[5] D. PLAPPERT: Umsetzungsbeispiele zu den Bildungsstandards Physik 8. – In: Landesinstitut für Schulentwicklung (Hg.): PH 41 Materialien Gymnasium. – 2006.

[6] F. KRANZINGER: Differenzierter Unterricht. – In: Landesinstitut für Schulentwicklung (Hg.): PH 42 Materialien Gymnasium. – 2006.

[7] Landesinstitut für Schulentwicklung (Hg.): NW 1 Knotenpunkte der Naturwissenschaften – Materialien Gymnasium. – 2006.

[8] D. PLAPPERT: Verständliche Elektrizitätslehre. – PdN-Ph **52** (2003) Nr. 7, 2–11.

[9] F. HERRMANN: Der Karlsruher Physikkurs – Ein Lehrbuch für die Sekundarstufe 2, Thermodynamik. – Köln: Aulis Verlag Deubner 2005.

[10] F. HERRMANN: E-Mail-Verkehr mit dem Verfasser vom 21.–22.09.07.

[11] J. FRIEDRICH: Die Ladung-Impuls-Analogie. – MNU **52** (1999) Nr. 1, 19–23.

[12] E. VON GOLDAMMER: 5.4.4 Reibung und Impulsstromwiderstand. – *ftp://gatekeeper.informatik.fh-dortmund.de/pub/professors/vongoldammer/scripts/I_1.pdf* (09.10.2007).

[13] L. MEYER – G.-D. SCHMIDT (Hg.): Physik, Lehrbuch für die Sekundarstufe 1, Bd. 1 Baden-Württemberg Gymnasium. – Berlin: Duden Paetec 2006.

[14] L. MEYER – G.-D. SCHMIDT (Hg.): Physik, Lehrbuch für die Sekundarstufe 1, Bd. 2 Baden-Württemberg Gymnasium. – Berlin: Duden Paetec 2007.

[15] F. HERRMANN: Der Karlsruher Physikkurs – Ein Lehrbuch für die Sekundarstufe 2 – Schwingungen und Wellen, Daten. – Köln: Aulis Verlag Deubner 2006.

[16] MNU-Symposium Karlsruher Physikkurs. – *www.mnu.de/show_page.php?id=77* (13.10.2007).

[17] F. HERRMANN: Der Karlsruher Physikkurs – Ein Lehrbuch für die Sekundarstufe 1, Daten Elektrizität Licht. – Köln: Aulis Verlag Deubner 2006.

[18] G. MIE: Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung. – *www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/publication/historische_Arbeiten/Mie_1898.pdf* (29.10.07).

[19] F. KRANZINGER: Diskurs über »naive Energieträger«. – PdN-PhiS **56** (2007) Nr. 1, 42–45.

[20] W. HERZOG: Der Karlsruher Physikkurs – Anspruch und Widersprüche eines didaktischen Konzepts. – MNU **60** (2007) Nr. 8, 500–504.

[21] Versch. Leser – W. HERZOG: Zu: Der Karlsruher Physikkurs – Anspruch und Widersprüche eines didaktischen Konzepts. – MNU **61** (2008) Nr. 3, 173–182.

StR KENO WILL ist Dipl. Physiker und Lehrer für Mathematik und Physik. Er unterrichtet am Geschwister-Scholl-Gymnasium in Stuttgart-Sillenbuch.
Anschrift: Teckstr. 28, 70188 Stuttgart, E-Mail: Keno.Will@t-online.de.

Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen – entdeckender und verständiger Umgang mit Brüchen

HANS HUMENBERGER

In manchen Zahlentheorielehrbüchern (z. B. [6]) oder mathematikdidaktischen Zeitschriften (z. B. [7] oder [4]) wird das Thema der so genannten Farey-Reihen aufgegriffen, einerseits als fachliches Thema, andererseits als mögliches Thema zum Entdecken und Beweisen im Schulunterricht. Genau dieser Anspruch wird aber dabei nicht immer erfüllt, z. B. sind die in [7] angegebenen Beweise sehr zahlentheoretisch-technischer Natur und lassen den Kern der Sache für vermutende und entdeckende Schülerinnen und Schüler nicht besonders gut erkennen. Sie sind im Stile eines nur fachlichen Zahlentheorielehrbuches natürlich nachvollziehbar, aber kaum werden experimentierende und vermutende Schülerinnen und Schüler auf so oder eine ähnliche Art des Beweisens kommen. HISCHER macht in [4] zwar Vorschläge zur entdeckenden Arbeit mit Brüchen und nennt die zugehörigen erstaunlichen Phänomene bei Farey-Reihen, gibt aber keine Begründungen an, er schreibt abschließend: *»Auf höherem Niveau lässt sich eine iterative Konstruktion von Farey-Folgen beschreiben.«* Im folgenden Beitrag soll es speziell darum gehen, einen genetischeren Weg zu diesem Problemkreis aufzuzeigen und dies sowohl was die Phänomene an sich als auch eine mögliche Umsetzung im Schulunterricht betreffen.

1 Historisches zum Einstieg

JOHN FAREY war kein Mathematiker, sondern ein englischer Geologe (1766–1826). Er bekam eine Bruch-Tabelle *(»Complete decimal quotients«)* von HENRY GOODWYN in die Hände und machte darin eine Entdeckung über gekürzte Brüche. Dies waren Tabellen, die die gekürzten Brüche bis zu einem gewissen Höchstnenner enthielten samt ihren Dezimalbruchentwicklungen bis zu einer gewissen Dezimalstelle; anhand der Darstellung als Dezimalbruch lassen sich die Brüche auch leicht der Größe nach ordnen. Solche Tabellen konnten auch beim praktischen Rechnen helfen: Approximation von Brüchen durch Dezimalbrüche oder Approximation von Brüchen mit relativ großen Nennern (auch von Dezimalbrüchen) durch welche mit relativ kleinen Nennern etc. 1816 schrieb FAREY einen Brief [2] mit dem Titel *»On a curious property of vulgar fractions«* an den Herausgeber der nicht speziell mathematischen Zeitschrift *Philosophical Magazine* (heute würde man vielleicht Leserbrief dazu sagen), der dort auch abgedruckt wurde. Er beschrieb darin eine erstaunliche Eigenschaft von gekürzten Brüchen; wir beschränken uns hierbei stellvertretend auf das Intervall [0 ; 1]:
Die Farey-Reihe[1] F_n für eine feste natürliche Zahl n besteht aus den der Größe nach geordneten gekürzten Brüchen aus [0 ; 1] mit Nenner $\leq n$. Abbildung 1 zeigt die ersten 5 Fälle für F_n.

In solchen Reihen fiel FAREY auf, dass jeder innere Bruch dieser Reihe denselben Wert hat wie

$$\frac{\text{Summe der Nachbarzähler}}{\text{Summe der Nachbarnenner}}$$

(in manchen Fällen muss noch gekürzt werden).

[1] Hier ist *Reihe* nicht im mathematischen Sinn zu verstehen, denn sonst müsste man eigentlich von einer *Folge* sprechen, vielmehr ist hier der umgangssprachliche Begriff einer Reihe gemeint.

Ihm ist dies nur aufgefallen und er hat dies der mathematischen Leserschaft dieser Zeitschrift zum Beweis überlassen, er schreibt am Schluss des Briefes: »*I am not acquainted, whether this curious property of vulgar fractions has been pointed out, or whether it may admit of any easy or general demonstration?; which are points on which I should be glad to learn the sentiments of some of your mathematical readers.*« [2]
Ein solcher mathematical reader (einer französischen Übersetzung) war CAUCHY, der dafür auch einen Beweis gab. Schon im Jahr 1802 hat HAROS einen Aufsatz im Journal de l'ecole polytechnique publiziert, in dem er auch die Entdeckung an jenem Objekt machte, das in Farey-Diktion F_{99} entspricht, aber auch er hat keinen allgemeinen Beweis angegeben. D. h. die Farey-Reihen sind in einer gewissen Weise zu Unrecht nach FAREY benannt, er hat die Phänomene weder als erster entdeckt, noch als erster bewiesen, aber so etwas ist in der Geschichte der Mathematik ja durchaus nichts Ungewöhnliches.
Es ist vielleicht auf den ersten Blick verwunderlich, dass die Entdeckung einer so einfachen Eigenschaft gekürzter Brüche nicht schon längst vorher geschehen ist, aber ohne eine solche Tabelle wie z. B. jene von GOODWYN, in der diese Brüche direkt neben- oder untereinander stehen, kommt man eben gar nicht zu diesem Phänomen und solche Tabellen hat man eben erst relativ spät aufgestellt, nämlich erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts.

2 Der gewählte Zugang

Wir werden im Folgenden dieses Problem nicht direkt weiter verfolgen, sondern die Lösung quasi indirekt durch andere Betrachtungen mit Brüchen erhalten. Diese müssen nicht notwendig in Farey-Reihen münden bzw. durch Farey-Reihen motiviert sein, sie sind auch für sich genommen interessant und laden zu Erkundungen, Entdeckungen und Begründungen ein. Dies auch im normalen Schulunterricht! Mathematisch handelt es sich fast ausschließlich um den Bereich der elementarsten Bruchrechnung. Nur ganz zum Schluss kann das Prinzip der *vollständigen Induktion* einfließen, muss aber nicht.

Nun zunächst zwei Begriffe, die im Zentrum des Folgenden stehen werden, sie sind sozusagen der Kern des von FAREY beobachteten Phänomens: Nachbarbruch und Mediante. Dies soll nicht bedeuten, dass wir – sozusagen zu ihrem Selbstzweck – noch viele weitere neue Begriffe in den Schulunterricht bringen möchten, im Gegenteil, man könnte da vermutlich einiges reduzieren[2].

Diese beiden Begriffe sind aber erstens *inhaltlich* sowieso bekannt (sind also nur Namen für ohnehin bekannte und häufige Tatsachen) und zweitens kann man mit ihnen eine ganze substanzielle Lernumgebung schaffen, in der von Schülerinnen und Schülern viel selbständig gefragt, erkundet und begründet wird.

2.1 Nachbarbrüche

Bei der Berechnung von Differenzen von Brüchen passiert es oft, dass der Zähler 1 ist, sogar ohne Kürzen, z. B. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$. Eine kleinere Differenz als $\frac{1}{12}$ können $\frac{n}{3}$ und $\frac{m}{4}$ nicht haben, so dass es plausibel ist, solche Brüche als Nachbarbrüche zu bezeichnen und sie wie in Kasten 1 zu definieren.
In diesem Zusammenhang sind natürlich auch andere Namen (Begriffe) dafür denkbar wie Partnerbrüche, minimal benachbarte Brüche (vgl. [5] S. 328[3]) etc. Auch die Erfindung sinnvoller Bezeichnungen kann reizvoll sein (vgl. [8] oder viele Beiträge

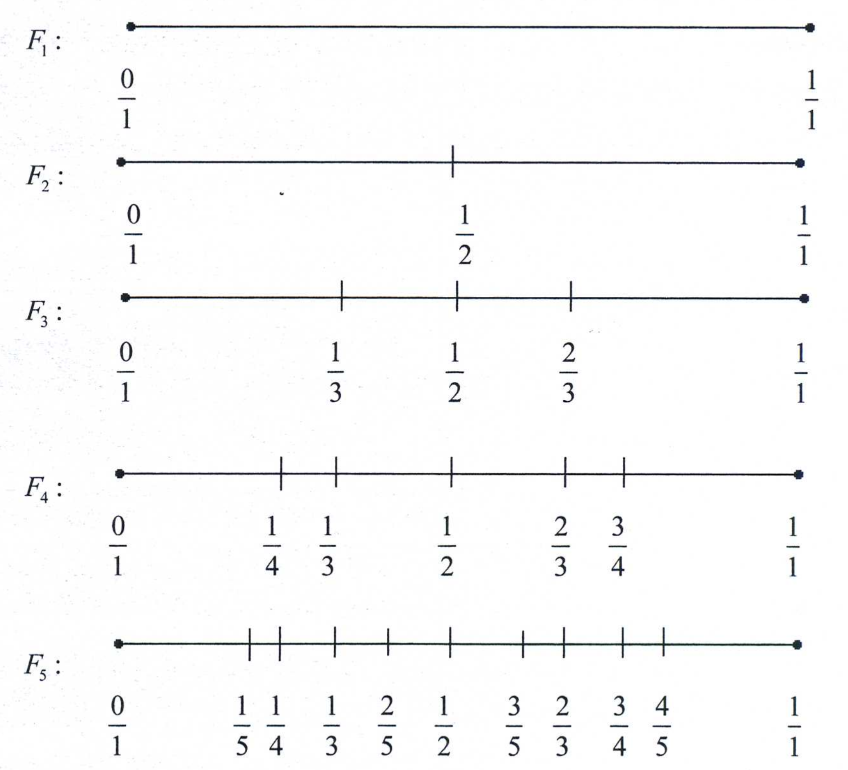

Abb. 1. Farey-Reihen F_1 bis F_5:

Definition: Zwei Brüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ heißen *Nachbarbrüche*,

wenn $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd}$ d. h. $bc - ad = 1$ gilt.

Kasten 1. Definition der Nachbarbrüche

[2] Z. B. sind u. E. in der Bruchrechnung die Begriffe »echte« und »unechte Brüche« bzw. »eigentliche« und »uneigentliche Brüche« durchaus verzichtbar.
[3] Dort wird eine *Aufgabe* formuliert, deren Bearbeitung von den Leserinnen und Lesern auf eine Art erwartet wird, die wohl ähnlich dem hier vorgeschlagenen Weg ist.

von Herrn WETH zum Thema Kreativität im Mathematikunterricht.
Insbesondere in jenen Bereichen, wo noch gewissermaßen Wahlfreiheit herrscht; bei etablierten Standardbegriffen hätte es natürlich keinen Sinn, dass jede Lerngruppe jeweils eigene Namen erfindet, so dass die Sprache der Mathematik keine eindeutigen Vokabeln mehr hätte.
Mit dem neu geschaffenen Begriff soll nun auch gearbeitet und seine Struktur genauer studiert werden. FREUDENTHAL nennt dies treffend *»lokales Ordnen«*. Dies ist ja eine typisch mathematische Tätigkeit, die hier auf schuladäquatem Niveau exemplarisch durchgeführt werden kann. Solche den neuen Begriff erforschende Tätigkeiten können durch geeignete Fragestellungen angeregt werden (möglichst nicht in der Form: »Man beweise, dass ...«). Dies ist sicher auch schon in Klasse 6 gut möglich; natürlich noch *nicht* die dann folgenden algebraischen Begründungen mit Variablen, aber erste Kontakte zu diesem Thema (ausprobieren, rechnen, vermuten, ..., »mit Brüchen spielen«) anhand konkreter Werte sind auch in Klasse 6 ein lohnendes Thema.

2.2 Interessante Eigenschaften von Nachbarbrüchen

In Kasten 2 findet man eine kleine Auswahl von Fragestellungen, die geeignet sind, den neuen Begriff besser zu begreifen (auch andere, von Lernenden gemachte Beobachtungen und Vermutungen bzw. gestellte Fragen sind oft interessant und einer näheren Betrachtung wert):

Die 7. Frage aus Kasten 2 mündet direkt in der Aussage:

Satz 1: Nachbarbrüche sind immer gekürzt!

Beweis: Wenn $\frac{a}{b}$ oder $\frac{c}{d}$ nicht gekürzt wäre, so wäre auch $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$ nicht gekürzt und könnte somit nicht Zähler 1 haben!

Die 8. Frage führt wieder zu einer Vermutung, die auch leicht bewiesen werden kann:

Satz 2: Zwischen Nachbarbrüchen können nur Brüche mit größerem Nenner liegen.

Beweis: Wenn $\frac{m}{n}$ ein Bruch zwischen den Nachbarbrüchen $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ist (siehe Abbildung 2), dann müssen die beiden Abstände von $\frac{m}{n}$ zu den Randbrüchen kleiner als die Länge des Gesamtintervalls sein:
$\frac{k}{bn} < \frac{1}{bd}$ und $\frac{\ell}{dn} < \frac{1}{bd}$ mit Zählern $k, \ell \geq 1$.

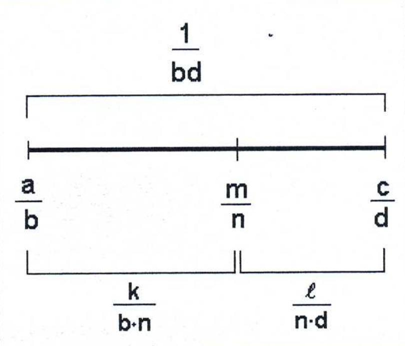

Abb. 2. Zum Beweis von Satz 2.

Daraus folgt unmittelbar $n > d$ und $n > b$.

3 Medianten

Es ist ein besonders häufiger Schülerfehler bei der Bruchaddition analog zur Multiplikation zu verfahren nach der Regel: Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner. Vielleicht könnte eine genauere Beschäftigung mit dieser Rechenart (nicht nur: sie ist falsch bei der Summenbildung) dazu beitragen, dass dieser Fehler nicht mehr so häufig vorkommt, wenn nämlich dem Term $\frac{a+c}{b+d}$ im Zusammenhang mit den Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ eine eigenständige (positive) Bedeutung bekommt, nicht nur die negative (falsche Summe), sondern als probates Mittel, bei zwei gegebenen Brüchen einen Bruch zwischen ihnen zu finden.[4]

Man kann leicht einsehen, dass der Wert von $\frac{a+c}{b+d}$ sicher zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegen muss:
Algebraisch lässt sich das leicht nachweisen: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
Auch durch Interpretation der beteiligten Brüche, z. B. als Säurekonzentrationen gelingt diese Einsicht:

1. Wie sehen Nachbarbrüche von 3/1 (oder allgemeiner: von ganzen Zahlen) aus?
2. Gibt es zu jedem vorgegebenen Bruch einen/mehrere Nachbarbrüche?
3. Kann es einen Bruch geben, der genau einen oder genau 2 (einen links und einen rechts) hat?
4. Spiele bzw. Wettbewerbe in der Klasse mit Motivations- und Aufforderungscharakter: Finde *möglichst viele* Nachbarbrüche zu 2/5. Wer findet den Nachbarbruch zu 2/5, der am weitesten entfernt von bzw. am nächsten zu 2/5 ist?
5. Finde Zähler *a* und *c* so, dass die Brüche *a*/5 und *c*/7 möglichst kleinen Abstand (≠ 0) haben. Sind sie Nachbarbrüche? Gibt es mehrere Möglichkeiten dafür? Oder anders formuliert: Welche Brüche *a*/5 und *c*/7 sind Nachbarbrüche? Gibt es mehrere?
6. Kann man Nachbarbrüche auch bei beliebigen vorgegebenen Nennern finden, z. B. bei *a*/6 und *c*/10? Worauf wird es dabei ankommen?
7. Gibt es ungekürzte Nachbarbrüche?
8. Wie sieht der Bereich zwischen 2 Nachbarbrüchen aus? Finde zwischen zwei Nachbarbrüchen weitere Brüche mit möglichst kleinem Nenner. Als Wettbewerb: wer findet den Bruch mit dem kleinsten Nenner zwischen 2/5 und 1/2?

Kasten 2. Lohnende Fragestellungen

[4] Auch die Addition relativer Häufigkeiten nach der falschen Regel liefert sinnvolle Ergebnisse.

Säurelösung 1: $\frac{a}{b}$ gebe ihre Konzentration an: a Liter Säure von b Liter Gesamtvolumen;

Säurelösung 2: $\frac{c}{d}$ gebe ihre Konzentration an: c Liter Säure von d Liter Gesamtvolumen.

Durch naiv gedachtes Zusammenschütten dieser Säurelösungen erhält man $a + c$ Liter Säure von $b + d$ Liter Gesamtvolumen: $\frac{a+c}{b+d}$; diese Säurekonzentration muss mit Sicherheit irgendwo zwischen den beiden Ausgangskonzentrationen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegen.

Man vergibt für den Term $\frac{a+c}{b+d}$ sogar einen eigenen Namen und hat damit eine sehr schnelle Möglichkeit, Zwischenbrüche zu vorgegebenen Brüchen zu finden.

Manchmal ist dafür auch der Begriff Chuquet-Mittel gebräuchlich (vgl. [4]) Zunächst wieder einige lohnende Forschungsfragen für Lernende, welche die beiden neuen Begriffe verbinden. (Kasten 4)

Durch Probieren kommt man bei den Fragen aus Kasten 4 schnell zu folgender Vermutung:

Satz 3: Die Mediante von Nachbarbrüchen ist ihrerseits Nachbarbruch zu den Ausgangsbrüchen (und somit nach Satz 1 gekürzt!)

Beweis: Die Begründung ergibt sich unmittelbar: Mit $bc - ad = 1$ (Nachbarbrüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$!) ist $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}$

$$= \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} = \frac{1}{b(b+d)}$$

und analog $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \ldots = \frac{1}{d(b+d)}$.

Noch eine Frage: Welche Brüche zwischen zwei vorgegebenen Brüchen sind Nachbarbruch zu den beiden Ausgangsbrüchen? Gibt es da immer welche? Gibt es manchmal sogar mehrere? Welche Brüche $\frac{1}{4} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$ sind Nachbarbrüche zu $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$? Welche Brüche $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < \frac{2}{3}$ sind Nachbarbrüche zu $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$?

Die Behandlung solcher Fragen hat FREUDENTHAL einmal treffend »Lokales Ordnen« (vgl. [3], S. 142) genannt: Ordnung bzw. Übersicht schaffen in die unmittelbaren Zusammenhänge eines Begriffes – hier durch die verallgemeinerte Umkehrfrage zu Satz 3. Dieses Umkehren der Betrachtungsweise ist eine besonders wichtige und typische Arbeits- und Denkweise in der Mathematik, die eine ihrer expliziten Stärken ist. Wieder ist eine entsprechende allgemeine Untersuchung der Lage sehr leicht:

Satz 4: Wenn der Bruch $\frac{m}{n}$ zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegt und Nachbarbruch zu ihnen ist, so muss er deren gekürzte Mediante sein.

Beweis: Wenn $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$ und $\frac{m}{n} < \frac{c}{d}$ Nachbarbrüche sind, so gilt: $\begin{matrix} bm - an = 1 \\ cn - dm = 1 \end{matrix}$.

Durch Gleichsetzen der beiden linken Seiten erhält man daraus unmittelbar $\frac{m}{n} = \frac{a+c}{b+d}$. Nach Satz 1 ist klar, dass hierbei die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{c}{d}$ gekürzt sind; $\frac{a+c}{b+d}$ braucht nicht notwendig gekürzt zu sein. Z. B. hatten wir in F_3 (siehe oben) so einen Fall: $\frac{1}{2}$ ist Nachbarbruch zu $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ und ist deren gekürzte Mediante:

$$\frac{1}{3} < \underbrace{\frac{1+2}{3+3}}_{1/2} < \frac{2}{3},$$

dort haben wir geschrieben *»in manchen Fällen muss noch gekürzt werden«*. Wenn bereits a/b und c/d Nachbarbrüche sind, so muss die Mediante schon gekürzt sein (siehe Satz 3 bzw. Satz 1).

Hiermit ist übrigens keine Aussage darüber getroffen, zu welchen Brüchepaaren $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ es überhaupt einen Bruch $\frac{m}{n}$ zwischen ihnen gibt, der Nachbarbruch zu beiden ist, nur: *wenn* es einen gibt, dann muss er die gekürzte Mediante sein! Auch das ist eine spannende Frage, deren Beantwortung den Rahmen dieses Beitrages jedoch sprengen würde und auf Nachfrage vom Autor angefordert werden kann.

4 Mediantenreihen bei Nachbarbrüchen

Wir wollen nun ausgehend von zwei Nachbarbrüchen die Mediantenbildung so oft hintereinander machen, dass einige Brüche im Intervall $\left[\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right]$ entstehen (Teilungspunkte; Abb. 3): der erste Teilungspunkt ist also $\frac{m_1}{n_1}$, die Mediante von $\left[\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right]$ als nächstes setzen wir den Teilungspunkt $\frac{m_2}{n_2}$, die Mediante von $\left[\frac{a}{b}; \frac{m_1}{n_1}\right]$ dies setzen wir einige Male fort, indem wir immer wieder zu benachbarten Brüchen die Mediante als neuen Teilungspunkt einsetzen (in beliebiger Reihenfolge, d. h. $\frac{m_3}{n_3}$ könnte genau so gut die Mediante von $\left[\frac{a}{b}; \frac{m_2}{n_2}\right]$ oder $\left[\frac{m_2}{n_2}; \frac{m_1}{n_1}\right]$ sein).

Definition: $\frac{a+c}{b+d}$ heißt Mediante zu den Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (liegt immer zwischen ihnen).

Kasten 3. Definition der Mediante

- Nimm zwei Nachbarbrüche und bilde deren Mediante, z. B. $\frac{1}{4} < \frac{1+1}{4+3} = \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$. Die Mediante $\frac{2}{7}$ ist hier wieder ein Nachbarbruch zu $\frac{1}{4}$: $\frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8-7}{7 \cdot 4} = \frac{1}{7 \cdot 4}$; analog stellt sich heraus, dass $\frac{2}{7}$ auch Nachbarbruch zu $\frac{1}{3}$ ist. Ist dies immer so, oder kann man Nachbarbrüche finden, so dass die Mediante kein Nachbarbruch zu den Ausgangsbrüchen ist?
- Hier war die Mediante $\frac{2}{7}$ auch ein gekürzter Bruch; kann man Nachbarbrüche finden, so dass deren Mediante ein nicht gekürzter Bruch ist?

Kasten 4. Eigenschaften der Mediante

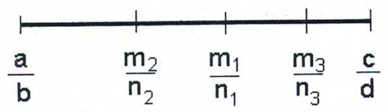

Abb. 3. Fortgesetzte Mediantenbildung erzeugt Teilungspunkte

Wir wollen zu so einem Gebilde *Mediantenreihe* sagen. Wegen Satz 3 ist klar, dass je zwei aufeinander folgende Brüche einer Mediantenreihe Nachbarbrüche sind, gleichgültig, wie weit man die Mediantenbildung getrieben hat, gleichgültig in welcher Reihenfolge diese erfolgt ist. D. h. durch Mediantenbildung bekommt man nicht nur irgendwelche Zwischenbrüche, sondern sie ist ein leichtes Mittel, zu vorgegebenen Nachbarbrüchen neue Nachbarbrüche zu produzieren.
Viele Brüche einer Mediantenreihe sind laut Konstruktion die Mediante der benachbarten Brüche (oben z. B. $\frac{m_2}{n_2}$ und $\frac{m_3}{n_3}$). $\frac{m_1}{n_1}$ ist zwar laut Konstruktion Mediante von $\left[\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right]$, aber nicht von $\left[\frac{m_2}{n_2}; \frac{m_3}{n_3}\right]$. Wegen Satz 4 muss dies aber doch der Fall sein. D. h. wir können allgemein formulieren (man braucht dazu keinen strengen Induktionsbeweis zu führen):

Satz 5: In einer Mediantenreihe, die von 2 Nachbarbrüchen ausgeht, sind je 2 aufeinander folgende Brüche Nachbarbrüche und jeder innere Bruch ist die gekürzte Mediante seiner beiden Nachbarn.

4.1 Spezielle Mediantenreihen

In den obigen Betrachtungen spielte das genaue Zustandekommen der Mediantenreihe keine Rolle. Im Folgenden wollen wir spezielle Mediantenreihen M_n betrachten, die durch zwei Bedingungen festgelegt sind:

1. Die Start-Nachbarbrüche sind $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$.
2. Wir führen die Mediantenbildung genau so lange durch, bis man keine Medianten mehr mit Nenner $\leq n$ eintragen kann.

Die Mediantenreihe M_4 ist z. B. in Abbildung 4 dargestellt.

Der Reihe nach ergeben sich zunächst die Medianten $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Nun kann man bei M_4 die Mediantenbildung nicht in $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ und auch nicht in $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$ fortsetzen, da sich jeweils der Nenner 5 ergäbe; in $\left[\frac{0}{1}; \frac{1}{3}\right]$ bzw. $\left[\frac{2}{3}; \frac{1}{1}\right]$ kann noch je eine Mediante mit Nenner ≤ 4 gebildet werden: $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$. Jede weitere Mediantenbildung würde zu einem Nenner ≥ 5 führen.

Erweitert man nun M_4 zu M_5, so erhält man Abbildung 5.

4.2 Bemerkungen zu den Mediantenreihen

- In M_n kann es keine benachbarten Brüche geben mit einer Nennersumme $\leq n$ (denn sonst würde deren Mediante in M_n fehlen, M_n wäre noch nicht vollständig).
- Nach Satz 3 bzw. Satz 1 ist nun klar, dass alle auftretenden Brüche in M_n gekürzt sind; daher gibt es im Intervall [0 ; 1] außer den Brüchen von M_n sicher noch andere ungekürzte Brüche mit Nenner $\leq n$, z. B. für M_4: $\frac{0}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}$; zusätzlich in M_5 nicht vorhandene Brüche wären noch 0/5 bzw. 5/5.
- Gekürzte Brüche mit Nenner $n + 1$ können natürlich nur zwischen den Brüchen von M_n liegen, Gleichheit mit einem der Brüche von M_n ist nicht möglich.

4.3 Zur Vollständigkeit der Mediantenreihen

An dieser Stelle drängt sich natürlich die folgende Frage geradezu auf: Enthält M_n a l l e gekürzten Brüche in [0 ; 1] mit Nenner $\leq n$? Oder gibt es eventuell noch andere?
Hierzu wird man zunächst die Mediantenreihen bis ca. M_8 bilden und sehen, dass die Vermutung nahe liegt:

Satz 6: In der Mediantenreihe M_n liegen a l l e gekürzten Brüche mit Nenner $\leq n$

Wenn wir dies allgemein eingesehen haben, dann ist klar: die Farey-Reihe F_n ist dasselbe wie die Mediantenreihe M_n und wegen Satz 5 sind dann die Medianten- und die Nachbarbrucheigenschaft in F_n geklärt. Für die entsprechende Begründung von Satz 6 haben wir schon das entsprechende Rüstzeug; wir müssen nur noch aus dem Obigen ernten, insbesondere aus Satz 2. Auch ohne das Prinzip der vollständigen Induktion beim Namen zu nennen ist es möglich, eine Einsicht in Satz 6 zu schaffen, indem exemplarisch ein Übergang, z. B. ausgehend von der letzten tatsächlich angeschriebenen Mediantenreihe, also z. B. $M_8 \rightarrow M_9$, beleuchtet wird.
Dazu zunächst folgende Fragen:

- Wie können wir begründen, dass M_9 vollständig ist, ohne M_9 wirklich hinzuschreiben?
- Wie kann die Vollständigkeit von M_9 aus jener von Abb. 5. (Mediantenreihe M5) begründet werden?

Man sieht: In M_8 kommen alle gekürzten Brüche mit Nenner ≤ 8 vor. Gekürzte Brüche mit Nenner 9 kön-

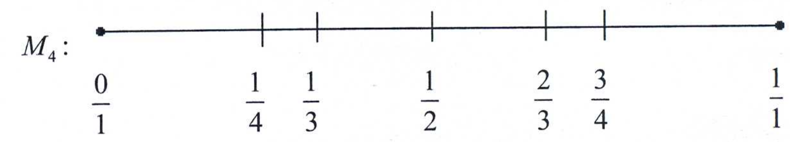

Abb. 4. Mediantenreihe M_4

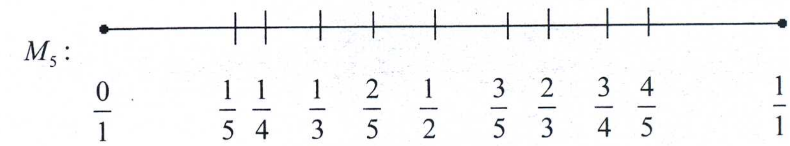

Abb. 5. Mediantenreihe M_5

nen nur zwischen den Brüchen aus M_8 liegen. Es kann in M_8 keine Nachbarbrüche mit Nennersumme $\leq$ 8 geben (sonst wäre M_8 noch nicht vollständig). Zwischen Nachbarbrüchen in M_8 mit Nennersumme 9 liegt jeweils die zugehörige Mediante mit Nenner 9, aber wegen Satz 2 sicher kein weiterer Bruch mit Nenner 9. Zwischen Nachbarbrüchen in M_8 mit Nennersumme $s > 9$ liegt die Mediante mit Nenner s und dazwischen kann analog wegen Satz 2 kein Bruch mit Nenner 9 liegen. Also erhält man durch Einfügen der Medianten mit Nenner 9 sicher alle gekürzten Brüche mit Nenner 9.
Es ist klar, dass diese Argumentation auch für andere Übergänge und somit allgemein gilt. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn mit Schülern gearbeitet wird, die das Prinzip der vollständigen Induktion noch nicht kennen (weil es im Curriculum noch zu früh ist, oder vollständige Induktion gar nicht mehr im Lehrplan ist). Bei einem formalen Induktionsbeweis ist diese Erblichkeit $n \to n + 1$ allgemein zu zeigen: Dazu setzen wir voraus, dass in M_n wirklich alle gekürzten Brüche mit Nenner $\leq n$ stehen, und haben mit dieser Voraussetzung die entsprechende Behauptung für $n + 1$ zu zeigen:

Zwischen welchen benachbarten Teilungspunkten (Brüchen) in M_n können überhaupt gekürzte Brüche mit Nenner $n + 1$ liegen?

- Benachbarte Brüche mit Nennersumme $< n + 1$ gibt es in M_n nicht (siehe obige Bemerkung).

- Zwischen benachbarten Brüchen mit Nennersumme $n + 1$ liegt jeweils die zugehörige Mediante mit Nenner $n + 1$, aber keine weiteren Brüche mit Nenner $n + 1$.
  Beweis:
  $$\frac{a}{b} < \underbrace{\frac{a + a'}{b + b'}}_{= n+1} < \frac{a'}{b'};$$
  nach Satz 2 liegen nämlich in $\left(\frac{a'}{b'}; \frac{a + a'}{b + b'}\right)$ und in $\left(\frac{a + a'}{b + b'}; \frac{a'}{b'}\right)$ nur Brüche mit größerem Nenner als $b + b' = n + 1$.
  $\underbrace{\frac{a + a'}{b + b'}}_{= n+1}$ ist also der einzige Bruch mit Nenner $n + 1$ in $\left[\frac{a}{b}; \frac{a'}{b'}\right]$.

- Zwischen benachbarten Brüchen mit Nennersumme $s > n + 1$ liegt wieder die Mediante mit Nenner s und dazwischen können aus analogem Grund keine Brüche mit Nenner $n + 1$ liegen.
  Beweis:
  Bei $\frac{a}{b} < \underbrace{\frac{a + a'}{b + b'}}_{= s > n+1} < \frac{a'}{b'}$
  können wegen Satz 2 sowohl in $\left(\frac{a}{b'}; \frac{a + a'}{b + b'}\right)$ als auch in $\left(\frac{a + a'}{b + b'}; \frac{a'}{b'}\right)$ nur Brüche mit größerem Nenner als $s = b + b' > n + 1$ liegen; daher kann es in $\left[\frac{a}{b}; \frac{a'}{b'}\right]$ keinen Bruch mit Nenner $n + 1$ geben.

5 Anmerkungen zum gewählten Zugang

Der mathematische Kern von Farey-Reihen besteht in Nachbarbrüchen und Medianten. Wenn man ausgehend von Farey-Reihen versucht, ihre entsprechenden überraschenden Eigenschaften zu beweisen (Medianten- und Nachbarbrucheigenschaft), werden die Beweise meist relativ technisch und unanschaulich. Dreht man hingegen die Betrachtungsrichtung um, kann man sich ausgehend von speziellen Mediantenreihen auf sehr anschaulichem und genetischem Weg davon überzeugen, dass es sich um Farey-Reihen handelt. Vom Kern einer Sache irgendwohin vorzustoßen, ist eben meist leichter und anschaulicher als diesen Kern erst mal zu suchen.
Wenn man Farey-Reihen thematisieren will, so halten wir es für besser, dieses überraschende Phänomen an den Beginn der Betrachtungen zu stellen, denn Überraschungen haben oft hohes Motivationspotenzial. Bei den Begründungen scheint uns der hier dargestellte umgekehrte Weg (oder ein ähnlicher) der angemessenere zu sein, insbesondere für die Schule, da viel Eigenaktivität und Selbständigkeit der Lernenden möglich wird.

Bei einem Einstieg mit Nachbarbrüchen und Medianten (ohne Farey-Reihen überhaupt zu erwähnen) wird man von Satz 6 vielleicht nicht mehr so überrascht sein, sondern dies' vielleicht sogar erwarten. Wenn aber Farey-Reihen gar nicht das Thema sein sollen, ist die zugehörige Überraschung auch verzichtbar, denn die Sätze 1–6 oder auch nur bis Satz 5 und die damit verbundenen Aktivitäten (vgl. auch die anderen oben genannten Fragen) sind auch für sich genommen ein sehr lohnendes Thema unter dem Aspekt der Verwirklichung produktiver bzw. substanzieller Lernumgebungen.

6 Zusammenfassung und didaktischer Kommentar

Insgesamt gibt es unserer Ansicht zu wenige Gelegenheiten, wo ausgehend von einem bestimmten Phänomen, Mathematik als Prozess so gut auf ganz elementarem Niveau betrieben werden kann. Wir sehen deshalb in diesem Thema eine sehr gute Möglichkeit, viele neuere didaktische Prinzipien zu verwirklichen (siehe Kasten 5), so dass uns dieses Thema insgesamt ein sehr hohes (fachliches und didaktisches) Potenzial zu haben scheint und damit sehr lohnend für den Unterricht in verschiedenen Stufen ist. Mehr solche Gelegenheiten bereitzustellen und für einen konkreten Unterricht aufzuarbeiten, darin sehen wir auch eine sehr wichtige Entwicklungsaufgabe der Mathematikdidaktik (d. h. Stoffdidaktik in einem zeitgemäßen Sinn, nicht im Sinne der 70er Jahre) – neben ihrer ebenso wichtigen Forschungsaufgabe.

Literatur

[1] M. BRUCKHEIMER – A. ARCAVI: Farey Series and Pick's Area Theorem. – The Mathematical Intelligencer **17** (1995), Nr. 4, 64–67.

[2] J. FAREY: On a curious property of vulgar fractions. In: *Philosophical Magazine* **47** (1816), 385–386.

[3] H. FREUDENTHAL: Mathematik als pädagogische Aufgabe Band 1. – Stuttgart: Klett 1973.

[4] H. HISCHER: Mittelwertfolgen – oder: Mitten inmitten von Mitten. – Mathematikunterricht Der Mathematikunterricht **50** (2004), Nr. 5, 42–54.

[5] G. N. MÜLLER – H. STEINBRING – E. CH. WITTMANN (Hrsg.): Arithmetik als Prozess. – Seelze: Kallmeyer 2004.

[6] H. SCHEID: Zahlentheorie. – Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag 2003.

Operative Begriffsbildung: Die beiden zugrunde liegenden Begriffe Nachbarbruch und Mediante entstehen unmittelbar aus Operationen: Bei der Differenzbildung von Brüchen passiert es oft, dass sich im Nenner das Produkt der Faktoren und im Zähler (ohne Kürzen!) 1 ergibt, so dass der neue Name Nachbarbruch aus Schülersicht etwas durchaus Natürliches ist. Auch der Begriff der Mediante entsteht aus einer operativen Fragestellung: Was passiert, wenn man Zähler und Nenner getrennt addiert? Antwort: man erhält einen Zwischenbruch, so dass dem zugrunde liegenden Term auch eine positive eigenständige Bedeutung zukommt.

Selbständiges und forschendes Lernen: Durch das Beobachten von »Phänomenen« und geeignete Fragestellungen (siehe z. B. die 8 Aufgabenstellungen im Kasten 2; auch noch andere möglich!) erarbeiten Schülerinnen und Schüler das Umfeld des neuen Begriffes (lokales Ordnen im Sinne von FREUDENTHAL) – **Mathematik** mehr als **Prozess**. Diese für die Mathematik besonders typische Tätigkeit kann hier exemplarisch auf ganz elementarem Niveau geschehen, noch bevor zugehörige algebraische Begründungen im Zentrum stehen. Es geht dabei nicht nur um eine Erklärung der Farey-Phänomene, sondern auch um interessante überschaubare Fragen, die zum Erkunden anregen, um einen verständigen Umgang mit Brüchen mit viel Experimentieren und Rechenübungen: entdeckendes Üben, übendes Entdecken (im Sinne von WINTER).

Substanzielle Lernumgebung: Das Thema hat genügend Potenzial für eine ganze Lernumgebung auf verschiedenen Niveaustufen: Dabei müssen die Bemühungen nicht zwangsläufig auf die Farey-Phänomene hinauslaufen, auch viele Aktivitäten im Vorfeld sind für sich genommen spannende Herausforderungen. Über die Klassenstufen hinweg scheinen folgende Aktivitäten möglich:
Klasse 6: mit Brüchen spielen – z. B. die in den Kästen genannten Aufgabenstellungen oder auch andere; Klasse 7–8: algebraische Begründungen zu den 8 genannten Aufgabenstellungen und die Sätze1 bis 5; Klasse 9: Vollständigkeit von M_n, d. h. die Erkenntnis, die in Satz 6 formuliert ist.

Historische Bezüge: Sie machen ein Thema i. A. interessant, spannend und lebendig. Die Geschichte der erstmalige(n) Entdeckung(en) der beschriebenen Phänomene kann durchaus Interesse wecken und Lust auf mehr machen.

Kasten 5. Verwirklichung didaktischer Prinzipien im Themenkomplex Farey-Brüche

[7] G. PICKERT: Entdecken und Beweisen bei Farey-Folgen. – Praxis der Mathematik **46** (2004), Nr. 4, 161–164.

[8] K. VOGELSBERGER: »Drachelo-« und »Trapelo-gramme«. Die abbildungsgeometrische Erschließung der Struktur im »Haus der Vierecke«. – Mathematiklehren, Heft 60 (1993) 68–74.

HANS HUMENBERGER, Hans.Humenberger@univie.ac.at, Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Nordbergstraße 15 (UZA 4), A – 1090 Wien.

Diskussion und Kritik

HANS PETER DREYER

Zu: Keine Angst vor Mathematik

(Prof. Dr. M. SPITZER in MNU **61** (2008) Nr. 8, 509)

Es ist erstaunlich, dass ein international anerkannter Forscher, der in einem so komplexen Gebiet arbeitet, wie es die Hirnforschung ist, eine derart eindimensionale Erklärung für Probleme gibt, die die ganze westliche Zivilisation mit der Mathematik hat.
Wenn man nur auf die Schule fokussiert, müsste man die Schuld den Lehrerinnen der ersten Klassen in die Schuhe schieben. Das würde heissen, dass sie im Mathematikunterricht einen anderen Stil pflegten als in den anderen Fächern.
Wer aber die Situation der Mathematik voran bringen will, muss über den Rahmen des schulischen Mathematik-Lernens hinaus blicken. Beispielsweise zum erfolgreichen DIETRICH SCHWANITZ (Bildung – Alles, was man wissen muss, im Kapitel »Was man nicht wissen sollte«): Wer nicht als ungebildet eingestuft werden will, soll seine Kenntnisse über Technik und Naturwissenschaften unter Verschluss halten. Mathematik ist derart belanglos, dass SCHWANITZ sie nicht einmal erwähnt!

Jede Schule ist ein Spiegel der Gesellschaft. Interesse für abstrakte Strukturen war zu allen Zeiten weniger »cool« als beispielsweise für rasches Geld. Und nicht allen Kindern sind die gleichen Fähigkeiten in die Wiege gelegt. Es gibt deshalb keine einfache Antwort auf die vielen Fragen im Umfeld des Mathematikunterrichts! Das schliesst die selbstverständliche Forderung nicht aus, jedes Lernen – vom Elternhaus bis zur Universität – müsse in einem möglichst angstfreien Klima von statten gehen.

HANS PETER DREYER, dipl. Phys. ETH, Präsident Verein Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer, hp.dreyer@vsg-sspes.ch