

## Übungen zu “Lie-Gruppen und Lie-Algebren für Physiker”

Mo 10:15 - 11:45, kleiner Seminarraum 5. Stock Boltzmanngasse 5

### 1. Übungsblatt

(besprochen ab 15.10.2012)

#### 1. Einfach zusammenhängende Gruppen

Begründen Sie, daß  $SU(2)$  einfach zusammenhängend ist (d.h. jede geschlossene Kurve ist kontrahierbar), aber  $SO(3)$  nicht.

#### 2. Endliche und infinitesimale Rotationsoperatoren

Hermitesche Operatoren  $J_x, J_y, J_z$ , welche die Relationen  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$  erfüllen, heißen Drehimpulsoperatoren. Die zugehörigen unitären Operatoren

$$R(\vec{\varphi}) = e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{J}}$$

für  $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^3$  sind Rotationsoperatoren um den Winkel  $\varphi$  und die Achse  $\vec{\varphi}/|\varphi|$ .

##### a) Rotation eines Vektors (“Spin 1”)

Die Rotationsoperatoren von Vektoren in  $\mathbb{R}^3$  sind bekanntlich

$$R^{(1)}(\varphi\vec{e}_x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad R^{(1)}(\varphi\vec{e}_y) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \text{und}$$

$$R^{(1)}(\varphi\vec{e}_z) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Finden Sie die zugehörigen Drehimpulsoperatoren (Matrizen), die wir im folgenden mit  $J_i^{(1)}$  bezeichnen werden, und verifizieren Sie deren Kommutator–relationen.

*Hinweis:* es genügt, kleine (infinitesimale) Werte von  $\varphi$  zu betrachten, d.h.  $R^{(1)}(\vec{\varphi})$  in eine Taylorreihe bis zur ersten Ordnung zu entwickeln.

Überprüfen Sie  $J^{(1)2} = j(j+1)$  mit  $j = 1$  (deshalb der superscript (1)). Finden Sie die Eigenvektoren  $|1, m\rangle \in \mathbb{C}^3$  und Eigenwerte  $m$  von  $J_z^{(1)}$ . Überprüfen Sie auch  $J_{\pm}^{(1)}|1, m\rangle \cong |1, m \pm 1\rangle$ , wobei  $J_{\pm}^{(1)} = J_x^{(1)} \pm iJ_y^{(1)}$  die “Auf–und Absteigeoperatoren” sind.

b) Zeigen Sie, daß

$$R^{(1)}(\vec{\varphi}) \cdot \vec{v} = \vec{v} - \vec{\varphi} \times \vec{v} + o(\varphi)^2 \quad (1)$$

für  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  gilt (So sieht man, daß die  $R^{(1)}(\vec{\varphi})$  tatsächlich Rotationsoperatoren um die Achse  $\varphi$  sind).

b) *Rotation eines Spinors* (“Spin 1/2”)

Die Drehimpulsoperatoren für einen Spinor  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  sind gegeben durch  $J^{(1/2)}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ , wobei

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizen sind; die zugehörigen Rotationsoperatoren bezeichnen wir mit  $R^{(1/2)}(\vec{\varphi})$ . Zeigen Sie, daß  $(\vec{J}^{(1/2)})^2 = j(j+1)$  mit  $j = 1/2$ .

Finden Sie explizit die entsprechenden Rotationsoperatoren  $R^{(1/2)}(\varphi \vec{e}_x)$ ,  $R^{(1/2)}(\varphi \vec{e}_y)$  und  $R^{(1/2)}(\varphi \vec{e}_z)$ . Betrachten Sie insbesondere Rotationen um  $2\pi$  und  $4\pi$ !