Hans HUMENBERGER, Dortmund

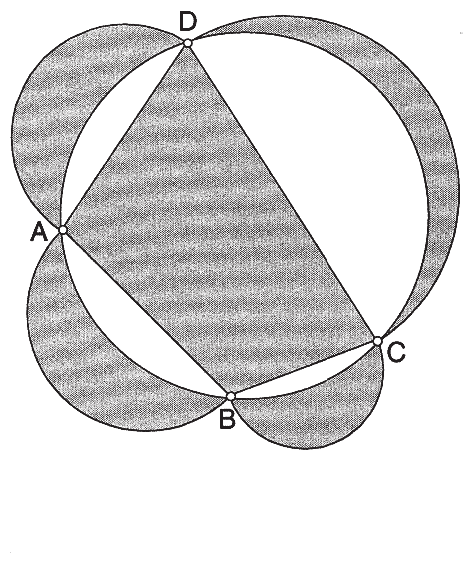
Eine elementargeometrische Miniatur: Hippokrates-Möndchen nicht nur in rechtwinkligen Dreiecken[1]

1 Die Möndchen des Hippokrates in Dreiecken

In den meisten Lehrgängen zur Elementargeometrie werden im Kapitel „Lehrsatz von Pythagoras“ die bekannten *Möndchen des Hippokrates* erwähnt: Das rechtwinklige Dreieck ist genau so groß (Flächeninhalt!) wie die beiden Möndchen über den Katheten zusammen.
Dadurch inspiriert könnte man nun zunächst die Frage stellen, ob es auch *spitzwinklige* Dreiecke gibt, deren Flächeninhalt genau der Flächeninhaltsumme ihrer jeweiligen **drei** Möndchen (zwischen den Seiten-Halbkreisen nach außen und dem Umkreis) entspricht. Dass dies eine Erweiterung der Hippokrates-Figur darstellt, sieht man sofort, wenn man zu dem rechtwinkligen Dreieck den vollen Umkreis zeichnet: Der Umkreismittelpunkt liegt dann auf der Hypotenuse, so dass das dritte Möndchen zu einer flächeninhaltslosen Halbkreislinie entartet. Es ist nicht schwierig zu begründen, dass es solche **nicht** gibt (vgl. [1]).

2 Sehnenvierecke und Möndchen

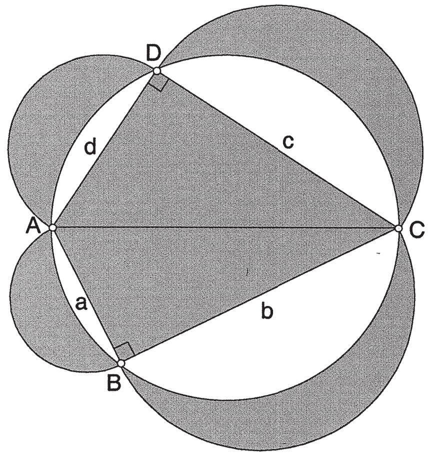
Wie sieht die Situation bei Vierecken mit Umkreis (also bei *Sehnenvierecken*) aus? Gibt es Sehnenvierecke, deren Flächeninhalt genau der Flächeninhaltsumme ihrer jeweiligen **vier** Möndchen (zwischen den *Seiten-Halbkreisen nach außen* und dem *Umkreis*) entspricht? Wir beschränken uns auf Fälle, bei denen der Umkreis immer die innere Möndchenbegrenzung darstellt, die innere weiße Fläche also wirklich kreisförmig ist (d. h. der Umkreismittelpunkt liegt nicht außerhalb des Sehnenvierecks).



Solche Sehnenvierecke wollen wir **Möndchenvierecke** nennen.

[1] Eine ausgearbeitete Fassung erscheint in MNU **57** (2004) (gemeinsam mit B. Schuppar).

Eine Antwort auf die obige Frage nach der Existenz solcher Vierecke fällt leicht: klarer Weise gibt es solche, z. B. sicher dann, wenn (mindestens) eine Diagonale Durchmesser ist, so dass eigentlich nur die „doppelte Hippokrates-Situation" vorliegt (zwei rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamem Umkreis).
Solche Sehnenvierecke nennen wir Möndchenvierecke vom **TYP 1**.



Bevor wir uns der Frage widmen, ob es außer TYP 1 noch andere Möndchenvierecke gibt, erarbeiten wir eine notwendige und hinreichende Bedingung an ein Sehnenviereck, so dass es sich um ein Möndchenviereck handelt (**Möndchenbedingung für Sehnenvierecke**):

Wir erhalten bei einem Möndchenviereck (M_i bezeichne das Möndchen i):

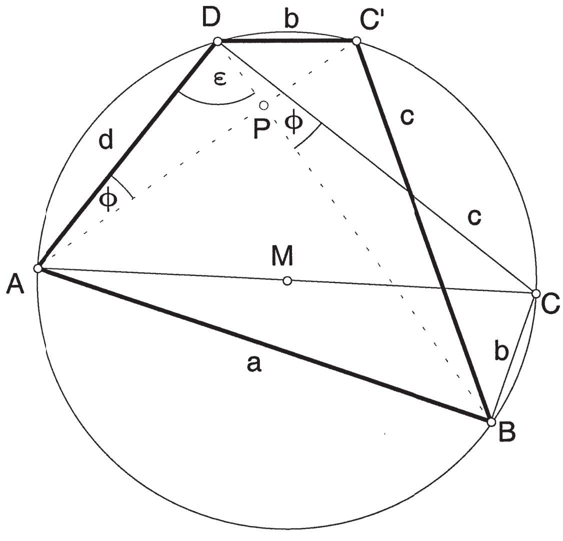
$$F(M_1+M_2+M_3+M_4)=F(\text{Viereck})+\frac{a^2\pi}{8}+\frac{b^2\pi}{8}+\frac{c^2\pi}{8}+\frac{d^2\pi}{8}-\frac{D^2\pi}{4},$$

so dass $F(M_1+M_2+M_3+M_4)=F(\text{Viereck})$ genau bei

$$\frac{a^2\pi}{8}+\frac{b^2\pi}{8}+\frac{c^2\pi}{8}+\frac{d^2\pi}{8}=\frac{D^2\pi}{4}$$ bzw. $\boxed{a^2+b^2+c^2+d^2=2D^2}$ gilt.

Diese notwendige und hinreichende Bedingung ist die **Möndchenbedingung für Sehnenvierecke**. (Bei TYP 1 ist sie wegen $a^2+b^2=D^2=c^2+d^2$ erfüllt: 2 rechtwinklige Dreiecke, Hypotenuse D !)

Ausgehend von TYP 1 (*ABCD*) und von der Möndchenbedingung ist auch sofort klar, dass leicht ein weiterer Typ von Sehnenvierecken als Möndchenvierecke erkannt werden kann (*ABC'D*): In einem Möndchenviereck mit *AC* als Durchmesser kann man ja z. B. die Seiten *b* und *c* vertauschen, so dass *A, B, D, a, d* gleich bleiben und *C* zu *C'* wird. Damit ist die Möndchenbedingung zwar weiterhin erfüllt (es wurden ja nicht die



Seitenlängen, sondern nur deren Reihenfolge verändert!), aber AC' ist für $b \neq c$ kein Durchmesser mehr, so dass dabei sicher nicht TYP 1 vorliegt, sondern ein neuer **„TYP 2“**.

Was zeichnet diesen neuen **TYP 2** eines Möndchenvierecks aus?
1) Durch Vertauschen zweier Seiten (z. B. b und c) werden aus Paaren von „Nachbarseiten“ (a und b; c und d) mit jeweiliger Quadratsumme D^2 zwei Paare von *Gegenseiten* mit derselben Eigenschaft!
2) Wie man schon in obiger Figur sieht, scheinen die beiden Diagonalen (gestrichelt) AC' und BD senkrecht aufeinander zu stehen.

Diese **Vermutung** lässt sich auch leicht (in beide Richtungen) beweisen: Gegeben seien zwei Sehnenvierecke $ABCD$ und $ABC'D$ mit vertauschten Seiten b bzw. c. Dann gilt: AC ist Durchmesser $\Leftrightarrow$ $AC' \perp BD$.

Beweis: $\sphericalangle DAC' = \sphericalangle BDC =: \Phi$ (Randwinkel über der Sehnenlänge b)
AC ist Durchmesser $\Leftrightarrow$ D liegt am Halbkreis über AC $\Leftrightarrow$
$\Phi + \varepsilon = 90°$ $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle APD = 90°$ $\Leftrightarrow$ $AC' \perp BD$.

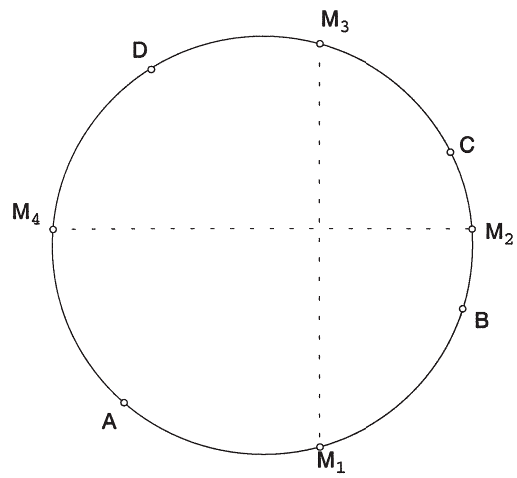
Wir haben bis jetzt also zwei Typen von Möndchenvierecken (Sehnenvierecke mit der Möndcheneigenschaft) gefunden:

- TYP 1: Sehnenviereck: „mindestens eine Diagonale ist Durchmesser“;
  gleichbedeutend: $a^2 + b^2 = D^2 = c^2 + d^2$ oder $a^2 + d^2 = D^2 = b^2 + c^2$.
  (Quadratsumme von *Nachbar*seiten = D^2)
- TYP 2: TYP 1 mit zwei vertauschten Seiten;
  gleichbedeutend: $a^2 + c^2 = D^2 = b^2 + d^2$
  (Quadratsumme von *Gegen*seiten = D^2)
  gleichbedeutend: Sehnenviereck mit senkrechten Diagonalen.

Bemerkung: In beiden oben fett eingezeichneten **TYP 2**-Vierecken sind die Seiten (um die Vertauschung ins Auge springen zu lassen) „der Reihe nach“ mit a, c, b, d beschriftet. Bezeichnet man sie wieder – wie gewohnt – „der Reihe nach“ mit a, b, c, d, so gilt klarerweise für die jeweilige Summe der Quadrate von **Gegenseiten** eines TYP 2-Vierecks: $a^2 + c^2 = D^2 = b^2 + d^2$. (Die beiden Typen schließen einander nicht aus.) Nun stellt sich natürlich die Frage, ob es außer TYP 1 bzw. TYP 2 noch weitere Möndchenvierecke gibt? Auf der Suche nach solchen wird man bald vermuten, dass es KEINE weiteren mehr gibt.

Satz: Sei $ABCD$ ein Möndchenviereck, d. h. ein Sehnenviereck mit der Möndcheneigenschaft $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2D^2$.
(D := Durchmesser des Umkreises)
Behauptung: Dann ist $ABCD$ vom TYP 1 oder vom TYP 2.
Für den Beweis verweisen wir wieder auf [1].

Aufgabe: Auf einem Kreis wähle man 4 beliebige Punkte A, B, C, D (Sehnenviereck). Dadurch wird die Kreislinie in 4 Bogenstücke geteilt, deren Mittelpunkte mit M_1, M_2, M_3, M_4 bezeichnet werden ($M_1M_2M_3M_4$ könnte man als „Bogenmittenviereck" bezeichnen). Nun werden die Verbindungssehnen gegenüber liegender Bogenmitten M_1M_3 und M_2M_4 gezeichnet.



Zeichnen Sie verschiedene Konstellationen; was fällt auf? Versuchen Sie diese Vermutung zu begründen.

Lösungshinweise: Es gilt in jedem Fall $M_1M_3 \perp M_2M_4$.
D. h. jedes „Bogenmittenviereck" $M_1M_2M_3M_4$ ist ein Möndchenviereck vom TYP 2! Umgekehrt gilt auch: Jedes Sehnenviereck mit aufeinander senkrecht stehenden Diagonalen (TYP 2) ist ein „Bogenmittenviereck". Überlegen Sie, wie man ausgehend von einem Sehnenviereck $M_1M_2M_3M_4$ mit aufeinander senkrechten Diagonalen $M_1M_3 \perp M_2M_4$ die zugehörigen Punkte A, B, C, D erhalten kann, deren Bogenmittenviereck $M_1M_2M_3M_4$ ist (man kann dazu sogar den ersten Punkt „im Wesentlichen" frei wählen; inwiefern, warum?).

Literatur:

[1] Humenberger, H. u. B. Schuppar (2004): Die Möndchen des Hippokrates – nicht nur in rechtwinkligen Dreiecken. Erscheint in MNU **57**.

Anschrift des Verfassers: Hans Humenberger, IEEM, FB Mathematik, Universität Dortmund, D – 44 221 Dortmund.

Mail: Hans.Humenberger@mathematik.uni-dortmund.de