

Die extremale Kolbengeschwindigkeit bei einem Kurbelgetriebe

Verständnisförderung durch Anschaulichkeit und Strenge

Hans Humenberger

1 Eine Aufgabe bei „geraden Schubkurbeln“

Es gilt hier zunächst einmal zu erklären, was eine *gerade Schubkurbel* überhaupt ist. Die „Umkehrung“ einer Schubkurbel ist vielen wahrscheinlich geläufiger, nämlich durch den bekannten Mechanismus, mit dem z. B. bei Autos die geradlinige Auf-und-ab-Bewegung der Kolben eines Verbrennungsmotors in eine Rotationsbewegung umgewandelt wird („Hubkolbenmotor“). Bei einer Schubkurbel passiert nun genau das Umgekehrte: die Rotationsbewegung der Kurbel bzw. des *Kurbelzapfens* (dies ist die Gelenksverbindung von Kurbel und Schubstange) wird durch den gleichen Mechanismus in eine geradlinige Auf-und-ab- bzw. Hin-und-her-Bewegung eines „Kolbens“ (auch *Kreuzkopfzapfen* oder *Kreuzkopf* genannt) umgewandelt (wegen der geradlinigen Bewegung des Kolbens (Kreuzkopfes) spricht man auch von einer *geraden Schubkurbel* bzw. von einer *Geradschubkurbel*). Ein Schubkurbelgetriebe besteht also aus einer voll umlaufähigen *Kurbel* (Radius R), die über den *Kurbelzapfen* und durch eine so genannte *Pleuel- oder Schubstange* (Länge L) mit dem *Kolben* oder *Kreuzkopf* gelenkig verbunden ist. Die Schubstange überträgt die Rotationsbewegung der Kurbel bzw. des Kurbelzapfens auf den geradlinig sich bewegenden Kreuzkopf bzw. Kolben (seine Position wird durch die momentane Hubhöhe H beschrieben). Man unterscheidet *zentrische* (s. Fig. 1) und *geschränkte* Geradschubkurbeln (Fig. 2).

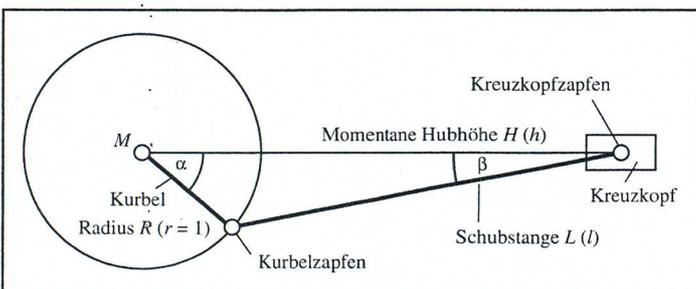


Fig. 1: Zentrische Schubkurbel

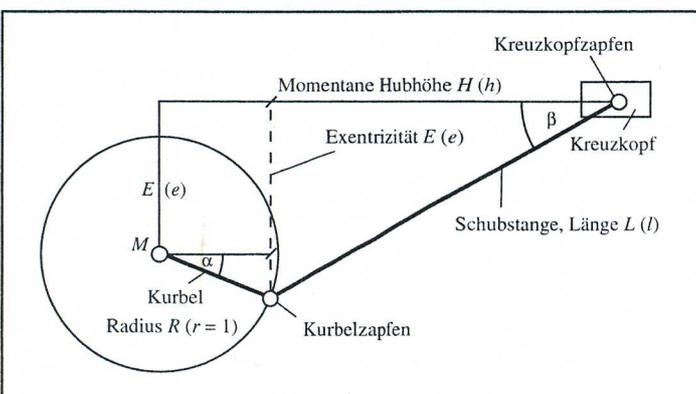


Fig. 2: Geschränkte Schubkurbel

Bei der zentrischen Geradschubkurbel geht die Bahngerade des Kolbens durch den Kurbelmittelpunkt, während bei der geschränkten Geradschubkurbel dies nicht der Fall ist; die Kurbel ist

hier in Bezug auf die Bahngerade des Kolbens etwas versetzt, wobei der Abstand des Kurbelmittelpunktes von der Bahngeraden als *Exzentrizität* (E) bezeichnet wird (s. Fig. 2). Die in Fig. 1 in Klammern gesetzten Bezeichnungen mit Kleinbuchstaben ($r = 1$ statt R , h statt H , l statt L) stehen für den Fall, dass der Radius der Kurbel mit 1 festgesetzt ist, m. a. W. dass Längen in „Radien R “ gemessen werden (s. Abschnitt 3).

Bemerkung: Eine gängige Anwendung des Schubkurbelgetriebes stellen z. B. die in der Holzverarbeitenden Industrie (insbesondere bei Sägewerken) weit verbreiteten *Gattersägen* dar, bei denen die gleichmäßige Rotation eines Elektromotors (früher eines Wasserrades) in eine geradlinige Sägebewegung umgewandelt wird; diese Gattersägen dienen vor allem zur Bearbeitung von noch rohen Baumstämmen.

Problemstellung: In den Fig. 1 und 2 sind Geradschubkurbeln schematisch dargestellt. Die Größen L , R und E sind dabei konstant, während α , β und H sich verändern, also von der Zeit abhängige Größen sind. Wir wollen nun jenen Winkel α bestimmen, für den die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes (Kolbens) („Schubgeschwindigkeit“) maximal ist¹⁾, wenn wir eine gleichmäßige Rotationsbewegung der Kurbel bzw. des Kurbelzapfens voraussetzen.

2 Graphische bzw. kinematische Überlegungen

2.1. Heuristische Vorüberlegungen

Die Ausführungen dieses Abschnittes sollen u. a. propädeutischen Charakter haben. Sie sind zwar vielleicht etwas ungewohnt und scheinen (dadurch?) manchmal bzw. manchem kompliziert zu sein, aber sie können helfen, etwas Licht ins Dunkel zu bringen, tieferes Verständnis bzw. tiefere Einsichten in die Situation zu schaffen, das Anschauungs- und das Problemlösevermögen zu verbessern! Dies insbesondere *bevor* mit Methoden der Differentialrechnung dieselben Erkenntnisse gewonnen werden. Daneben kann dieser Abschnitt als ein Beitrag zur Darstellung der Vielfalt der Möglichkeiten zur Extremwertbestimmung (Optimierung) gesehen werden. Die spezielle Situation, bei der der Kolben die größte Geschwindigkeit hat, soll dadurch besser verständlich werden: Wie kann diese spezielle Stellung *inhaltlich* beschrieben werden? Was ist bei dieser Lage geometrisch der Fall?

Beginnen wir mit einigen *anschaulichen infinitesimalen Vorüberlegungen* (von A. Kirsch): Als erstes leuchtet wohl ein, dass in der Position $\alpha = 90^\circ$ der Kreuzkopf (Kolben) B die gleiche Ge-

¹⁾ Bei einer Gattersäge ist es z. B. wichtig, zu wissen, wann das Sägeblatt welche Geschwindigkeit hat, um den Holzvorschub zur Säge steuern zu können – bei großer Sägeschwindigkeit kann der Holzvorschub natürlich stärker sein.

schwindigkeit hat wie der Kurbelzapfen A, dass also in diesem Augenblick (da diese Geschwindigkeit das Produkt aus Radius und Winkelgeschwindigkeit ist) $v_B = v_A = R \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ gilt²⁾. In diesem Moment bewegen sich ja A und B in der gleichen Richtung, und da die Schubstange konstante Länge hat, sind die zu einer kleinen Winkeländerung gehörenden Wege von A und B nicht nur gleichgerichtet, sondern auch gleichlang; siehe Fig. 3a, in der die Situation natürlich nur vergrößert wiedergegeben werden kann. Die Schubstange beschreibt in diesem Augenblick eine reine Translation.

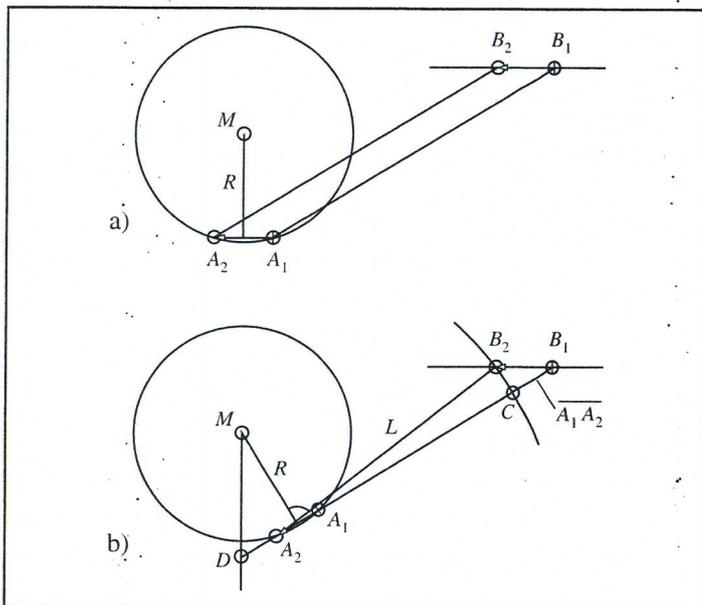


Fig. 3: Veranschaulichungen von
 a) Translation bei $\alpha = 90^\circ$ b) $\overline{B_1B_2} > \overline{A_1A_2}$

Gelegentlich wird vielleicht von Schülern vermutet, diese zu $\alpha = 90^\circ$ gehörende Kolbengeschwindigkeit sei die gesuchte maximale. Das erweist sich bei genauerem Hinsehen jedoch als falsch; es gibt also (erstaunlicherweise?) durchaus Winkel, bei denen die Geschwindigkeit des Kolbens größer ist als die des antreibenden Kreuzkopfes. Um dies ebenfalls anschaulich einzusehen, betrachten wir die Position, in welcher *Kurbelradius* und *Schubstange* aufeinander normal stehen, und nehmen auch hierfür eine kleine Änderung des Winkels α vor (Fig. 3b). Dann leuchtet ein: Wird die Bewegung der Schubstange aus der Lage A_1B_1 in die Lage A_2B_2 zerlegt in eine kleine Verschiebung A_1A_2 in Richtung der Schubstange [so dass B_1 zunächst in die Lage C übergeht: $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2C} = L$, $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1C}$] und anschließend eine kleine Drehung um A_2 (bis das andere Ende B der Schubstange wieder auf der Kolbenbahn (B_2) zu liegen kommt), dann folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung im Dreieck $B_1B_2A_2$ (gemeint ist $L + \overline{B_1B_2} > L + \overline{A_1A_2}$, dass die Strecke B_1B_2 jedenfalls länger ist als A_1A_2 und folglich die *Geschwindigkeit des Kolbens B größer ist als die des Kreuzkopfes A*.

Wieder liegt die Vermutung nahe, dass hiermit die maximale Kolbengeschwindigkeit gefunden ist. Auch das wird sich (erst recht erstaunlich!) als irrig erweisen. Zunächst lassen wir uns durch Fig.

3b zu einer zutreffenden **Vermutung** führen: Es sei D der Schnittpunkt der verlängerten Schubstange mit der *Querachse*, d. h. der Senkrechten zur Bahngeraden des Kolbens durch M. Dann gilt wegen der annähernden Ähnlichkeit des Dreiecks MAD mit dem Dreieck CB_1B_2 offenbar:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MD}}{R}, \quad \text{also} \quad v_B = \overline{MD} \cdot \frac{v_A}{R} = \overline{MD} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

Da wir eine gleichmäßige Rotation voraussetzen (d. h. $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const}$), besagt die Beziehung $v_B = \overline{MD} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$, dass (in dieser speziellen Situation: Kurbelradius \perp Schubstange) **die Streckenlänge \overline{MD} ein Maß für die zu α gehörende Kolbengeschwindigkeit v_B ist** (dies gilt auch bei $\alpha = 90^\circ$: dort ist $D = A$ und $v_B = v_A$ – siehe oben).

Es wird sich sogar zeigen, dass dies bei *beliebigem Winkel α* zutrifft, wobei die Tatsache $v_B = \overline{MD} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ sehr eindringlich zu veranschaulichen ist: Stellen wir uns vor, auf der Achse der Kurbel sei eine massive Scheibe als „Schwungrad“ angebracht (z. B. unmittelbar *hinters* der Kurbel, so dass man von vorne zuerst die Kurbel und unmittelbar dahinter die Scheibe sieht). Dann hat derjenige Punkt dieser Scheibe, der im jeweiligen Augenblick (beim jeweiligen Wert von α) gerade hinter dem Punkt D liegt, nach Größe und Richtung dieselbe Geschwindigkeit wie der Kolben!

Damit wäre dann die Position maximaler Kolbengeschwindigkeit durch die extremale Lage des Punktes D gekennzeichnet. Der korrekte Nachweis dessen erfordert allerdings eine präzise Beschreibung des momentanen Bewegungszustandes der Schubstange in beliebiger (allgemeiner) Lage. Dieser Aufgabe wenden wir uns nun zu.

2.2. Exakte kinematische Beschreibung

Der für die Klärung der anstehenden Fragen zentrale Begriff (aus der „Kinematik“) ist der *Momentanpol* einer Bewegung. Wenn ein Punkt A sich auf einer bestimmten Kurve K bewegt, so bewegt er sich zu jedem Zeitpunkt in Richtung der jeweiligen Tangente an die Kurve (der „Geschwindigkeitsvektor“ ist ein Tangentialvektor). Dieselbe Tangente ergäbe sich, wenn sich der Punkt auf einem Kreis bewegte, der seinen Mittelpunkt irgendwo auf der Normalen zur Tangente durch A (auf der so genannten *Bahnnormalen*) hat. Daher entspricht jede Bewegung eines Punktes A (in jedem Augenblick) einer Drehung um einen Punkt auf der Bahnnormalen. Dieser Mittelpunkt der *Momentanrotation* heißt der *Momentanpol* der Bewegung. Dieser ist bei der Bewegung eines einzelnen Punktes nicht eindeutig festgelegt (jeder Punkt der Bahnnormalen kommt als Momentanpol in Frage). Kennt man hingegen die beiden momentanen Bewegungsrichtungen der Endpunkte einer Strecke AB mit konstanter Länge (z. B. ein starrer Stab), so lässt sich der Momentanpol P der Gesamtbewegung durch Schnitt der zu A bzw. B gehörigen Bahnnormalen (meist) *eindeutig* festlegen – s. Fig. 4a. Eine Ausnahme bildet nur die in Fig. 3a dargestellte Lage, in der die Schubstange eine momentane Translation ausführt.

Mehr als dieses Wissen ist zur graphischen Aufklärung der in Rede stehenden Situation nicht nötig. Sei also B der Kolben und A der Kurbelzapfen einer Schubkurbel – s. Fig. 4b. In Bezug auf folgende Überlegungen brauchen wir nicht zwischen zentrischen

²⁾ Die Beträge der Geschwindigkeiten $|\vec{v}_A|$ und $|\vec{v}_B|$ seien mit v_A und v_B bezeichnet.

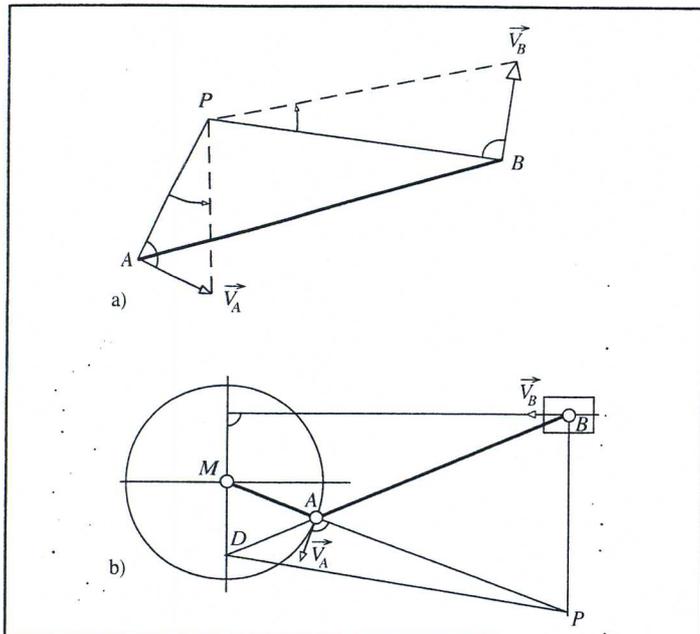


Fig. 4: Momentanpol P:

a) Bewegung einer Strecke b) Schubkurbel

und geschränkten Schubkurbeln zu unterscheiden. In jedem Moment der Bewegung der Schubstange wenden wir nun obige Überlegungen (Momentanpol) an: sie bewegt sich bei jeder Kurbelstellung genauso, als ob sie sich um den jeweiligen Momentanpol P drehte. Dies ist der Schnittpunkt der beiden Bahnnormalen von A (Normale zur Kreistangente in A) und von B (Normale zur Bahngeraden des Kolbens in B). Da bei einer **Drehung** die Geschwindigkeiten v_A und v_B der gedrehten Punkte A und B jeweils das Produkt aus **Winkelgeschwindigkeit** $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ und Radius sind und die Winkelgeschwindigkeit ja für beide Punkte gleich sein muss (dieselbe Momentanrotation!), so verhalten sich die Geschwindigkeiten v_A und v_B der Punkte A und B (Kurbelzapfen und Kolben) wie die beiden „Momentanradien“ bzw. „Polabstände“ \overline{PA} und \overline{PB} . Wir zeichnen nun die Senkrechte zur Bahngeraden des Kolbens durch den Kurbelmittelpunkt M ein („Querachse“) und verlängern die Schubstange bis zum Schnittpunkt D mit dieser. Dadurch erhalten wir zwei ähnliche Dreiecke (APB und AMD), und für die interessierenden Geschwindigkeiten v_A und v_B ergibt sich, wie erwartet, $v_B : v_A = \overline{PB} : \overline{PA} = \overline{MD} : \overline{MA}$ bzw.

$$(1) v_B : v_A = \overline{MD} : \overline{MA}.$$

Wir wissen, dass die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens v_A als konstant vorausgesetzt wurde (sie wird ja auch durch die konstante Streckenlänge \overline{MA} repräsentiert – Kurbelradius!), und entnehmen daher aus (1) folgenden

Satz 1: Die variierende Streckenlänge \overline{MD} ist ein Maß für die variable Kolben- bzw. Kreuzkopfgeschwindigkeit v_B .

Daraus erhalten wir als unmittelbares Korollar eine zusätzliche Charakterisierung der Situation größter Kolbengeschwindigkeit³⁾:

³⁾ Diese gilt für zentrische und geschränkte Schubkurbeln und ist für die graphische Ermittlung des fraglichen Punktes (auch in der Praxis) bedeutend.

Die Kolbengeschwindigkeit ist genau dann (dem Betrage nach) maximal, wenn die Streckenlänge \overline{MD} ein Maximum ist, d. h. wenn der Punkt D am „tiefsten“ liegt. D ist dabei der Schnittpunkt der Querachse mit der Schubstange(nverlängerung).

Nun wollen wir abschließend noch zu einer **weiteren graphischen Charakterisierung** der Situation kommen, die die von manchem vielleicht *a priori* getätigte Vermutung, dass in dieser speziellen Situation doch irgendwelche Strecken aufeinander normal stehen müssen, bekräftigt. Tatsächlich ist die Situation der optimalen Kolbengeschwindigkeit nämlich auch dadurch gekennzeichnet, dass der so genannte „**Polstrahl**“ (i. e. die Strecke PD) **normal auf die Schubstange(nverlängerung)** steht. Dies ist folgendermaßen einzusehen:

D ist jener Punkt der *Querachse*, durch den die Schubstange(nverlängerung) geht. Wir können uns D als einen Ring vorstellen, der die beiden als wirkliche Stangen gedachten Geraden (Schubstange und Querachse) lose umschließt, und durch welchen sich die verlängerte Schubstange bei ihrer Bewegung hindurchschiebt – vgl. Fig. 5. Während sie sich hindurchschiebt, wandert der Ring (Punkt) D natürlich auch auf der Querachse auf und ab.

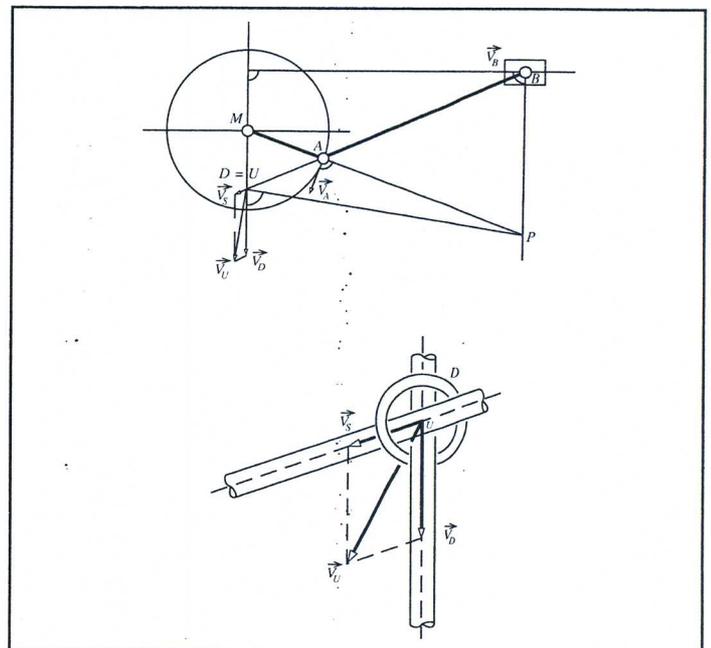


Fig. 5: D als Ring um verlängerte Schubstange und Querachse gedacht

Nun bezeichnen wir mit U denjenigen Punkt der *Schubstange* (bzw. deren Verlängerung), der im betrachteten Zeitpunkt sich in der Mitte des Ringes D befindet, also auch auf der Querachse liegt⁴⁾. Da U ein Punkt der (verlängerten) Schubstange ist, steht sein momentaner Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_U normal zum momentanen Polstrahl $PD = PU$ (s. Fig. 5), weil die Bewegung der Schub-

⁴⁾ Diese vielleicht etwas künstlich anmutende Unterscheidung zwischen D und U wird dadurch nötig, weil D immer auf der Querachse „bleiben soll“ (D sei zu jedem Zeitpunkt jener Punkt der Querachse, durch den die Schubstange(nverlängerung) geht), hingegen der Punkt U – als Punkt der Schubstange(nverlängerung) – nicht auf der Querachse, sondern eben auf der Schubstange bleibt, anders formuliert: der Schnittpunkt von Querachse und Schubstangenverlängerung wird zu jedem Zeitpunkt durch einen anderen Punkt D der Querachse bzw. Punkt U der Schubstange realisiert – und diese Tatsache wird durch die Vorstellung von D als Ring (nach G. Kirsch, 1890) plastisch unterstützt!

stange momentan einer Drehung um P entspricht (analog ist ja $PA \perp \vec{v}_A$ und $PB \perp \vec{v}_B$). Die Komponenten \vec{v}_D und \vec{v}_S sind dann offenbar die Geschwindigkeiten, mit welcher einerseits der Ring D entlang der Querachse gleitet, bzw. andererseits die Schubstange sich durch den Ring hindurchschiebt (die Indices D und S bei den Geschwindigkeiten sollen an „Ring D “ bzw. an „Schub“ erinnern).

Wir sind an jener Situation interessiert, bei der der Ring D seine tiefste Lage erreicht hat (dann ist ja \overline{MD} maximal), bei der also seine Momentangeschwindigkeit $\vec{v}_D = 0$ ist (bei $v_D > 0$ würde D sich ja noch weiter hinunter bewegen). $v_D = 0$ ist offenbar dann der Fall, wenn \vec{v}_U mit \vec{v}_S zusammenfällt, und für die Komponente der Ringbewegung entlang der Querachse (also \vec{v}_D) „nichts mehr übrigbleibt“, wenn also „die ganze Geschwindigkeit \vec{v}_U in eine Durchschubgeschwindigkeit \vec{v}_S umgesetzt wird“. Da aber \vec{v}_U immer normal auf den Polstrahl $PD = PU$ steht und \vec{v}_S immer in Richtung der Schubstange zeigt, kann diese optimale Situation eben auch dadurch charakterisiert werden, dass der Polstrahl PD normal auf die Schubstange(nverlängerung) steht. Wir haben so (mit *G. Kirsch* 1890) folgenden Satz kinematisch-geometrisch begründet (für zentrische und geschränkte Schubkurbeln):

Satz 2: Die Kolbengeschwindigkeit v_B ist genau dann maximal, wenn der Polstrahl PD normal auf die Schubstange(nverlängerung) steht.

3 Analytische Bestätigung der geometrisch gewonnenen Erkenntnisse bei zentrischen Schubkurbeln

Mit Differentialrechnung alleine (bloßes Umformen bzw. Vereinfachen der Ausdrücke, Lösen von Gleichungen) wird man wahrscheinlich gar nicht zu der oben gewonnen Erkenntnis (rechter Winkel zwischen Polstrahl und Schubstange) kommen. Für eine Begründung *a posteriori* ist allerdings Differentialrechnung sehr gut einsetzbar [unseres Wissens ist diese rechnerische Bestätigung selbst unter Fachleuten und in der einschlägigen Literatur noch wenig bekannt]. Obwohl man durch die Erkenntnis des erwähnten rechten Winkels der *Bestimmung* der maximalen Kolbengeschwindigkeit bzw. des zugehörigen Winkels α keinen Schritt näher kommt, scheint uns diese Einsicht trotzdem wichtig zu sein für das wirkliche Verständnis dieser „optimalen Situation“.

Zwei Vereinfachungen:

- Da die Rotationsbewegung eine gleichmäßige sein soll (gleicher Drehwinkel in gleichen Zeitabständen), kann der Drehwinkel α selbst als ein Maß für die Zeit betrachtet werden. D. h. die erste Ableitung $\frac{dH}{d\alpha}$ kann als ein Maß für die Geschwindigkeit v des Kolbens (Schubgeschwindigkeit; ab nun schreiben wir nur mehr v statt v_B) und die zweite Ableitung $\frac{d^2H}{d\alpha^2}$ als ein Maß für die Schubbeschleunigung gelten⁵⁾. Man erspart sich dadurch die Betrachtung der jeweiligen „inneren Ableitungen“ $\alpha = \text{const.}$

⁵⁾ Der Wert von α kann auch direkt als Zeit interpretiert werden, wenn die Winkelgeschwindigkeit 1 s^{-1} beträgt (ca. $57,3^\circ$ pro Sekunde).

- Die Maßzahlen von R , L und H hängen natürlich von den gewählten Einheiten ab; wir wählen R als Einheit (wir messen „in Radien R “), so dass wir $r = \frac{R}{R} = 1$, $l = \frac{L}{R}$ und $h = \frac{H}{R}$ erhalten. Die Bezeichnungen mit Kleinbuchstaben sind schon in Fig. 1 in Klammer angegeben. Weiters soll dies auch für alle anderen Längenmaße gelten, insbesondere für die in Fig. 6 mit p bezeichnete Strecke und im geschränkten Fall für die Exzentrizität, also $p = \frac{E}{R}$ und $e = \frac{E}{R}$.

Wir stellen zunächst einige Vorüberlegungen an, insbesondere für den Fall einer *zentrischen Schubkurbel*. Die Werte der momentanen Hubhöhe H werden sich dann offenbar zwischen $H_{\min} = L - R$ bei $\alpha = \pi + 2k\pi$ und $H_{\max} = L + R$ bei $\alpha = 2k\pi$ bewegen (s. Fig. 1). Das *Geschwindigkeitsmaximum* und das *Geschwindigkeitsminimum* des Kolbens liegen beim zentrischen Fall erstens symmetrisch bezüglich des Winkels α und sind zweitens betraglich gleich groß mit entgegengesetztem Vorzeichen. Sie treten auch beim selben Wert h auf (an derselben Position des Kolbens bei der Hin- bzw. Herbewegung):

$$\alpha_{\max} = -\alpha_{\min}, \quad v_{\max} = -v_{\min} \quad \text{und} \quad h(\alpha_{\max}) = h(\alpha_{\min}).$$

Diese drei „Symmetrien“ bestehen bei geschränkten Schubkurbelgetrieben – wie wir sehen werden und wie sich auch a priori vermuten lässt – i. a. nicht mehr.

Wir setzen in diesem Abschnitt nichts des vorherigen voraus und beginnen von neuem; wir wollen erstens die oben geometrisch-kinematisch gewonnenen Erkenntnisse (Satz 1 und 2) nun auch mit Hilfe von Differentialrechnung gewinnen⁶⁾ und zweitens die für die Kolbengeschwindigkeit optimale Winkelstellung α_{opt} ausrechnen, also eine Lösung des ursprünglichen Problems angeben. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall einer zentrischen Schubkurbel; ihren Radius setzen wir mit 1 fest und die Länge der Schubstange mit l . Aus Fig. 6 ergeben sich unmittelbar die Beziehungen

$$(2) \quad p = \sqrt{l^2 - \sin^2 \alpha}$$

$$(3) \quad h = \cos \alpha + p,$$

$$(4) \quad \overline{MD} = \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{p} \quad \left(= -\frac{dh}{d\alpha} \right).$$

Durch Ableiten der Beziehung (3) nach α und Vergleichen mit (4) erkennt man, dass offenbar $\overline{MD} = \left| \frac{dh}{d\alpha} \right| = |v|$ gilt [in der dargestellten Situation ist $v = \frac{dh}{d\alpha} < 0$ und $-v = -\frac{dh}{d\alpha} > 0$], dass also die

Länge der Strecke \overline{MD} als Betrag der Kolbengeschwindigkeit v deutbar ist (diese Erkenntnis wurde oben mittels *Momentanpol, ähnliche Dreiecke* gewonnen). Daraus ergibt sich auch, dass eine Beschränkung auf $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ für die folgenden Überlegungen ausreichend ist (für größere Werte von α wird \overline{MD} ja wieder kleiner).

⁶⁾ Ohne vorherige geometrische Überlegungen würde es schwer fallen, auf obigen Satz 2 oder auf eine diesbezügliche Vermutung überhaupt zu kommen.

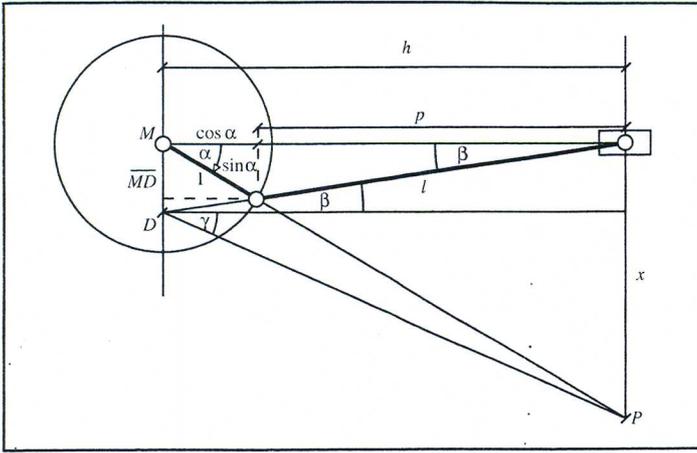


Fig. 6: Schema einer zentrischen Schubkurbel mit $r = \frac{R}{R} = 1$

Nun wollen wir auch analytisch zeigen, dass der Betrag der Kolbengeschwindigkeit $|v| = \overline{MD}$ genau dann maximal ist, wenn Schubstange und Polstrahl PD aufeinander normal stehen:

$$|v| = \overline{MD} \text{ ist maximal} \Leftrightarrow \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Wir haben zu zeigen (unter Verzicht auf die Untersuchung der zweiten Ableitung):

$$(*) \frac{d|v|}{d\alpha} = \frac{d\overline{MD}}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta + \gamma = 90^\circ (**)$$

Wir beginnen mit der Bedingung (*). Durch Ableiten nach α erhalten wir aus (4)

$$\frac{d|v|}{d\alpha} = \frac{d\overline{MD}}{d\alpha} = \cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{p} + \cos\alpha \cdot \frac{p \cos\alpha - \frac{dp}{d\alpha} \sin\alpha}{p^2}$$

so dass (*) nach Multiplikation mit p^2 und Einsetzen von $\frac{dp}{d\alpha} = -\frac{\sin\alpha \cos\alpha}{p}$ äquivalent ist mit

$$p^2 \cos\alpha - p \sin^2\alpha + p \cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}{p} = 0.$$

Dies ist weiter äquivalent mit

$$p^2 \cos\alpha + p \cos^2\alpha = p \sin^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}{p}$$

$$p \cos\alpha (p + \cos\alpha) = \sin^2\alpha \left(p - \frac{\cos^2\alpha}{p} \right)$$

$$p^2 \cos\alpha (p + \cos\alpha) = \sin^2\alpha (p^2 - \cos^2\alpha)$$

$$p^2 \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha (p - \cos\alpha)$$

$$(p^2 + \sin^2\alpha) \cos\alpha = p \sin^2\alpha$$

also schließlich mit

$$(5) \quad l^2 \cos\alpha = p \sin^2\alpha.$$

Auch die Bedingung (**) ist äquivalent mit (5): Für den Winkel β ergibt sich zunächst aus Fig. 6

$$(6) \quad \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{p}.$$

Weiters lesen wir aus Fig. 6 die Gleichungen $x = h \cdot \tan\alpha$ und \overline{MD}

$$= h \cdot \frac{\sin\alpha}{p} \text{ ab; damit ergibt sich für } \tan\gamma = \frac{x - \overline{MD}}{h}$$

in weiterer Folge

$$(7) \quad \tan\gamma = \tan\alpha - \frac{\sin\alpha}{p}.$$

Die Bedingung (**) $\beta + \gamma = 90^\circ$ ist äquivalent mit $\tan\gamma = \tan(90^\circ - \beta) = \cot\beta$, also $\tan\gamma = \frac{1}{\tan\beta}$. Aufgrund der obigen tan-Beziehungen für β bzw. γ in (6) bzw. (7) ist $\tan\gamma = \frac{1}{\tan\beta}$ äquivalent mit

$$\tan\alpha - \frac{\sin\alpha}{p} = \frac{p}{\sin\alpha}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $p \sin\alpha \cos\alpha$, so erhalten wir

$$p \sin^2\alpha - \cos\alpha \sin^2\alpha = p^2 \cos\alpha$$

und damit schließlich dieselbe Beziehung wie in (5).

Nun kümmern wir uns um die zu lösende Gleichung $l^2 \cos\alpha = p \sin^2\alpha$. Da $p = \sqrt{l^2 - \sin^2\alpha}$ ist, müssen wir quadrieren und erhalten $l^4 \cos^2\alpha = (l^2 - \sin^2\alpha) \sin^4\alpha$. Daraus erhalten wir mit $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ die Gleichung

$$(8) \quad \sin^6\alpha - l^2 \sin^4\alpha - l^4 \sin^2\alpha + l^4 = 0.$$

Wir dividieren diese Gleichung noch durch l^6 und erhalten

$$\frac{\sin^6\alpha}{l^6} - \frac{\sin^4\alpha}{l^4} - \frac{\sin^2\alpha}{l^2} = 0.$$

Setzt man hier zur Abkürzung $y := \frac{\sin^2\alpha}{l^2}$, so erhält man eine kubische Gleichung in y :

$$(9) \quad y^3 - y^2 - y + \frac{1}{l^2} = 0,$$

wobei ein gängiger Wert für l bei Gattersägen z. B. $l = 11$ ist, welchen auch wir hier benutzen.

Bemerkung: Zur Lösung der resultierenden Gleichung kann die Einsicht über den rechten Winkel zwischen Schubstange und Polstrahl leider nichts beitragen (es bleibt mit und ohne diese Erkenntnis dieselbe kubische Gleichung zu lösen), aber das Verständnis für und die Vorstellung von der optimalen Kurbelstellung dürfte dadurch wesentlich erhöht werden!

Die Gleichung dritten Grades

$$(10) \quad y^3 - y^2 - y + \frac{1}{121} = 0$$

könnte bekanntlich sogar exakt gelöst werden, wobei aber die dafür nötigen und leider sehr kompliziert handhabbaren Cardano-Formeln i. A. kaum Gegenstand des Unterrichts gewesen sein werden. Mit einem Computeralgebrasystem wäre es auch ohne Weiteres denkbar, die Gleichung zu lösen, ohne die dahinter stehenden Cardano-Formeln zu thematisieren („Black Box“). Man erhielte hier die drei reellen Nullstellen (auf 8 Dezimalstellen gerundet)

$$y_1 \approx -0,62394197, \quad y_2 \approx 0,00819781, \quad y_3 \approx 1,61574417,$$

wobei hier wegen $y = \frac{1}{121} \sin^2 \alpha$ nur y_2 als Lösung des Problems in Frage käme und dies schließlich für α_{opt} den Wert $\alpha_{opt} \approx \pm 1,48087 \approx 84,85^\circ$ bedeutete. Natürlich könnte Gleichung (10) auch näherungsweise mit dem bekannten *Newton*-Verfahren gelöst werden (dafür ist nicht einmal ein CAS nötig). Wir verwenden z. B. $y_0 = 0,01$ als Startwert und erhalten mit der *Newton*-Iteration die Werte $y_1 \approx 0,0082$ und $y_2 \approx 0,0081978$, wobei sich die bei y_2 angegebenen Dezimalstellen bei den weiteren Iterationsschritten nicht mehr verändern. Wir haben also offenbar ein auf *sieben* Dezimalstellen genaues Ergebnis für y durch nur *zwei* Iterationsschritte erhalten, was zum selben Näherungswert für α_{opt} führt: $\alpha \approx \pm 84,85^\circ$.

Dieser Winkel unterscheidet sich hier nur minimal von jenem, bei dem Schubstange und Kurbelradius aufeinander normal stehen: $\arctan 11 \approx 1,4801 \approx 84,81^\circ$. D. h. der Unterschied ist vom Standpunkt des Praktikers hier durchaus zu vernachlässigen und wohl nur von theoretischem Interesse. Bei kürzerem l (z. B. $l = \frac{11}{3}$) hätte man jedoch einen deutlicheren Unterschied: „Exakt“: $\alpha_{opt} \approx 75,70^\circ$; Schubstange \perp Kurbelradius: $\arctan \frac{11}{3} \approx 74,74^\circ$.

Wenn sich die Kurbel (s. Fig. 1) im Uhrzeigersinn dreht, so fällt h für $0 < \alpha < \pi$ und wächst für $\pi < \alpha < 2\pi$, wodurch (anschaulich) geklärt ist, dass sich bei $\alpha \approx 84,85^\circ$ das Geschwindigkeitsminimum v_{min} (negatives Vorzeichen) und bei $\alpha \approx -84,85^\circ$ das Geschwindigkeitsmaximum v_{max} mit positivem Vorzeichen befindet ($v_{min} = -v_{max}$). An den Totpunkten selbst ($\alpha = 0, \alpha = \pi$) ist die Momentangeschwindigkeit jeweils 0.

Für den Absolutwert der „optimalen Geschwindigkeit“ ergibt sich mit $\alpha_{opt} = 84,85^\circ$ aus (3) bzw. (4) in unserem Fall ($l = 11$): $|\frac{dh}{d\alpha}(\alpha_{opt})| = |v_{opt}| \approx 1,004$ (Längeneinheiten pro Sekunde). Dies ist also ein nur um 4 Promille höherer Wert als bei $\alpha = 90^\circ$, wo ja $|v| = 1$ ist.

Die Werte von h bewegen sich bei unseren Werten $l = 11$ und $r = 1$ klarerweise zwischen 10 und 12, wobei $h(\alpha_{opt}) \approx 11,0446$ ist – siehe die Gleichungen (2) und (3); d. h. der optimale Punkt bzgl. der Geschwindigkeit liegt *nicht* im Mittelpunkt der Hubstrecke!

4 Geschränkte Schubkurbel

In Fig. 7 ist noch einmal das Schema einer geschränkten Schubkurbel dargestellt, wobei wir wiederum in Radien R messen (Kleinbuchstaben von p, h, l, e wie oben; $r = 1$).

Wir gehen nun – unter Beachtung der Exzentrizität E bzw. e – ganz analog wie bei der zentrischen Schubkurbel vor. Aus Fig. 7 ergeben sich unmittelbar die Beziehungen

$$(11) \quad p = \sqrt{l^2 - (e + \sin \alpha)^2}$$

$$(12) \quad h = \cos \alpha + p$$

$$(13) \quad \overline{MD} = \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{e + \sin \alpha}{p} \quad \left(= -\frac{dh}{d\alpha} \right)$$

Eine wichtige Erkenntnis daraus ist wiederum, dass $\overline{MD} = | \frac{dh}{d\alpha} | =$

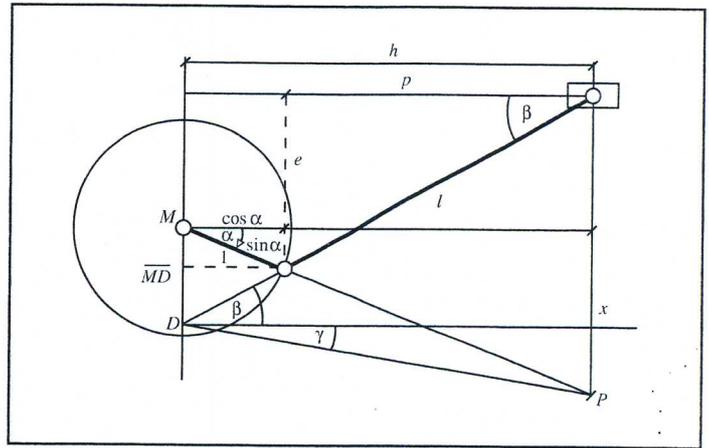


Fig. 7: Schema einer geschränkten Schubkurbel mit $r = \frac{R}{R} = 1$

$|v|$ gilt (wieder ist $v = \frac{dh}{d\alpha} < 0$), dass auch im Fall einer geschränkten Schubkurbel \overline{MD} als Betrag der Kolbengeschwindigkeit v deutbar ist. Auch dies haben wir schon geometrisch-kinematisch gefunden. Man kann nun auch wieder *analytisch* zeigen, dass die Kolbengeschwindigkeit $|v| = \overline{MD}$ betraglich genau dann maximal ist, wenn Schubstange und Polstrahl PD aufeinander normal stehen:

$$|v| = \overline{MD} \text{ ist maximal} \quad \Leftrightarrow \quad \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Wir haben zu zeigen (unter Verzicht auf die Untersuchung der zweiten Ableitung):

$$(*) \quad \frac{d|v|}{d\alpha} = \frac{d\overline{MD}}{d\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta + \gamma = 90^\circ. (**)$$

Analog zum „zentrischen Fall“ erhält man hier nach einigen Äquivalenzumformungen, dass sowohl (*) als auch (**) äquivalent sind zu

$$(14) \quad \frac{p^2 \cos \alpha (\cos \alpha + p)}{e + \sin \alpha} = p^2 \sin \alpha - (e + \sin \alpha) \cos^2 \alpha$$

und daher zueinander äquivalent sind. Die zu Grunde liegenden Umformungen sind nicht sehr instruktiv und hier deshalb weggelassen.

Im Folgenden soll nicht die Äquivalenz von (*) und (**) im Vordergrund stehen, sondern deren Lösung! Ausgehend von einer der beiden oder auch von Beziehung (14) erhält man nach einigen Umformungen als eine mögliche Form der zu lösenden Gleichung

$$(15) \quad [\sin \alpha (e + \sin \alpha) (l^2 - (e + \sin \alpha)^2) - l^2 \cos^2 \alpha]^2 = \cos^2 \alpha [l^2 - (e + \sin \alpha)^2]^3.$$

Dies ist eine **Gleichung 8. Grades** in $\sin \alpha$, die wir natürlich nur näherungsweise und (sinnvollerweise) auch nur mit CAS lösen können, so dass die Gleichung ja nicht allzuweit (bzw. gar nicht) vereinfacht werden muss für die Anwendung des *Newton*-Verfahrens. Macht man doch einige Umformungen (z. B. $x := \sin \alpha$), so ergibt sich z. B. für die Werte $l = 10$ und $e = 1$ (also z. B. ⁷⁾ $E = R$

⁷⁾ Die Tatsache $1 = r = e$ bzw. $R = E$ bedeutet, dass die Kurbel die Bahngerade des Kolbens bzw. deren Verlängerung „berührt“.

= 1 und $L = 10$) nach wenigen Schritten die Gleichung

$$(16) \left[\frac{1}{10}(2x^2 + x - 1) - \frac{1}{1000}(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x) \right]^2 - (1 - x^2) \left(\frac{99}{100} - \frac{1}{50}x - \frac{1}{100}x^2 \right)^3 = 0$$

für deren Lösung das *Newton*-Verfahren (Startwert $x_0 = 0,95$) die Iterationswerte $x_1 \approx 0,981449$ bzw. $x_2 \approx 0,980953$ liefert, wobei die bei x_2 angegebenen sechs Dezimalstellen bei den weiteren Schritten schon unverändert bleiben.

Für α_{\min} bedeutet dies einen Wert von ungefähr $1,37531 \approx 78,80^\circ$. Auch hier ist α_{\min} wirklich nahe jenem Winkel, bei dem Schubstange und Kurbelradius aufeinander normal stehen. Dieser ergibt sich in unserem Fall mittels einer Skizze (s. Fig. 8) und kurzer Überlegung zu $\alpha = 2\varphi - \frac{1}{2}\pi = 2 \arctan 10 - \frac{1}{2}\pi \approx 1,3715 \approx 78,58^\circ$.

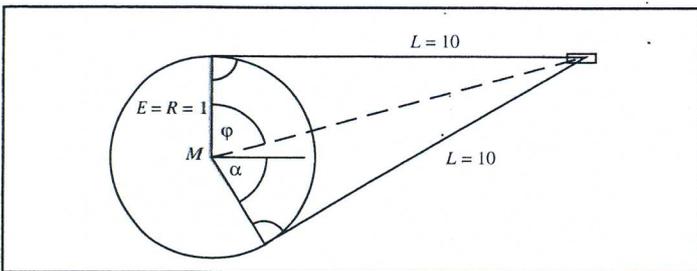


Fig. 8: Geschränkte Schubkurbel: $E = R = 1$ und $L = 10$ – Maße nicht im richtigen Verhältnis dargestellt!

Die zweite (für unsere Frage interessante) Nullstelle liegt hier genau bei $x = -1$, wie man in Gleichung (16) unmittelbar sieht, bzw. äquivalent dazu bei $\alpha = \alpha_{\max} = \frac{3}{2}\pi$, wie in Gleichung (15) unmittelbar zu sehen ist⁸⁾ ($\cos \frac{3}{2}\pi = 0, \sin \frac{3}{2}\pi = -1$). Hier ($E = R$, d. h. die Kurbel berührt die Bahngerade des Kolbens) gilt bei $\alpha_{\max} = \frac{3}{2}\pi$: Schubstange \perp Kurbelradius (dass hier bei $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ ein Geschwindigkeitsextremum vorliegt, ist anhand der realen Situation – vgl. Fig. 8 – bei etwas Überlegung wohl auch *a priori* zu vermuten).

Im geschränkten Fall verliert jedoch nicht nur die Beziehung $\alpha_{\max} = -\alpha_{\min}$ ihre Gültigkeit, sondern auch $v_{\max} = -v_{\min}$ und $h(\alpha_{\max}) = h(\alpha_{\min})$. In $h(\alpha)$ bzw. $\frac{dh}{d\alpha}$ können wir die erhaltenen Werte für α_{opt} (nämlich $\alpha_{\min} \approx 1,3753$ bzw. $\alpha_{\max} = (\frac{3}{2}\pi)$) einsetzen – siehe die Gleichungen (11), (12) bzw. (13) – und erhalten Werte, die den schon angesprochenen Verlust der im zentrischen Fall herrschenden „Symmetrien“ numerisch bestätigen:

$$h(\alpha_{\min}) \approx 9,996 \quad h(\alpha_{\max}) = 10 \quad v_{\min} \approx -1,02 \quad v_{\max} = 1.$$

Bei zentrischen Schubkurbeln ist der größte Wert von h bei $h_{\max} = l + 1$ für $\alpha = 2k\pi$ und der kleinste bei $h_{\min} = l - 1$ für $\alpha = (2k + 1)\pi$. Diese Eigenschaft geht bei geschränkten Schubkurbeln klarerweise auch verloren!

Es bleibt jedoch die Eigenschaft, dass der größte Wert h_{\max} dann auftritt („oberer Totpunkt“), wenn der Kurbelradius genau in der

Verlängerung der Schubstange liegt (dies ist leicht anschaulich und elementar zu begründen: Dreiecksungleichung, Strecke ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte; siehe die folgende analoge Begründung für den unteren Totpunkt). Der kleinste Wert für h („unterer Totpunkt“) tritt ebenfalls weiterhin dann auf, wenn Schubstange und Kurbelradius⁹⁾ genau übereinander zu liegen kommen. Hier geben wir eine mögliche Begründung mit Hilfe der Dreiecksungleichung explizit an (Fig. 9):

Kurbelmittelpunkt M , Kolben bzw. Kreuzkopfzapfen B und der Lotfußpunkt F (Lot vom Kurbelmittelpunkt auf die Bahngerade des Kreuzkopfzapfens) bilden in jeder Situation ein rechtwinkliges Dreieck mit fester Kathetenlänge $\overline{MF} = e$. Daher wächst und fällt die andere Kathetenlänge ($\overline{FB} = h$) mit der Hypotenusenlänge \overline{MB} ¹⁰⁾, wodurch gesichert ist: h ist genau dann minimal, wenn dies auch \overline{MB} ist! Bei Überlagerung von Schubstange und Kurbelradius (entartetes Dreieck AMB) gilt natürlich $\overline{MB} = l - 1$. Die Dreiecksungleichung für das Dreieck AMB liefert jedoch $\overline{MB} > l - 1$ für jeden nichtentarteten Fall. Die Streckenlänge \overline{MB} ist also minimal im Überlagerungsfall, daher auch $h = \overline{FB}$!

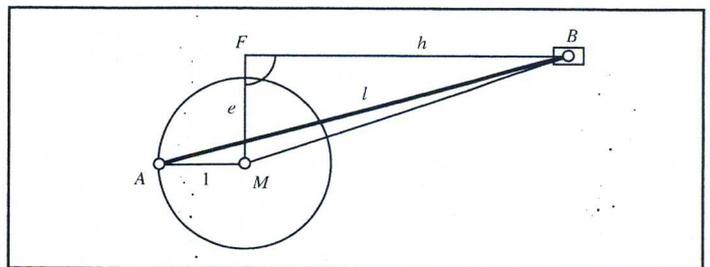


Fig. 9: Begründung für die untere Totlage

Dies bedenkend (bzgl. h_{\max} bzw. h_{\min} , d. h. bzgl. der Totlagen) und mit Hilfe einer entsprechenden Skizze (s. Fig. 10) kommt man schnell zu den jeweiligen Winkelwerten von α in diesen Situationen: $\alpha_1 = -\arcsin(\frac{e}{l+1})$ und $\alpha_2 = \pi - \arcsin(\frac{e}{l-1})$.

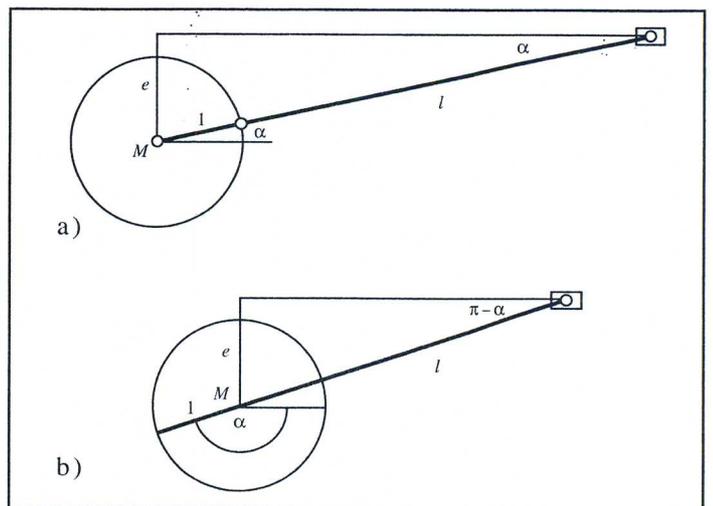


Fig. 10: a) Oberer „Totpunkt“ (α_1) b) unterer „Totpunkt“ (α_2) bei einer geschränkten Schubkurbel

⁹⁾ Gemeint ist die Verbindung Kurbelmittelpunkt–Kurbelzapfen.

¹⁰⁾ Die genaue Begründung dafür kann entweder ebenfalls mittels der Dreiecksungleichung oder z. B. mittels des *Pythagoreischen* Lehrsatzes erfolgen.

⁸⁾ In anderen Fällen ist die Stelle des zweiten Extremums auch durch ein Näherungsverfahren zu bestimmen.

Man kann zu diesem Zweck *auch* die Gleichung $\frac{dh}{d\alpha} = 0$ lösen (gute Übung für Schüler bzw. Studenten, kein Näherungsverfahren nötig; die geometrische Lösung mit Hilfe der Skizzen sollte jedoch nicht dadurch ersetzt werden). Aus den Gleichungen (11) und (12) erhalten wir für $v = 0$ bzw. $\frac{dh}{d\alpha} = 0$ eine quadratische Gleichung in $\sin \alpha$ mit den Lösungen $\sin \alpha_1 = -\frac{e}{l+1}$ und $\sin \alpha_2 = \frac{e}{l-1}$. Durch Einsetzen sieht man rasch, dass bei α_2 der Supplementärwinkel $\pi - \alpha_2$ die eigentliche Lösung darstellt. Wir erhalten bei unseren Werten $e = 1$ und $l = 10$: $\alpha_1 = \arcsin(-\frac{1}{11}) \approx 0,091 \approx -5,22^\circ$ bzw. $\alpha_2 = \pi - \arcsin(\frac{1}{9}) \approx 3,030 \approx 173,62^\circ$. Dies ergibt für $h_{\max} = h(\alpha_1) \approx 10,954$ und für $h_{\min} = h(\alpha_2) \approx 8,944$.

Bemerkung: Eine grundlegend andere Art, sich unserem Thema zu widmen (die allerdings *nur* bei *zentrischen Schubkurbeln* funktioniert), wäre durch die Methode von Kirsch (1994) gegeben: Eine durch die bekannte Näherungsformel $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ ($|x| \ll 1$) erhaltene quadratische „Nä-

herungsgleichung“ wird dort exakt gelöst, während wir die jeweils exakte Gleichung im zentrischen Fall exakt oder näherungsweise und im geschränkten Fall nur näherungsweise (aber jeweils mit beliebiger Genauigkeit!) gelöst haben.

Literatur

- [1] Kirsch, A.: Zur Behandlung des Hubkolbenmotors im Mathematikunterricht. *MNU* 47 (1994), 4, S. 216–218.
- [2] Kirsch, G.: Über die graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure* 34 (1890) 1320–1321.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Hans Humenberger, IEEM, FB Mathematik,
Universität Dortmund, D-44221 Dortmund.
E-Mail: hans.humenberger@math.uni-dortmund.de

„Nim“-Spiel in mehreren Haufen

Beispiel eines Vektorraumes über dem Körper der Charakteristik 2

Joachim Ramcke

Das NIM-Spiel als Beispiel eines kategorischen, offenen Spieles mit endlichem Spielbaum

Ein Spiel ohne Zufallszüge heißt offen. Gibt es kein Remis, so nennt man es kategorisch. Der Verlauf des NIM-Spiels lässt sich durch einen endlichen Baum beschreiben. Der Clou ist aber ein Vektorraum über dem Körper der Charakteristik 2, in welchem sich Spielzüge und Gewinnstellungen sehr elegant formulieren lassen.

Spielregeln: Eine beliebige Anzahl von Streichhölzern wird in mehreren untereinander liegenden Reihen parallel ausgelegt (oder an der Wandtafel durch entsprechende Kreidestriche dargestellt). Zwei Spieler sind nun abwechselnd am Zuge. Ein Zug besteht darin, genau einen der Streichholzhaufen auszuwählen und aus ihm beliebig viele, aber mindestens eines und höchstens sämtliche Hölzer dieses Haufens, wegzunehmen.

Version 1: Wer schließlich das letzte Streichholz entfernen oder mit-entfernen *kann*, also den Endzustand mit lauter leeren Häufchen herstellt, ist Sieger.

Version 2: Wer schließlich das letzte Streichholz entfernen *muss*, hat verloren.

Zunächst kann man den Spielverlauf durch eine Aufeinanderfolge von n -Tupeln $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ darstellen, wobei n die Anzahl der Häufchen ist und die x_i die jeweiligen Streichholz-Anzahlen in diesen Häufchen angeben. In den Graphen nebeneinander stehen solche n -Tupel in den Rechtecken der Knoten. Die beiden Graphen kann man mit den Schülern von unten her sukzessive aufzubauen versuchen. Zunächst aber sollte man sich als Lehrer die große Chance nicht entgehen lassen, vor seinen Schülern als der unschlagbare

Zocker dazustehen, gegen den ärgerlicherweise einfach nicht zu gewinnen ist.

Die beiden Graphen beschränken sich auf ein Spiel mit der Ausgangsstellung $[1 \ 3 \ 5 \ 7]$, also mit $n = 4$ Haufen aus dem alten Spielfilm „Letztes Jahr in Marienbad“. In diesen verkürzten Spielbäumen sind die Züge des Gegners nicht aufgeführt, sondern nur eigene mögliche nachfolgende Gewinnstellungen, die vom gegnerischen Zwischenzug aus für uns erreichbar werden.

Natürlich gehört in der *ersten Version* $[0 \ 0 \ 0 \ 0]$ zu den Gewinnstellungen. Davor also ebenfalls $[1 \ 1]$, $[2 \ 2]$ (d. h. ausführlich $[0 \ 0 \ 1 \ 1]$ bzw. $[0 \ 0 \ 2 \ 2]$) und mithin gleichfalls auch $[m \ m]$ sowie ferner $[1 \ 1 \ m \ m]$, andererseits jedoch des weiteren $[1 \ 2 \ 3]$ bzw. $[1 \ 4 \ 5]$ des Graphen. Weitere Möglichkeiten neben $[2 \ 4 \ 6]$ und $[3 \ 5 \ 6]$ im Graphen wären überdies die nicht im Graphen aufgeführten Gewinnstellungen $[2 \ 5 \ 7]$ sowie $[3 \ 4 \ 7]$.

Ein Spielverlauf im Graphen könnte z. B. folgendermaßen aussehen:

Wir lassen den Gegner als ersten ziehen, denn der Start mit der populären „Marienbadkonstellation“ $[1 \ 3 \ 5 \ 7]$ ist eine Gewinnstellung. (Sollte der Gegner verlangen, dass wir beginnen, so müssen wir vorerst selbst in eine Verluststellung ziehen, indem wir z. B. ein Hölzchen aus einem der *großen* Haufen entfernen und auf die Ignoranz des anderen vertrauen, die ihn dann blindlings in eine weitere Verluststellung tappen lässt.)

Falls der Gegner beginnt, so nimmt er z. B. ein Hölzchen aus den Dreien des zweiten Haufens; er zieht somit von der Ausgangsstellung $[1 \ 3 \ 5 \ 7]$ nach der nicht im Graphen registrierten Zwischenstellung $(1 \ 2 \ 5 \ 7)$. Daraus können wir nun die neue Gewinn-