# Übungen zu "Lie-Gruppen und Lie-Algebren für Physiker"

Mo 10:15 - 11:45, kleiner Seminarraum 5. Stock Boltzmanngasse 5

**3. Übungsblatt** **(besprochen ab 29.10.2012)**

### 6. Dimensionen von Lie-Gruppen

Berechnen Sie die Dimension der Lie-Gruppen $SU(n)$, $SO(n,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{C})$ und der Poincaré-gruppe.

### 7. Rotations-algebra $so(n)$

Wie in der Vorlesung besprochen, erfüllen die antisymmetrischen $n \times n$ Matrizen

$$(M_{ab})_{jk} = \delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{bj}\delta_{ak}$$

(d.h. $i, j$ sind die Zeilen und Spalten der Matrix $M_{ab}$) die Lie-algebra von $so(n)$:

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \delta_{bc}M_{ad} - \delta_{ac}M_{bd} - \delta_{bd}M_{ac} + \delta_{ad}M_{bc}.$$

Zeigen Sie, dass eine Darstellung von $so(n)$ gegeben ist durch die Operatoren

$$J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a}$$

auf Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ (mit Variablen $x_1, ..., x_n$). Interpretieren Sie diese Darstellung. Schreiben Sie eine Formel für die zugehörige Darstellung von $SO(n)$ an (d.h. endliche Rotationen).

Betrachten Sie insbesondere $n = 3$, und stellen Sie den Zusammenhang mit $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$ her.

### 8. $SO(4)$

Zeigen Sie, dass die Lie-algebra von $SO(4)$ wie folgt zerfällt:

$$so(4) \cong su(2) \oplus su(2)$$

(Daraus folgt, dass $SU(2) \times SU(2)$ die universelle Überlagerungsgruppe von $SO(4)$ ist.)

### 9. Casimir-element von $su(2)$

Seien $J_i$ Darstellungen der Lie-algebra $su(2)$, also

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

Betrachten Sie

$$\vec{J}^2 = J_1 J_1 + J_2 J_2 + J_3 J_3$$

a) Zeigen Sie, dass

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{4} J_0 (J_0 + 2) + J_- J_+$$

und berechnen Sie damit den Eigenwert von $\vec{J}^2$ auf der $n$-dimensionalen irreduziblen Darstellung von $su(2)$.