E1 1

Eigenwerte, Eigenvektoren
— BERECHNUNG —

Anhand eines einfachen Fallbeispiels soll der Rechnungsablauf zur Berechnung von EIGENWERTEN und EIGENVEKTOREN einer Quadratischen Matrix demonstriert werden.
Als Beispielmatrix soll eine Korrelationsmatrix mit 2 Dimensionen dienen.

a) Die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$$

b) CHARAKTERISTISCHES Polynom — EIGENWERTE

Ziel: Lösung d. charakteristischen Polynoms, um die Charakteristischen WURZELN (= EIGENWERTE) und die charakteristischen VEKTOREN (= EIGENVEKTOREN) herauszufinden

Einheitsmatrix

1 Nullsetzen der Determinante $\det|\lambda \cdot E - R| = 0$

besser als $\boxed{\det|\lambda \cdot I - R| = 0}$ 1a

Identitätsmatrix

1b $\det\begin{vmatrix} (\lambda-1) & 0{,}8 \\ 0{,}8 & (\lambda-1) \end{vmatrix} = 0$

[Anm.: Es ist besser, die Identitätsmatrix zu verwenden. Im Deutschen wird diese Matrix oft auch als Einheitsmatrix bezeichnet, das ist aber irreführend wie

$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

aus 1a zusammengesetzt:

2 $\det\left|\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$

③ $\det \begin{vmatrix} (\lambda-1) & 0{,}8 \\ 0{,}8 & (\lambda-1) \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1) - 0{,}8^2 =$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 0{,}8^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 0{,}36 = 0$

④ Auflösung der quadratischen Gleichung nach dem Schema: $\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

und somit $\lambda_{1,2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 0{,}36} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}36} =$

$= 1 \pm \sqrt{0{,}64} = 1 \pm 0{,}8 =$ $\lambda_1 = 1{,}8$, $\lambda_2 = 0{,}2$

⑤ Die $\boxed{\text{Eigenwerte}}$ lauten $\lambda_1 = 1{,}8$ und $\lambda_2 = 0{,}2$

Die Wurzeln der quadr. Gleichung sind

$(\lambda - 1{,}8)(\lambda - 0{,}2) = 0$

oder $(\lambda - 1{,}8)(\lambda - 0{,}2) = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda + 0{,}36 = 0$

⑥ Die Eigenwerte können auch als NULLSTELLEN des Polynoms aufgefaßt werden.

E/2

c) CHARAKTERISTISCHES POLYNOM – EIGENVEKTOREN

Als EIGENVEKTOREN sollen gelten

1 e_1 und e_2 mit $e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

bzw. die normierten Eigenvektoren

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|e_1|} \\ \frac{y_1}{|e_1|} \end{pmatrix} \text{ und } U_2 = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{|e_2|} \\ \frac{y_2}{|e_2|} \end{pmatrix}$$

Es soll ferner gelten:

2 $$(R - \lambda_1 \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \quad \text{für den 1. Eigenvektor}$$

und $$(R - \lambda_2 \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \quad \text{für den 2. Eigenvektor}$$

Somit gilt zunächst für den 1. Eigenvektor

3 3a $$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix} - 1{,}8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi$$

3B $$\left[\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}8 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi$$

Gleichungs-System 3c
$$\begin{cases} -0{,}8 \cdot x + 0{,}8 y = 0 \\ 0{,}8 \cdot x - 0{,}8 \cdot y = 0 \end{cases}$$

4 Wenn man nun willkürlich für $x = 1$ wählt,
4a ergibt sich

4b $-0{,}8 + 0{,}8 \cdot y = 0$

4c $+0{,}8 \cdot y = 0{,}8$

4d $y = 1$

und somit der 1. Eigenvektor mit den Komponenten

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

5 Normierung d. Eigenvektors auf Betrag '1'

$$|e_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

und somit $\boxed{u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$

Für den 2. Eigenvektor gilt:

6

6a $$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix} - 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

6b $$\left[\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Gleichungssystem

6c $$\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}8y = 0 \\ 0{,}8 \cdot x + 0{,}8y = 0 \end{cases}$$

E_{1_3}

7 Wenn man nun wieder willkürlich für $x = 1$ wählt,

7a ergibt sich

7b $\quad 0{,}8x + 0{,}8y = 0$

7c $\quad 0{,}8y = -0{,}8$

7d $\quad y = -1$

und somit der 2. Eigenvektor mit den Komponenten

$$\boxed{e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Es ist anzumerken, daß die beiden Eigenvektoren zueinander ORTHOGONAL sind. Als Kontrolle kann das Skalare Produkt z.B. beider herhalten:

$$e_1^T \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

8 Die Normierung d. Eigenvektors auf Betrag '1'

$$|e_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

und somit $\boxed{u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$

d) Für die spektrale Zerlegung gilt:

$$\boxed{R = U \cdot \Lambda \cdot U^T} \quad \text{und} \quad \boxed{R \cdot U = U \cdot \Lambda}$$

1 Λ ... Eigenwertmatrix $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 = 1{,}8 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = 0{,}2 \end{pmatrix}$

2 U ... Matrix d. normierten Eigenvektoren

$$U = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|e_1|} & \frac{x_2}{|e_2|} \\ \frac{y_1}{|e_1|} & \frac{y_2}{|e_2|} \end{pmatrix}$$

Somit gilt für das Beispiel:

3 $$R = \underbrace{U}_{U} \cdot \underbrace{\Lambda}_{\Lambda} \cdot \underbrace{U^T}_{U^T}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}2 \\ 1{,}8 & -0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1{,}8 + 0{,}2) & (1{,}8 - 0{,}2) \\ (1{,}8 - 0{,}2) & (1{,}8 + 0{,}2) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$