{P} \quad (13.68)$$

und wir finden das elektrische Dipolmoment $\vec{P} = \int dx^3 \rho(x) \vec{x}$ der Ladungsverteilung ρ . Für den zweiten Term findet man ausgehend von $\vec{\nabla} \cdot (x_k x_l \vec{j})$

$$\int dy^3 j_l(y) (\vec{n} \cdot \vec{y}) = \dots = -\frac{1}{6} ikc R \vec{n} - \frac{1}{2} ikc \vec{n} \int dy^3 \vec{y}^2 \rho + \vec{M} \times \vec{n} \quad (13.69)$$

mit dem elektrischen Quadrupoltensor $R = \int dx^3 (3\vec{x}\vec{x}^T - \vec{x}^2) \rho$ und dem magnetischen Dipolmoment $\vec{M} = \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{x} \times \vec{j}$. Der zweite Term liefert eine neue Kenngrösse $\int dx^3 \vec{x}^2 \rho$ einer Ladungsverteilung, die allerdings nicht weiter benötigt wird, denn der Beitrag zu A ist radial $\sim \vec{n}$ ausgerichtet. Wir erhalten also die führenden Beiträge zum Vektorpotential

$$\vec{A}_{\text{as}}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \left[-ikc \vec{P} - ik \vec{M} \times \vec{n} - \frac{1}{6} k^2 c R \vec{n} + \dots \right]. \quad (13.70)$$

Es folgen weitere Terme, wie das magnetische Quadrupolmoment, aber auch Grössen, die nicht durch die elektrischen und magnetischen Multipolmomente geschrieben werden können. Man sieht hierbei, dass die Kopplung einer kleinen Quelle an lange Wellen unterdrückt ist mit Potenzen von k .

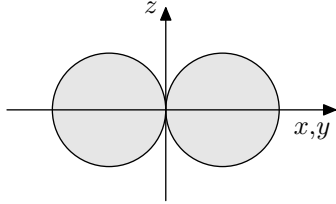
Wir können nun die Abstrahlungscharakteristik der obigen Multipolentwicklung untersuchen. Beginnen wir mit einem reinen oszillierenden elektrischen Dipol

$$\vec{A}_{\text{as}}(x) = -ikc\mu_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \vec{P}. \quad (13.71)$$

Es folgt

$$\frac{d^2 P}{d^2 \Omega} = \frac{c^3 k^4 \mu_0}{32\pi^2} (\|P\|^2 - |\vec{P} \cdot \vec{n}|^2) + \dots \quad (13.72)$$

Ist das Dipolmoment entlang der z -Achse ausgerichtet, erhält man mit $n_z = \cos \vartheta$ das typische Dipolstrahlungsprofil

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_{\text{as}}}{d^2 \Omega} &= \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{32\pi^2} (1 - \cos^2 \vartheta) \\ &= \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{32\pi^2} \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (13.73)$$


Die Strahlung ist am stärksten senkrecht zur Dipolachse und verschwindet entlang der Achse. Die Gesamtleistung der Quelle erhält man durch Integration

$$\begin{aligned} P &= \int d\vartheta \sin \vartheta \int d\varphi \frac{d^2 P}{d^2 \Omega} \\ &= \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{32\pi^2} 2\pi \int d\vartheta \sin^3 \vartheta \\ &= \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{16\pi} \int_{-1}^{+1} dz (1 - z^2) = \frac{c^3 k^4 \mu_0 \|P\|^2}{12\pi} = \frac{ck^4 \|P\|^2}{12\pi \epsilon_0}. \end{aligned} \quad (13.74)$$

Man sieht also, dass die Leistung mit dem Quadrat des Dipolmoments und der 4. Potenz der Frequenz zunimmt.⁶ Man beachte, dass die obige Strahlungscharakteristik nicht die einzigmögliche ist, denn \vec{P} ist i.A. ein komplexer Vektor, den man mittels Rotation *nicht* auf eine gewünschte Achse drehen kann! So entstehen andere Abstrahlungsformen, die man mit den Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}$ mit $\ell = 0$ und $\ell = 2$ beschreiben kann.

13.4 Beschleunigte Punktladungen

- Potentiale, Felder
- ruhendes Teilchen
- Strahlung
 - Nolting 4.5.5; Jackson 14.1–4

Schliesslich wollen wir die Felder berechnen, die von einer allgemein *beschleunigten Punktladung* erzeugt werden. Insbesondere werden wir sehen, dass eine Beschleunigung zu Abstrahlung von Energie (und Impuls) führt.

Potentiale. Zunächst berechnen wir die elektromagnetischen Potentiale für die Quellen eines allgemeinen Pfades $y(t)$

$$\rho(x, t) = q\delta^3(x - y(t)), \quad \vec{j}(x, t) = q\dot{y}(t)\delta^3(x - y(t)). \quad (13.75)$$

Wir verwenden die Greensche Funktion $G_{\text{ret}} = (c/4\pi\|x\|)\delta(\|x\| - ct)$ und schreiben die Potentiale als

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \int dx'^3 dt' \frac{cq}{4\pi\epsilon_0\|x - x'\|} \\ &\quad \cdot \delta^3(x' - y(t')) \delta(\|x - x'\| - c(t - t')) \\ &= \int dt' \frac{cq}{4\pi\epsilon_0\|x - y(t')\|} \delta(\|x - y(s)\| - c(t - t')), \\ \vec{A}(x, t) &= \int dt' \frac{cq\mu_0\dot{y}(t')}{4\pi\|x - y(t')\|} \delta(\|x - y(s)\| - c(t - t')). \end{aligned} \quad (13.76)$$

Die verbleibende delta-Funktion hat zwei Effekte. Zum einen legt sie $t' = s(x, t)$ fest, wobei die Funktion s impliziert definiert ist über die Gleichung

$$\|x - y(s)\| = c(t - s). \quad (13.77)$$

⁶Die gilt unter der Annahme von fixiertem P , allerdings kann bei realistischen Quellen $\|P\|$ durchaus von ω abhängen.

Dies ist eine nicht-lineare Gleichung, die man allgemein nicht in geschlossener Form lösen kann. Ihre Lösung $s(x, t)$ beschreibt die Zeit $t' = s(x, t)$, zu der ein Signal auf dem Pfad $y(t')$ abgesetzt werden muss, so dass es bei (x, t) empfangen wird unter der Annahme, dass es sich geradlinig mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet.

Die Gleichung hat für alle (x, t) eine Lösung, denn man sollte aufgrund der Ladungserhaltung davon ausgehen, dass der Pfad für alle t' existiert. Vielmehr gibt es immer *genau* eine Lösung, falls sich das Teilchen zu jedem Zeitpunkt mit weniger als Lichtgeschwindigkeit bewegt, denn die Steigung der rechten Seite ist dann immer kleiner als die Steigung der linken Seite. Mit anderen Worten ist das Teilchen immer und überall an genau einer Stelle sichtbar.⁷

Zum anderen führt die Form $\delta(f(t'))$ der delta-Funktion zu einem Faktor $1/|f'(s)|$ nach Integration, wobei hier $f(t') := \|x - y(t')\| - ct + ct'$ die bestimmende Gleichung $f(s) = 0$ für s beschreibt und es gilt

$$f'(s) = c - \frac{\dot{\vec{y}} \cdot (\vec{x} - \vec{y}(s))}{\|x - y(s)\|} =: ck. \quad (13.78)$$

Zusammen erhalten wir die Potentiale (*Liénard-Wiechert*)

$$\Phi(x, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r k} \quad \text{und} \quad \vec{A}(x, t) = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r k} \quad (13.79)$$

mit den Hilfsfunktionen r für den retardierten Abstand zur Quelle, n für die retardierte Richtung der Quelle, v für die retardierte Geschwindigkeit der Quelle und dem oben definierten Faktor k

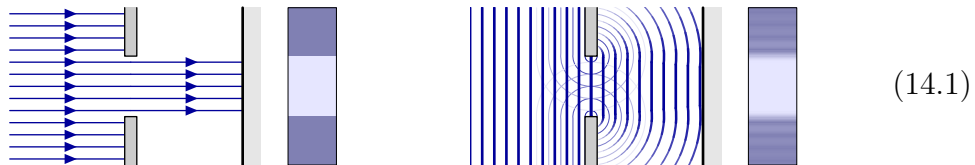
$$\begin{aligned} r(x, t) &= \|x - y(s)\|, & \vec{n}(x, t) &= \frac{\vec{x} - \vec{y}(s)}{r}, \\ \vec{v}(x, t) &= \dot{\vec{y}}(s), & k(x, t) &= 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}. \end{aligned} \quad (13.80)$$

Im statischen Fall ist $k = 1$ und wir erhalten das Coulomb-Potential mit $\vec{A} = 0$. Nur bei relativistischen Geschwindigkeiten $\|v\| \approx c$ weicht k substantiell von 1 ab, ist aber beschränkt durch $0 < k < 2$.

⁷Ein geladenes Teilchen, welches sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt, erfüllt diese Eigenschaft i.A. nicht. Die Beschränkung von Geschwindigkeiten durch c in der speziellen Relativitätstheorie ist also eine willkommene Eigenschaft für dieses Problem. In Medien allerdings kann die Teilchengeschwindigkeit durchaus die effektive Lichtgeschwindigkeit überschreiten, dort tritt dann Tscherenkow-Strahlung auf. Ein Analogon in der Schallausbreitung ist der Machsche Kegel, der bei Quellen mit Überschallgeschwindigkeit entsteht.

14 Wellenoptik

Aus der klassischen Optik sind wir gewohnt, dass sich Lichtstrahlen gradlinig ausbreiten. Ein Hindernis im Strahlengang blockiert die Ausbreitung und wirft einen scharfen Schatten auf einen dahinterliegenden Schirm.



Nun ist Licht eine Erscheinung elektromagnetischer Wellen. Wellen werden zwar ebenfalls durch Hindernisse blockiert, aber auch an den Kanten des Hindernisses gebeugt. Die Wellen breiten sich also auch (mit entsprechend geringer Intensität) in den klassischen Schatten des Hindernisses aus, interferieren dort sowohl konstruktiv als auch destruktiv, und erzeugen auf dem Schirm ein unscharfes Bild des Hindernisses mit charakteristischen Interferenzmustern an den Rändern. Die Schärfe des Bildes hängt von der Wellenlänge ab, und die Interferenzmuster sind besonders ausgeprägt, wenn die Wellenlänge vergleichbar mit der Ausdehnung des Hindernisses ist. Zusammen mit der Brechung an Grenzflächen sind dies typische Effekte der *Wellenoptik*. Die klassische Optik ergibt sich als Grenzfall kleiner Wellenlängen im Vergleich zur Ausdehnung der Objekte.

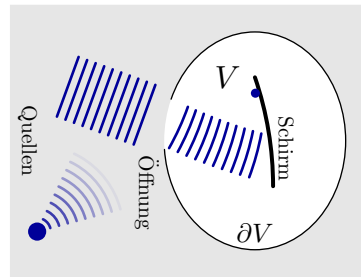
14.1 Kirchhoffsche Beugungstheorie

- Beugung
- Kirchhoffsche Formel
- Kirchhoffsche Näherung
 - Nolting 4.3.11,12; Jackson 9.5,6

Wir betrachten ein skalaras (unpolarisiertes) Feld Ψ ohne Quellen im homogenen Medium (Vakuum): $\square\Psi = 0$. Die Ausbreitung von Wellen wird lediglich durch Hindernisse in Form von Randbedingungen beeinflusst, z.B. $\Psi = 0$ auf dem Rand.

Eine typische Anordnung besteht aus einer Quelle, die Licht auf ein Hindernis bzw. auf eine Öffnung in diesem strahlt. Dort wird das Licht gebeugt und trifft später

auf einen Detektor bzw. Schirm, wo die Intensität gemessen wird.



(14.2)

Im Prinzip lässt sich dieses Problem mittels Greenscher Funktionen lösen, die die Randbedingungen des Hindernisses exakt beschreiben. Allerdings sind diese Greenschen Funktionen i.d.R. nicht bekannt und können weder exakt noch einfach numerisch¹ bestimmt werden. Man teilt deshalb das Problem in zwei Gebiete auf:

- Gebiet der Quellen vor dem Hindernis,
- Gebiet der Beugung hinter dem Hindernis.

Die Gebiete sind durch die Öffnung miteinander verbunden. Man sollte beide Gebiete kompakt wählen, kann aber auch offene Gebiete mit den üblichen Randbedingungen bei Unendlich untersuchen. Dieses Problem lässt sich zwar auch exakt behandeln, man macht aber eine entscheidende Näherung (Kirchhoff) um zu einer Lösung zu gelangen:

- Beide Gebiete werden jeweils als der freie Raum \mathbb{R}^3 betrachtet für den wir die Greenschen Funktionen exakt kennen und gut mit ihnen rechnen können. Die Grenze zwischen den Gebieten hat somit keinen Einfluss auf die Ausbreitung der Wellen.
- Die Felder in beiden Gebieten werden als unabhängig voneinander betrachtet, und sie kommunizieren nur über die Öffnung: Dort fungieren die Werte der Felder im Quellgebiet als Quellen für die Felder im Beugungsgebiet.

Dies ist sicherlich eine Approximation, denn am Hindernis wird das Licht auch zurück in das Quellgebiet gebeugt, was wiederum das Licht im Beugungsgebiet beeinflusst. Für die schwachen Interferenzeffekte an den Rändern der Öffnung genügt diese Näherung aber und ergibt sehr gute Resultate.

Betrachten wir also nur das Beugungsgebiet V und verwenden die Zeitinvarianz, um uns auf monochromatische Wellen einzuschränken $\Psi \sim e^{-i\omega t}$

$$0 = \square \Psi = \Delta \Psi + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi = (\Delta + k^2) \Psi. \quad (14.3)$$

Die Greensche Funktion für den freien Raum \mathbb{R}^3 lautet $G(x, y) = e^{ik\|x-y\|} / 4\pi\|x-y\|$. Sie hat keine spezifischen Randbedingungen auf ∂V , lässt sich aber für die Greensche Identität verwenden, welche das Feld im Inneren

¹Zum einen benötigen die Felder ein dreidimensionales Gitter, welches viel Speicher und Rechenleistung benötigt. Zum anderen kommen dunkle Gebiete durch Auslöschung aufgrund variierender komplexen Phase zustand, welches Numerisch schwer zu erfassen ist.

von V beschreibt (soweit keine Quellen existieren). Dies ergibt die *Kirchhoffsche Formel*

$$\Psi(x) = \oint_{\partial V} dy^2 \vec{n} \cdot \left[\frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \vec{\nabla}_y \Psi_0(y) - \Psi_0(y) \vec{\nabla}_y \frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} \right]. \quad (14.4)$$

Um das Feld in V zu lösen, benötigen wir also die Randbedingungen. Allerdings sind beliebige Randbedingungen an Ψ und $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi$ zu stark, denn sie überbestimmen das Feld und sind i.d.R. nicht kompatibel mit dem resultierenden $\Psi(x)$. Dennoch ist das obige $\Psi(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $(\Delta + k^2)\Psi = 0$ für jede Wahl von Ψ_0 und $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi_0$ auf ∂V . Allerdings beschreiben letztere nicht die Randbedingungen von Ψ ! Die *Kirchhoffsche Näherung* besteht aus dem folgenden Ansatz:

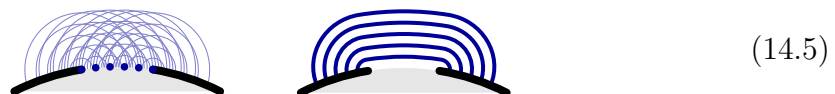
- $\Psi_0 = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi_0 = 0$ auf ∂V ohne die Öffnung,
- Ψ_0 und $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi_0$ auf der Öffnung werden durch die Felder in dem Quellgebiet definiert.

Das resultierende Feld Ψ hat dann zwar andere Randbedingungen, aber es beschreibt die Interferenzeffekte dennoch gut.

14.2 Interferenz und Huygens-Prinzip

- Wellenfronten
- Optische Weglänge

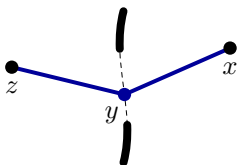
Aus der Kirchhoffschen Formel und Näherung lässt sich gut das *Huygens-Prinzip* herleiten. Es besagt, dass man sich die Öffnung als Quelle von Kugelwellen vorstellen kann. Die Phasen der Kugelwellen sind bestimmt durch die einfallende Welle. Die Einhüllenden von Wellenfronten der individuellen Kugelwellen beschreiben dann die Wellenfronten der gebeugten Welle.



In der Kirchhoffschen Formel findet man ebenfalls die besagten Kugelwellen vor, die von der Öffnung ausgelöst werden. Dort, wo die Wellenfronten von Kugelwellen dicht beieinanderliegender Punkte auf der Öffnung zusammentreffen, haben beide Beiträge (nahezu) identische komplexe Phasen. Dies führt zu positiver Interferenz, welches den grösstmöglichen Beitrag zur entstehenden Welle liefert. Die Beiträge zu anderen Punkte oder von weiter entfernten Punkten der Öffnung sind weniger stark korreliert und führen im statistischen Mittel zu destruktiver Interferenz, also keinen Beitrag zur Gesamtwelle. Insbesondere bei kleinen Wellenlängen oszilliert die Phase stark und das Huygens-Prinzip beschreibt die Welle gut.

Optische Weglänge. Vernachlässigt man in der Kirchhoff-Formel die rationale Abhängigkeit, so findet man bei einer Punktquelle am Ort z folgende komplexe

Phase

$$\Psi(x) \sim \int dy^2 e^{ik\|x-y\|} e^{ik\|y-z\|} . \quad (14.6)$$


Die Phase beschreibt also die Weglänge von z über den Punkt y in der Öffnung zum Detektor x . Der Phasenfaktor wird integriert über alle Punkte der Öffnung. In Anwesenheit von Medien betrachtet man stattdessen die *optische Weglänge*

$$L(x, z) = \int_x^z dy n(y). \quad (14.7)$$

Die Phase des Wegs ist dann $e^{i\omega L(x,y)/c}$. Mittels dieser Phasen lassen sich Interferenzphänomene gut approximieren, insbesondere wenn die Amplitude der Welle wenig über den Bereich der Öffnung variiert (d.h. die Quelle ist in genügend grosser Entfernung platziert) und der Detektor entsprechend weit entfernt ist.

Teil V

Anhang

Index

- Äther, 9.2
- Ampère-Gesetz, 4.2
- Anfangswertproblem, 13.1
- Antiferromagnetismus, 5.7
- Ausbreitungsgeschwindigkeit, 10.8, 11.1
- Bessel-Funktionen, 12.8
- Beugung, 14.1
- Biot-Savart-Gesetz, 4.2
- Brechungsindex, 11.1
- Brewster-Winkel, 11.7
- chiral, 10.7
- Coulomb-Gesetz, 1.1
- D'Alembert-Operator, 6.6
- delta-Funktion, 1.4
 - Ableitung, 1.12
- Diamagnetismus, 5.7
- Dielektrikum, 5.2
- dielektrische Verschiebung, 5.4
- Dielektrizitätskonstante, 1.1
 - frequenzabhängige, 11.2
- Dipol
 - dynamischer, 13.14
 - elektrischer, 1.12
 - induzierter, 5.2
- Dipoldichte, 5.3
- Dipolmoment
 - dynamisches, 13.14
 - elektrisches, 1.12, 3.9
 - magnetisches, 4.8
- Distribution, 1.4
- Drehimpuls
 - elektromagnetischer, 8.4
- Drehmoment
 - magnetisches, 4.3
- Dualisierung von Vektoren
 - in drei Dimensionen, 9.10
 - in zwei Dimensionen, 12.3
- Durchflutungsgesetz, 4.5
- Dämpfung
 - kritische, 7.8
 - schwache, 7.7
 - starke, 7.7
- ebene Welle, 10.2
 - in Materie, 11.2
 - monochromatisch, 10.2
- Eichfixierung, 4.6
 - partielle, 6.7
- Eichtransformation
 - dynamisch, 6.6
 - statisch, 4.6
- Eichung, 4.6
 - axiale, 4.7
 - Coulomb, 4.6, 6.6
 - Lorenz, 6.7, 9.13
- Eigenwertproblem, 3.1, 12.5
- Eindringtiefe
 - elektrischer Leiter, 12.2
 - Totalreflexion, 11.7
- elektrischer Leiter, 12.1
- elektromagnetische Dualität, 8.5
- Energie
 - elektrisches Feld, 1.8
 - elektromagnetische, 8.4
 - magnetisches Feld, 4.7
- Energie-Impuls-Tensor, 9.12
- Energiedichte
 - elektromagnetische, 8.2
 - in Materie, 11.1
 - Wellen, 10.8
- Energieflussdichte
 - in Materie, 11.1
 - Wellen, 10.8
- Energieschwerpunkt
 - elektromagnetischer, 8.4
- Energiestromdichte, 8.2
- Faradayscher Käfig, 2.2
- Feldstärke
 - Differentialform, 9.13

- dualer Tensor, 9.12
 - elektrische, 1.2
 - magnetische, 4.2
 - Tensor, 9.11
- Ferrimagnetismus, 5.7
- Ferroelektrikum, 5.3
- Ferromagnetismus, 5.7
- Fourier-Raum, 10.5, 13.2
- Fourier-Transformation, 10.3
 - Residuensatz, 13.7
 - Vollständigkeit, 10.4
- Freier Raum, 2.3
- Gaußscher Satz, 1.3
- Gaußsches Gesetz, 1.4
- Gaußsches Kästchen, 1.11, 5.5
- Greensche Funktion, 2.3
 - avanciert, 13.5
 - dynamisch, 13.4
 - Fourier-Raum, 13.6
 - relativistisch, 13.8
 - retardiert, 13.5
- Greensche Identität
 - erste, 2.2
 - für Vektorfelder, 12.6
 - zweite, 2.4
- Grenzfläche
 - Dielektrika, 5.5
- Gruppengeschwindigkeit, 10.10
 - in Materie, 11.2
- Hohlleiter, 12.3
 - kreisförmiger, 12.7
 - rechteckiger, 12.7
- Huygens-Prinzip, 14.3
- Impuls
 - elektromagnetischer, 8.4
- Impulsdichte, 8.3
 - in Materie, 11.1
 - Wellen, 10.8
- Impulsstromdichte, 8.4
- Induktionsgesetz, 6.2
 - differentiell, 6.3
- Interferenz, 14.1
- Inversion an der Sphäre, 2.9
- Kapazitätskonstanten, 2.11
- Kirchhoffsche Formel, 14.3
- Kirchhoffsche Näherung, 14.3
- Kirchhoffsche Regel, erste, 7.4
- Kirchhoffsche Regel, zweite, 7.4
- Kondensator, 7.5
- Kontinuitätsgleichung, 8.1
 - dynamische, 6.1, 6.4
 - Energie und Impuls, 9.12
 - statische, 4.4
- Kraftdichte
 - elektromagnetische, 6.1
- Kugelflächenfunktionen, 3.7
 - Orthogonalität, 3.7
 - Vollständigkeit, 3.7
- Kugelkoordinaten, 3.2
- Kugelwelle, 10.11
- Ladung, 1.1, 3.9
 - freie, 5.3
- Ladungsdichte, 1.2
- Ladungserhaltung, 8.1
- Laplace-Gleichung, 1.7
- Laplace-Operator, 1.7
 - in Kugelkoordinaten, 3.2
- Legendre-Funktionen, 3.5
 - Gleichung, 3.5
 - Orthogonalität, 3.6
 - Polynome, 3.5
- Leistung
 - elektromagnetische, 8.2
- Lenzsche Regel, 6.2
- Lichtgeschwindigkeit, 10.2
- Liénard-Wiechert-Potentiale, 13.16
- Lorentz-Boost, 9.3
- Lorentz-Gruppe, 9.4
- Lorentz-Kraft, 6.1
 - relativistisch, 9.15
- Magnetfeld, 5.7
 - magnetische Feldkonstante, 4.2
 - magnetische Flussdichte, 4.2
 - magnetische Induktion, 4.2
- Magnetisierung, 5.7
- makroskopische Felder, 5.1
- Materialkonstante
 - elektrische, 5.4
 - magnetische, 5.7

Maxwell-Gleichungen, 6.4
 Differentialformen, 9.13
 homogen, 6.4
 in Materie, 11.1
 inhomogen, 6.4
 integral, 6.4
 relativistisch, 9.10
 Minkowski-Metrik, 9.9
 Monopol
 Dirac, 8.5
 magnetischer, 8.5
 Multipolentwicklung, 3.9
 Strahlung, 13.13
 Multipolmomente, 3.9

 optische Weglänge, 14.4
 Ortsraum, 10.5, 13.3

 Paraelektrikum, 5.2
 Paramagnetismus, 5.7
 Phasendifferenz
 Totalreflexion, 11.7
 Phasengeschwindigkeit, 10.10
 in Materie, 11.2
 Plattenkondensator, 1.11
 mit Dielektrikum, 5.4
 Poincaré-Gruppe, 9.4
 Poisson-Gleichung, 1.7
 Polarisation
 elliptisch, 10.7
 linear, 10.6
 TE, 11.5, 12.6
 TEM, 12.6
 TM, 11.6, 12.6
 zirkular, 10.7
 Potential
 Differentialform, 9.14
 elektromagnetisches, 6.5
 elektrostatisches, 1.6
 Feldgleichungen, 6.5
 Liénard-Wiechert, 13.16
 retardiert, 13.8
 skalares magnetisches, 4.8
 Vektor, 4.6
 Vierer-Vektor, 9.13
 Poynting-Vektor, 8.2
 in Materie, 11.1

 Poyntingscher Satz, 8.2

 Quadrupoltensor, 3.11

 Randbedingung
 Dirichlet, 2.2, 2.5
 Neumann, 2.2, 2.6
 Randwertproblem, 2.1
 Raumzeit, 9.7
 Reflexionskoeffizient, 11.6
 Rodrigues-Formel, 3.6
 Rotationsgruppe, 3.11
 Darstellungen, 3.13

 Schalter, 7.5
 Schwingkreis, 7.6
 Dämpfung, 7.7
 Selbstenergie, 1.8
 Separation der Variablen, 3.1
 Skalar, 9.8
 Feld, 9.9
 Skalarprodukt, 9.9
 Snelliussches Gesetz, 11.4
 Spannungsquelle, 7.6
 Spannungstensor, 8.4
 in Materie, 11.1
 Wellen, 10.8
 Spannungstensor
 relativistisch, 9.12
 Spiegelladung, 2.8, 2.9
 Spule, 7.5
 gekoppelte, 7.5
 Stetigkeitsbedingung, 11.3
 Stokessche Schleife, 1.11, 5.6
 Stokesscher Satz, 1.5
 Strahlung
 beschleunigte Punktladung, 13.15
 Dipol, 13.14
 Multipolentwicklung, 13.13
 Strahlungszone, 13.12
 Strom, 4.2
 induzierter, 6.2
 Stromdichte, 4.4
 freie, 5.7
 Vierer-Vektor, 9.11
 Stromkreis, 7.1
 Stromschleife, 4.1

- Symmetrie
 - Lorentz, 9.4
 - Poincaré, 9.4
- Telegraphen-Gleichung, 12.1
- Tensor, 9.8
 - Feld, 9.9
- Totalreflexion, 11.7
- Transmissionskoeffizient, 11.6
- Vektor
 - Feld, 9.9
 - kontravariant, 9.8
 - kovariant, 9.8
 - Vierer-, 9.7
- Verzweigung, 7.5
- Wellenerzeugung, 13.9
- Wellengleichung, 10.1
- Wellenleiter, 12.2
- Wellenlänge, 10.3
- Wellenoptik, 14.1
- Wellenpaket, 10.10
 - Gauß, 10.10
- Wellenzahlvektor, 10.2
- Widerstand, 7.5
- Zeitentwicklung
 - Anfangswertproblem, 13.1
- Zwangsbedingung
 - Anfangswertproblem, 13.1

Plan der Vorlesungen

Die folgende Tabelle listet die Stellen im Skript zu Beginn aller Vorlesungsstunden:

Mi. 24.02. 1 [45]: 12. Wellenleiter

Mi. 24.02. 2 [45]: 12.2. ... § Reduktion auf Zwei Dimensionen.

Fr. 26.02. 1 [240]: 12.2. ... § TEM-Moden.

Fr. 26.02. 2 [15]: 14.2. Interferenz und Huygens-Prinzip

Boltzmanngasse 5,,