

Übungen zu “Lie-Gruppen und Lie-Algebren für Physiker”

Mo 10:15 - 11:45, kleiner Seminarraum 5. Stock Boltzmanngasse 5

4. Übungsblatt

(besprochen ab 12.11.2012)

10. Sphärische Harmonische als irreduzible Darstellung von $SO(3)$

Seien x^1, x^2, x^3 kartesische Koordinaten auf \mathbb{R}^3 . Der Raum der Funktionen auf der Sphäre S^2 wird durch den Raum aller Polynome $P_n(x) = \sum f_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} \dots x^{i_n}$ (mit komplexen Koeffizienten) aufgespannt, wobei $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ durch $\sum (x^i)^2 = 1$ definiert ist. Wir benötigen auch den Raum aller Polynome vom Grad $\leq n$,

$$\mathcal{C}_n(S^2) = \bigoplus_{k \leq n} P_k(x).$$

Betrachten Sie die “natürliche” Darstellung von $SO(3)$ auf \mathbb{R}^3 , durch $\vec{x} \rightarrow R \cdot \vec{x}$ für $R \in SO(3)$. Dies definiert eine Darstellung von $SO(3)$ auf $\mathcal{C}(S^2)$ durch

$$f(x) \mapsto f(R^{-1} \cdot \vec{x})$$

(warum so? nachprüfen!), d.h. $f(x)$ ist ein Skalarfeld auf S^2 .

Bestimmen Sie die entsprechende Darstellung der Lie-Algebra $so(3)$ auf $\mathcal{C}_n(S^2)$ (d.h., wie operieren die Generatoren J_i auf einem Polynom?).

Identifizieren Sie die Polynome mit $J_+ P_n(x) = 0$ (d.h. die höchsten Gewichts-Vektoren).

Finden Sie die Zerlegung in irreduzible Darstellungen

$$\mathcal{C}_n(S^2) = \bigoplus_k n_k(\text{spin } k)$$

wobei (spin k) die Spin k Darstellung bezeichnet. Bestimmen Sie die Multiplizitäten n_k .

Finden Sie explizit die Darstellungsräume von (spin 0), (spin 1), (spin 2) als Polynome in x^i .

Gehen Sie dann zu Kugelkoordinaten über, und erklären Sie den Zusammenhang mit den sphärischen harmonischen Y_m^l für $l \leq 2$ (und allgemein).

11. Baker-Campbell-Hausdorff Formel

Nehmen Sie an, dass die 2 Matrizen/Operatoren/Liealgebra-elemente A, B die Relationen

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

erfüllen. Zeigen Sie damit, dass dann

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right)$$

gilt.

Hinweis: betrachten Sie $\exp(tA) \exp(B) \exp(-tA)$ und leiten Sie eine Differentialgleichung dafür her.