MODELL für logistisches Wachstum

L01

Anm.: Details zur Herleitung nachstehend angeführter Gleichungen finden sich als Stoffvertiefung unter 'VL0'.

(1) Funktionsgleichung:
(in Abhängigkeit von y_∞ und y_ϕ)

(Anm. die Funktionsgleichung entspricht der 'cumulative density function')

$$f_s(t) \stackrel{1}{=} \boxed{y(t) = \frac{y_\infty}{1 + \left(\frac{y_\infty}{y_\phi} - 1\right) \cdot e^{-\alpha \cdot t}}}$$

(Sättigungsfunktion)

$f_s(t)$ ... Sättigungsfunktion

es sind:
- y_∞ --- 'Carrying Capacity', Grenzwert
- t --- Zeit
- y_ϕ --- Ausgangswert, Seed-Wert
- α --- Wachstumskoeffizient, 'Growth coefficient'
- $y(t)$ --- Zustand d. Systemelementes

(2) Mittelzeit, t_m:

$$\boxed{t_m = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln\left(\frac{y_\infty}{y_\phi} - 1\right)}$$

(3) Funktionsgleichung
(bezogen auf die Mittelzeit)

$$f_s(t) \stackrel{1}{=} \boxed{y(t) = \frac{y_\infty}{1 + e^{-\alpha(t - t_m)}}}$$

(Sättigungsfunktion)

$f_s(t)$ ... Sättigungsfunktion

4

Die logistische Funktion – abgeleitet aus dem 'confined exponential model'

(a) Wenn man davon ausgeht, daß der Kehrwert der Zustandsvariable $Y(t)$ dem Modell zugrunde gelegt wird, so ergibt sich folgende Gleichung d. 'confined exp. model'

$$\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_\infty} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_\infty}\right) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$: 'confined exp. function'

(b) Es läßt sich umformen

$$① \quad \frac{1}{y(t)} = \frac{1 + \left(\frac{y_\infty}{y_0} - 1\right) \cdot e^{-\alpha t}}{y_\infty}$$

und

$$② \quad \boxed{y(t) = \frac{y_\infty}{1 + \left(\frac{y_\infty}{y_0} - 1\right) \cdot e^{-\alpha t}}}$$: logistische Funktion

5

Die logistische Abklingfunktion läßt sich sehr einfach darstellen:

$$\boxed{f_a(t) = y_\infty - y(t) = y_\infty - f_s(t)}$$

6

Erste Ableitung d. logistischen Funktion:

WACHSTUM – GESCHWINDIGKEIT:

Anm. die erste Ableitung entspricht der 'probability density function'

a) absolute Rate:

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{y_\infty \cdot \alpha \cdot \left(\frac{y_\infty}{y_0} - 1\right) \cdot e^{-\alpha t}}{\left[1 + \left(\frac{y_\infty}{y_0} - 1\right) \cdot e^{-\alpha t}\right]^{+2}} = \boxed{\frac{y(t)}{y_\infty} \cdot \alpha \cdot \left(y_\infty - y(t)\right)} =$$

$$= \boxed{y(t) \cdot \alpha \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{y_\infty}\right)}$$

Wenn man das Symbol β mit $\beta = \frac{\alpha}{y_\infty}$ einführt, läßt sich die Ratengleichung auch darstellen als:

$$\boxed{y'(t) = \alpha \cdot y(t) - \beta \cdot y^2(t)}$$

b) relative Rate:

$$\frac{1}{y(t)} \cdot y'(t) = \alpha \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{y_\infty}\right) = \frac{\alpha}{y_\infty}\left(y_\infty - y(t)\right) = \boxed{\beta\left(y_\infty - y(t)\right)} =$$

$$= \boxed{\alpha - \beta \cdot y(t)}$$

(7) Zweite Ableitung d. logistischen Funktion: (L04)

WACHSTUMS-BESCHEUNIGUNG

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{y'(t) \cdot \alpha}{y_\infty} \cdot \left(y_\infty - 2 \cdot y(t)\right) = y'(t) \cdot \beta \left(y_\infty - 2 \cdot y(t)\right)$$

Anm.: Der Wendepunkt der Funktion wird zur Mittelzeit erreicht.

(8) Beispiele für Verwendung d. logistischen Funktion zur Wachstumsmodellierung in der Praxis:

(A) Substitutionsvorgänge in der Technik, Ablöse einer alten durch eine neue Methode (Innovationsprozess):

a) Segelschiffe → Dampfschiffe

b) Dampfschiffe → Dieselmotorschiffe

c) Propellerflugzeuge → Düsenjets

d) mechanische Schreibmaschine → digitale Schreibwerkzeuge

(B) Ablöse ursprünglich vorkommender Arten durch Neobiota

a) Beutelwolf – plazentale Carnivoren in Australien

b) altweltliches Eichhörnchen durch neuweltliches Eichhörnchen

(C) Populationswachstum von Erstbesiedelung beginnend (y_0)

(D) z.B. Pflanzenwachstum nach Einsetzen d. Samen im Boden (y_0)

9

Wachstumsfilter:

L05

Mit Ausgang von 'Confined exponential model' und Umkehrfunktion läßt sich darstellen:

(1) $$\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_\infty} - \left(\frac{1}{y_\infty} - \frac{1}{y_0}\right) \cdot e^{-\alpha t}$$

$\rightarrow$ (2) $$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_\infty} - \left(\frac{1}{y_\infty} - \frac{1}{y_0}\right) \cdot e^{-\alpha t}$$

und (3) $$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_\infty} = -\left(\frac{1}{y_\infty} - \frac{1}{y_0}\right) \cdot e^{-\alpha t}$$

(4) $$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_\infty} - \left(\frac{1}{y_\infty} - \frac{1}{y_0}\right) \cdot e^{-\alpha (t + \Delta t)}$$

(5) $$= \frac{1}{y_\infty} + \left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_\infty}\right) \cdot e^{-\alpha \cdot \Delta t}$$

somit:

(6) $$\boxed{y_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{y_\infty} + \left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_\infty}\right) \cdot e^{-\alpha \cdot \Delta t}} =$$

(7) $$= \boxed{\frac{y_\infty}{1 + \left(\frac{y_\infty}{y_n} - 1\right) \cdot e^{-\alpha \cdot \Delta t}}}$$

Iterationsfähige Gleichung

10

LOGIT-TRANSFORMATION

L06

Die logit-Transformation bezweckt eine LINEARISIERUNG der logistischen Funktion.
In der Praxis wird diese Transformation sehr häufig in der Pharmazie und Agrarwissenschaft verwendet.
In der Statistik bildet sie die Grundlage für die LOGISTISCHE REGRESSION, welche auch als eine Form der DISKRIMINANZANALYSE Anwendung findet.

(a) Die logit-Transformation geht von einer NORMIERTEN logistischen Funktion aus.

$$\Pi_i = \frac{y(t)}{y_\infty} = \frac{1}{1+e^{-\alpha(t-t_m)}} = \frac{e^{\alpha(t-t_m)}}{1+e^{\alpha(t-t_m)}}$$

normierte logistische Funktion
(normiert auf die 'Carrying Capacity')

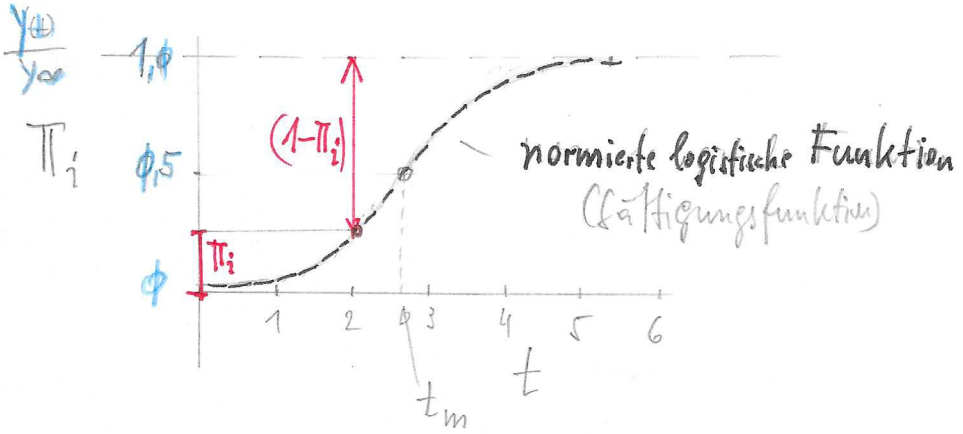
Π_i ... Wahrscheinlichkeit dafür, daß eines von zwei Ereignissen eintritt

$(1-\Pi_i)$ ... Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei Ereignissen das eine Ereignis nicht eintritt

z.B. Π_i ... Wahrscheinlichkeit dafür, daß Insekten (Puppen) larven eines Gelages geschlüpft sind und eine Metamorphose zu den Imagines durchgemacht haben (z.B. Fliegenpuppen → Fliegenimagines)

$(1-\Pi_i)$ ... Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Imagines noch nicht vorliegen

Diagramm, Schema:



Anm.: Es läßt sich im Sinn d. Systemanalyse auch Π_i als Istzustand und $(1-\Pi_i)$ als Sollzustand darstellen.

Zur Erklärung im vorigen Beispiel: in Abhängigkeit von der Zeit t findet die Metamorphose der Insekten statt. Erst nach einer bestimmten Zeit t_i sind 100% der Individuen verwandelt.

Der Mittelzeit t_m kommt für die Praxis eine besondere Bedeutung zu, da man für Experimentalreihen leicht angeben kann, wie lange es dauert, daß 50% der Individuen verwandelt sind

– Anmerkung: Anstelle der Zeit t als bedingende Variable d. Verwandlung (Metamorphose) kann auch der Zusammenhang mit anderen Variablen wie z.B. Temperatur, Luftfeuchte etc. betrachtet werden.

(b) Zur Angleichung an die Regressionsstatistik läßt sich für die LINEARISIERUNG nachstehende Symbolik einführen:

$$\boxed{\underbrace{dt}_{\beta_1 t_i} - \underbrace{dt_m}_{\beta_0}}$$

und somit

$$\boxed{\Pi_i = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 \cdot t_i)}}{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 \cdot t_i)}}}$$

LO 8

(c) Ferner gilt:

$$\boxed{\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = e^{(\beta_0 + \beta_1 \cdot t_i)}}$$

"odds ratio" (= Wahrscheinlichkeit dass ein Ereignis eintritt zu d. W. dass das Ereignis nicht eintritt)

(d) Folglich gilt:

$$\boxed{\underbrace{\ln\left[\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right]}_{\text{logit}} = \beta_0 + \beta_1 \cdot t_i}$$

LINEARISIERUNG

die Überprüfung dazu:

(1) $$\frac{1-\pi_i}{\pi_i} = \frac{1}{e^{(\beta_0 + \beta_1 t_i)}}$$

(2) $$\frac{1-\pi_i}{\pi_i} = \frac{1}{\pi_i} - 1$$

(3) $$\frac{1}{\pi_i} = 1 + \frac{1}{e^{(\beta_0 + \beta_1 \cdot t_i)}}$$

(4) $$\frac{1}{\pi_i} = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 \cdot t_i)} + 1}{e^{(\beta_0 + \beta_1 t_i)}}$$

(5) $$\pi_i = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 \cdot t_i)}}{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 \cdot t_i)}}$$

was zu zeigen war: