Dr. H. Steinacker Wintersemester 2012/2013

Übungen zu “Lie-Gruppen und Lie-Algebren für Physiker”

Mo 10:15 - 11:45, kleiner Seminarraum 5. Stock Boltzmanngasse 5

2. Übungsblatt **(besprochen ab 22.10.2012)**

3. Poincaré Algebra

Ein Element (Λ, a) der Poincaré- Gruppe wirkt auf den Minkowski-Raum wie

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu.$$

“Infinitesimale” Poincaré- Transformationen haben also die Form

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \qquad a^\mu = \epsilon^\mu.$$

Zeigen Sie, dass $\omega_{\nu\mu}$ antisymmetisch ist.

Sei $U(\Lambda, a)$ eine unitäre Darstellung der Poincaré Gruppe (d.h. $U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)$ und $U(\Lambda, a)$ ist unitär). Wir schreiben dann

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2} i\omega_{\sigma\rho} J^{\sigma\rho} - i\epsilon_\rho P^\rho + ..., \tag{1}$$

wobei $J^{\sigma\rho}$ und P^ρ hermitische Operatoren sind mit $J^{\sigma\rho} = -J^{\rho\sigma}$.

a) Zeigen Sie die folgenden Transformationseigenschaften von $J^{\sigma\rho}$ und P^ρ:

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu), \tag{2}$$

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu. \tag{3}$$

(Hinweis: betrachten Sie $U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a)$.)

b) Nehmen Sie nun an, (Λ, a) sei infinitesimal. Was sind die resultierenden Vertauschungsrelationen für $J^{\sigma\rho}$ und P^ρ? (Sie haben die Lie Algebra der Poincaré- Gruppe hergeleitet).

c) Betrachten Sie die 3-Vektoren

$$\vec{P} = \{P^1, P^2, P^3\}, \qquad \vec{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\}$$

und

$$\vec{K} = \{J^{01}, J^{02}, J^{03}\}$$

sowie

$$H = P^0$$

Wie lauten die erhaltenen Vertauschungsrelationen in dieser 3-dimensionalen Schreibweise? (z.B. $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ etc.)

(Zur Vereinfachung können Sie sich auch auf die Lorentz-Gruppe beschränken, also $a^\mu = \epsilon^\mu = 0$ setzen).

(Siehe: Weinberg, The Quantum Theory of Fields I).

4. Darstellungen der Lorentz Algebra

Die Generatoren $J_{\mu\nu}$ der Poincaré Algebra bilden eine Unteralgebra (Lorentz Algebra). Setze

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk}$$

$$K_i = J_{i0}$$

sowie

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$$

$$B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i).$$

a) Wie vertauschen die A_i's und B_i's?

b) Geben Sie 2 verschiedene Darstellungen der Lorentz-Algebra auf $\mathbb{C}^2$ an (Hinweis: Pauli Matrizen).

5. Adjungierte Darstellung einer Lie-Algebra

Jede Lie Algebra $\mathfrak{g}$ besitzt die folgende natürlich Darstellung: Definiere

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$$

durch die Formel

$$\mathsf{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Zeige, dass dies eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist. (die sogenannte **adjungierte Darstellung**).

Finden Sie die Darstellungs-Matrizen von ad_{X_i} (in einer Basis X_i von $\mathfrak{g}$) in Termen der Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$.