Über- und unterbestimmte Aufgaben im Mathematikunterricht

Hans Humenberger

1 Einleitung

Das Lösen von Aufgaben spielt wahrscheinlich in jedem Mathematikunterricht eine zentrale Rolle, wobei in der gemeinhin üblichen Version die Schüler so gut wie immer davon ausgehen können, daß die gerade zu lösende Aufgabe *eindeutig lösbar* ist (mit Ausnahme von quadratischen Gleichungen oder Konstruktionsaufgaben, die eventuell zwei Lösungen haben, etc.). Vom „Angabematerial" kann *die* gesuchte Größe meist direkt berechnet werden, und zwar dergestalt, daß erstens *alle gemachten* Angaben tatsächlich benötigt werden – Redundanzfreiheit! –, aber andererseits auch alle *benötigten* Angaben *wirklich zur Verfügung* stehen. Meist sind noch dazu die Zahlen so gewählt, daß „das Beispiel aufgeht", d. h., daß sich ein „schönes" (i. e. möglichst ganzzahliges) Resultat ergibt. Ein *Überbleiben* bzw. *Fehlen* von Daten wird von Schülern i. a. nur als „Warnung" interpretiert: „Wenn zur Lösung einige Angaben gar nicht gebraucht wurden, dann ist wohl der gewählte Rechengang falsch (zu einfach)" bzw. „Wenn ich mit den angegebenen Daten nicht auskomme, dann habe ich zu wenig gelernt, dann fehlt mir eine Formel".

In der „Praxis" – und damit meinen wir nicht nur die Praxis eines professionellen Anwenders von Mathematik, sondern auch den Bereich eines engagierten „Durchschnittsbürgers", der „mathematisch mündig" ist und selber einige Sachverhalte durchdenken will, – stellen sich „Probleme" nicht immer in der Form, daß eine genau *passende* Menge von Daten vorgegeben ist, die *notwendig* und *hinreichend* für die Bestimmung eines speziellen, interessierenden Wertes ist. Es müssen oft zuerst Überlegungen folgender Art angestellt werden:

- Wie kann die interessierende Frage in eine mathematisch beantwortbare übersetzt werden? Welche *mathematische(n)* Größe(n) ist (sind) aufgrund der gegebenen Aufgabenstellung überhaupt zu bestimmen?
- Welche (z. B. physikalischen) Größen müssen bekannt sein (z. B. durch Nachschlagen, Angabe, Messung etc.), um auf den/die jeweiligen gesuchten Wert(e) schließen zu können?
- Gibt es mehrere Möglichkeiten zur Lösung des gegebenen Problems?
- Wie genau soll das Ergebnis vorliegen? Welche Auswirkungen haben Fehler? Wie genau müssen daher die Eingangswerte vorliegen?
- Kann das Ergebnis durch weitere Messungen oder dergleichen abgesichert werden? Gibt es eine Art „Probe"? usw.

Wir glauben, der Unterricht sollte diesen Umständen sehr wohl Rechnung tragen und auch Aufgaben behandeln, in denen Genauigkeits- bzw. Fehlerfragen eine Rolle spielen und in denen die Schüler nicht sicher sein können, daß tatsächlich alle Angaben benötigt, oder daß umgekehrt keine weiteren Daten benötigt werden. Dies läge nicht zuletzt auch im Sinne einer (u. E. notwendigen) stärkeren Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts. Wenn die Angabedaten nicht ausreichen, um die gestellte Frage zu beantworten, sollten die Schüler Vorschläge machen, *welche* zusätzlichen Daten bekannt sein müßten. Im Falle des „Überbleibens" von Angaben könnte gefragt werden: Lassen sich vielleicht andere Fragestellungen mit den nicht verwendeten Daten beantworten? Wenn ja, welche? Die Angabe könnte auch widersprüchliche Daten[1]) enthalten, in diesem Fall sollte die Aufforderung an die Schüler ergehen, die Angabe so abzuändern, daß alle Daten „in Einklang" stehen.

Die Beschäftigung mit über- und unterbestimmten Problemen soll sich u. E. wie ein roter Faden durch den gesamten Mathematikunterricht ziehen [2]) – beinahe jedes Stoffgebiet ist offensichtlich dazu geeignet –, man braucht ja „nur" zu herkömmlichen Angabe(texte)n einiges hinzufügen oder/und etwas wegnehmen! Man wird (besonders am Anfang) natürlich oft dazusagen, daß „Vorsicht" bei der folgenden Aufgabe geboten ist, vielleicht sogar in welcher Hinsicht dies gemeint ist, d. h. ob sie über- oder unterbestimmt ist. Mit der Zeit sollte es jedoch nichts Ungewöhnliches für Schüler mehr sein, wenn bei Angaben „etwas fehlt" oder „etwas überbleibt", und es sollte zur Selbstverständlichkeit werden, entsprechend zu reagieren: Bei überflüssigen Daten, anzugeben, welche dies sind, allenfalls ob sie für andere Fragestellungen verwendet werden könnten oder ob sie sogar Widersprüche enthalten, und bei fehlenden Angaben, notwendige Annahmen (konkret oder in Form einer Variable) in Eigenregie zu machen.

Mögliche Formen der Aufgabenstellung – neben der klassischen Über- bzw. Unterbestimmung – wären auch folgende:

1. *Keine Angaben, konkretes Ziel:* Es ist eine gewisse Situation beschrieben (ohne konkrete Zahlenangaben) und das „Ziel" ist deklariert: Eine bestimmte (z. B. nicht direkt meßbare) Größe. Welche „Eingangsgrößen" sollte man messen? Beschreibe den Rechenweg z. B. mit Hilfe von Variablen! (Die konkrete numerische Durchrechnung braucht sicher *nicht* jedesmal durchgeführt zu werden!) Gibt es mehrere Möglichkeiten? Wie könnte man das errechnete Ergebnis gegebenenfalls kontrollieren? etc.

---

[1]) Die Form mit widersprüchlichen Daten wird wahrscheinlich nicht ganz am Anfang der Beschäftigung mit Aufgaben dieses „neuen" Typs stehen, ist aber bei entsprechender „Warnung" u. E. doch relativ früh einsetzbar!

[2]) Dies ist charakteristisch für eine sogenannte „Fundamentale Idee" – vgl. [2] – und für eine solche kann *Über- und Unterbestimmung* u. E. durchaus gehalten werden!

2. *Viele Angaben, kein Ziel:* Eine Situation ist mit vielen Daten (konkrete Werte oder Variablen) beschrieben (vgl. Beispiel 2.3, S. 2), und die Schüler werden aufgefordert, möglichst viele sinnvolle Fragen zu formulieren (allenfalls auch zu beantworten)!

Das Bearbeiten von über- und unterbestimmten Problemen ist u. E. ein probates Mittel, den „Geist zu schärfen", die Fähigkeit in Schülern zu fördern, die Struktur (das Wesentliche, den Kern) von Aufgaben besser zu „durchschauen" und (umgangs-) sprachliche Formulierungen besser in mathematisch beantwortbare Fragen übersetzen zu können – eine Fähigkeit, die einhergeht mit jener, Mathematik „anwenden" zu können, die wirklich jeder bei den sich ihm stellenden (mathematisierbaren) Problemen dringend braucht (in der Schule *und* später) und die uns Mathematiklehrern deshalb doch sehr am Herzen liegen sollte!

2 Ergebnisse einer empirischen Untersuchung

H.-P. Linke führte 1991 eine Untersuchung zum Thema „Individuelle Leistungsunterschiede beim mathematischen Modellieren" u. a. mit folgenden Aufgaben in drei Klassen der 5. Schulstufe durch:

Beispiel 2.1 ([3], S.53)

Die 5. Klasse der Einstein-Schule hat in ihrer Klassenkasse *a* DM. Insgesamt sind in dieser Klasse *b* Schüler. Die Klasse 6 hatte *c* DM in ihrer Klassenkasse. Die 6. Klasse unternahm eine Ausfahrt, die insgesamt *d* DM kostete. Dieses Geld wurde benötigt, um mit *e* DM die Fahrtkosten zu bezahlen und für jeden der *f* Schüler ein Mittagessen zu kaufen.

a) Wieviel kostete das Mittagessen für einen Schüler?

b) Welche Angaben im Text hast Du zur Lösung der Aufgabe a) nicht benötigt?

Seiner detaillierten Aufschlüsselung der Ergebnisse ist u. a. zu entnehmen, daß die relative Häufigkeit der „sinnvollen Ansätze" in den drei Klassen 14 %, 11 % bzw. 5 % betrug, wobei in den Klassen 1 und 2 alle sinnvollen Ansätze gleichzeitig eine vollständig richtige Lösung darstellten, während in Klasse 3 *keiner* dieser 5 % die Aufgabe zu einem vollständig richtigen Ende führen konnte. Bei einer Analogaufgabe mit konkreten Zahlenwerten statt den Variablen, die die Schüler nach der obigen Aufgabe zu bearbeiten hatten – die Lösungen der ersten Aufgabe wurden vorher eingesammelt –, betrug die Quote der „sinnvollen Ansätze" in den drei Klassen zwar 86 %, 67 % und 55 %, aber jene der vollständig richtigen Lösungen nur 29 %, 22 % bzw. 10 %. Man kann u. E. daraus nicht nur die erheblichen Leistungsunterschiede einzelner Schüler bzw. Klassen ersehen, sondern auch allgemein die Schwierigkeiten vieler Schüler, Sachverhalte in ihrer Gesamtstruktur richtig zu erfassen, sie in einem richtigen mathematischen Modell wiederzugeben und dafür genau dic benötigten Daten zu deklarieren.

Ein weiteres Beispiel, das in der genannten Untersuchung von 80 Schülern (Mitte des 5. Schuljahres) zu bearbeiten war, ist das folgende. Es stellt sowohl hinsichtlich der Struktur des Sachverhaltes als auch zusätzlich durch den langen Text und die Vielzahl der darin enthaltenen überflüssigen Daten sehr hohe Anforderungen. Es sollte damit die obere Grenze der Möglichkeiten ausgelotet und geprüft werden, wie sich leistungsschwächere Schüler bei derartigen Aufgaben verhalten:

Beispiel 2.2 ([3], S.54)

Ein Güterzug mit 45 Wagen hat eine Länge von 500 m und fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Er fährt um $14^{h}30$ in A-dorf los. Unter den Wagen befinden sich Kesselwagen von 10 m Länge und drei Kesselwagen von 12 m Länge. Die restlichen Wagen sind offene Güterwagen. Für die Fahrt über eine 35 m hohe und 1,5 km lange Brücke benötigt dieser Zug 4 Minuten. Diese Zeit ist von dem Zeitpunkt an gerechnet, zu dem die Spitze des Zuges die Brücke befährt, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem das Ende des Zuges die Brücke verläßt. Das nachfolgende Gelände steigt in einem Winkel von 5° an. Um $15^{h}30$ erreicht die Spitze des Zuges einen Güterbahnhof, der vom Ende der Brücke 6,5 km entfernt ist.

a) Wieviel Minuten, nachdem der letzte Wagen die Brücke verlassen hat, erreicht die Spitze des Zuges den Güterbahnhof?

b) Gib an, welche Angaben Du zur Lösung der Frage a) nicht benötigst!

Von den 80 Schülern waren etwa 6 % in der Lage, bei b) genau die überflüssigen Daten anzugeben, aber *keiner* konnte Teil a) richtig lösen. *Linke* schreibt dazu:

„Bezüglich der Aufgabe a) waren die weitaus meisten Schüler absolut überfordert. Bei vielen blieb das Blatt leer oder es befand sich dort nur eine unbrauchbare Skizze. Bei anderen enthielten die angefertigten Skizzen strukturelle Fehler. Viele operierten wahllos mit einigen Daten. Bei etwa 10 % der Schüler kann man davon ausgehen, daß sie einen prinzipiell richtigen Zugang zum Problem gefunden hatten, aber die Struktur nicht vollständig richtig erfaßten. Hauptproblem war die Zuordnung der zur Fahrzeit von 4 min gehörenden Strecke." ([3], S.54).

Bei einem weiteren Beispiel aus der selben Arbeit wurden die Schüler angehalten, aus einer vorgegebenen Datenmenge *selber* sinnvolle Fragen zu formulieren, u. E. ebenfalls eine Art der Aufgabenstellung, die i. a. viel zu selten angewendet wird:

Beispiel 2.3 ([3], S.55)

Eine Landverkaufsstelle wird zweimal wöchentlich mit einem LKW vom 25 km entfernten Großhandelslager mit Waren beliefert. Dieser LKW benötigt im Durchschnitt für 100 km 20 *l* Treibstoff. Neben verschiedenen anderen Artikeln enthält jede Lieferung 5 Kartons mit Waschpulver. Die in diesen Kartons verpackten Waschmittelpakete enthalten je 200 g Waschpulver und haben die Maße 9,4 cm, 13,5 cm und 4,8 cm. Die Kartons sind 40 cm lang, 27,2 cm breit und 24,2 cm hoch. Formuliere selbst möglichst viele sinnvolle Fragestellungen, die sich an den beschriebenen Sachverhalt anschließen lassen, so daß eine Sachaufgabe entsteht.

Es konnte festgestellt werden, daß nur ein sehr kleiner Teil der Schüler nicht in der Lage ist, zumindest wenige sinnvolle Fragestellungen zu ergänzen, es wurden aber z B. auch Fragen gestellt wie: „Wieviel Liter Treibstoff benötigt der LKW für 100 km?", „Wieviel Waschpulver wird benötigt?", „Berechne die durchschnittliche Größe der Kartons!" oder „Berechne alle zusammenpassenden Einheiten!" Die Themen der sinnvollen Fragen waren relativ breit gestreut, ebenso die individuellen Leistungsunterschiede der Schüler (sowohl was die Anzahl und Qualität der sinnvollen Fragen, als auch was die Sprachbefähigung betrifft).

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Anzahl der sinnvollen Fragen, die jeweils von den Schülern gestellt wurden[3]).

Anzahl sinnvoller Fragestellungen	0 - 2	3 - 4	5 - 8	9 - 11	12 - 15
Anteil der Schüler in %	12,5	7,5	47,5	21,5	10

Tabelle 1: Ergebnis der Untersuchung von *Linke* 1991

Mathematisches Modellieren, der Umgang mit Texten, das Erkennen von Strukturen, auf die mathematische Verfahren anwendbar sind (passen), vielfältige Übersetzungen, Interpretationen, das Erkennen von überflüssigen bzw. fehlenden Angaben usw. sind Tätigkeiten, die bisher im Unterricht sicher zu wenig forciert wurden, von denen man i. a. gehofft hat, daß sich die dazu nötigen Fähigkeiten im Laufe der Zeit von selbst herausbilden – wenn sie nur punktuell und mechanisch geübt werden (z. B. bei den obligaten „Textgleichungen") – , die aber in Wirklichkeit dauernder Entwicklungsanreize vom Beginn des Mathematikunterrichts an bedürfen und sowohl in etwas umfangreicheren Modellierungsprozessen, aber auch in eher „kleineren" und dafür häufigeren Anwendungsbezügen mehr Betonung finden müssen.

3 Konkrete Beispiele

Die folgenden Beispiele sind oft nur mit einigen Hinweisen, Bemerkungen bzw. Lösungen versehen. Eine vollständige Durcharbeitung wird meist nicht vorgenommen.

Beispiel 3.1: Ein Arbeitnehmer fährt mit dem Fahrrad zur Arbeit. Er fährt die 3 km lange Strecke normalerweise mit einer mittleren Geschwindigkeit von 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Diesesmal hatte er jedoch Pech, denn nach 1 km platzte ihm der Schlauch eines Reifens und er brauchte um 20 Minuten länger, weil er ab dieser Stelle das Rad schieben mußte. In der Arbeitsstätte konnte er glücklicherweise den Schaden beheben und konnte ungehindert nach Hause fahren.

1. Um wie viele km ist er insgesamt mehr gefahren als gegangen?

2. Welche Daten sind für Frage (**1.**) überflüssig?

3. Welche anderen Fragen könnte man stellen und beantworten?

4. Oder: Kann man folgende Fragen aus den gegebenen Daten beantworten?

a) Wie lange braucht er mit dem Fahrrad normalerweise für eine Strecke?

b) Wie lange (zeitlich!) mußte er das Rad schieben?

c) Welche mittlere Geschwindigkeit hatte er dabei?

d) Wie lange hat die Reparatur gedauert?

Lösung:

Hier ist vielleicht eine Skizze besonders zielführend, in die die gefahrenen und die gegangenen Strecken eingezeichnet werden (siehe Fig. 1).

Zu **1:** Schieben mußte er das Rad („Gehen") nur von der Unfallstelle bis zum Arbeitsplatz, aber bei der Rückfahrt fährt er diese Strecke ja mit dem Rad, hier ist also ein Ausgleich vorhanden – unabhängig von der Länge dieser Strecke! Das Stück von zu Hause bis zur Unfallstelle wird zweimal durchfahren, einmal am

[3]) Die Summe der %-Werte beträgt nur 99 (statt – wie zu erwarten – 100), d. h. entweder liegt ein Druckfehler vor, oder es hat Schüler gegeben, die mehr als 15 sinnvolle Fragen stellten.

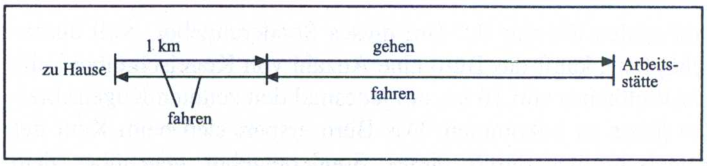

Fig. 1: Ein Radfahrer mit Unglück am Arbeitsweg

Hin- und einmal am Rückweg, er ist also um $2 \cdot 1$ km = 2 km mehr gefahren als gegangen.

Zu **2:** Alle sind überflüssig, ausgenommen die von 1 km! Der Wert in Frage **1.** ist auch unabhängig von der Gesamtstreckenlänge.

Zu **4a:** $\frac{3}{15}$ h = 12 min **4b)** 28 min **4c)** $4\frac{2}{7}$ km/h **4d)** nicht beantwortbar.

Beispiel 3.2: Herr Mayer fährt normalerweise mit dem Bus um 7^h 25 Uhr von seiner Wohnung in sein Büro und geht nachmittags – der gesunden Bewegung halber – zu Fuß nach Hause. Dafür benötigt er insgesamt 1 Stunde und 10 Minuten. Würde er hin- und zurückgehen, so bräuchte er dafür 1 Stunde und 50 Minuten, da er zu Fuß im Mittel nur um 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ langsamer ist als der Bus (Haltestellen, Ampeln, Stau etc.).

1. Wie lange bräuchte er, wenn er beide Strecken mit dem Bus fahren würde?

2. Welche Daten benötigst Du für Frage (**1.**) nicht?

3. Welche Fragen könnte man mit den obigen Angaben beantworten?

4. Oder: Kann man folgende Fragen aus den gegebenen Daten beantworten?

a) Wann kommt Herr Mayer bei seinem Büro normalerweise an?

b) Wie schnell geht Herr Mayer im Mittel?

c) Wie schnell fährt der Bus im Mittel?

d) Wie lang ist der Weg von Herrn Mayers Büro zu dessenWohnung?

Lösung:

Zu **1:** Da er zu Fuß für beide Strecken zusammen 1 h 50 min braucht, so braucht er zu Fuß für eine Strecke 110:2 = 55 Minuten. Mit dem Bus fährt er demnach eine Strecke in 70 – 55 = 15 Minuten. Für beide Strecken bräuchte er daher mit dem Bus 30 Minuten.

Zu **2:** Die Angaben 7^h 25 und 15 km/h sind überflüssig.

Zu **4a:** Normalerweise kommt er um um 7^h 40 beim Büro an.

Während die Fragen **1.** und **2.** schon in der 5. Schulstufe zu beantworten sind, können die folgenden Lösungen **4b)-d)** erst in der 6. - 7. Schulstufe erwartet werden.

4b) $5\frac{5}{8}$ km/h. **4c)** $20\frac{5}{8}$ km/h **4d)** $5\frac{5}{32}$ km.

Beispiel 3.3: Wie oft muß ein LKW fahren, um den Aushub einer (annähernd) quaderförmigen Grube mit den Maßen l = 12 m, b = 8 m und t = 2,1 m (z. B. für ein privates Schwimmbecken) abzutransportieren?

1. Kann man mit diesen Angaben die Frage beantworten?

2. Genügt es, wenn man das Gewicht von 1 m^3 des ausgehobenen Erdreiches kennt? Wenn nein, was müßte man noch zusätzlich wissen?

Beispiel 3.4: Ein Büro kauft Kugelschreiber in einem einwöchigen Sonderangebot, nämlich nach der Devise: „Nehmen Sie 10 und zahlen Sie nur 9." Um dieses Sonderangebot „voll auszuschöpfen", kauft das Büro eine Anzahl von Kugelschreibern, die ein Vielfaches von 10 ist, um jedesmal den zehnten Kugelschreiber gratis zu bekommen. Das Büro erspart sich beim Kauf der Kugelschreiber durch dieses Sonderangebot gegenüber dem Normalpreis insgesamt 256 öS.

1. Wie viele Kugelschreiber kaufte das Büro?

2. Wie hoch war der Normalpreis eines Kugelschreibers?

Begabte bzw. „geschickte" Schüler werden hier sofort merken (und zwar ohne eine „Gleichung aufzustellen"!), daß keine der beiden Fragen ohne weitere Informationen zu beantworten ist. Die Ersparnis (256 öS) muß ja das Produkt aus dem unbekannten Preis eines Kugelschreibers und der ebenfalls unbekannten Anzahl der „Gratiskugelschreiber" sein – diese entspricht zwar einem Zehntel der Gesamtzahl der gekauften Kugelschreiber bzw. der Anzahl der „Zehnerpackungen", aber die kennt man ja auch nicht! Das „langwierigere" Aufstellen einer Gleichung in zwei Variablen (über den Endpreis) liefert aber diese Erkenntnis – zwar etwas verzögert – ebenfalls. Sei z. B. x die *Anzahl der Zehnerpackungen bzw. Gratiskugelschreiber* und p der *(Normal-) Preis eines Kugelschreibers*. Die Gleichung über den Endpreis (in p und x) lautet dann:

$$10p \cdot x - 256 = 9p \cdot x \Rightarrow p \cdot x = 256$$

Wir glauben, daß *nicht immer* Vorwarnungen der Art „Kann man das gestellte Problem eindeutig lösen?" oder „Sind einige Angaben überflüssig?" gegeben werden sollen, bei manchen Aufgaben soll die Über- bzw. Unterbestimmtheit (allenfalls auch die Widersprüchlichkeit von Angaben) durchaus von den Schülern selbst entdeckt werden.

Beispiel 3.5: Eine Pumpe P_1 hat eine Leistung von 5 Liter pro Sekunde. Wenn diese zusammen mit einer zweiten Pumpe P_2 läuft, ist ein bestimmtes Becken in 2 Stunden und 15 Minuten gefüllt. Allein würde die Pumpe P_2 für die Füllung 3 Stunden und 20 Minuten brauchen. Nachdem bei einer Füllung durch P_1 gemeinsam mit P_2 das Becken halbvoll war, fiel die zweite Pumpe P_2 aus. Die Pumpe P_1 allein benötigte zur Füllung des Beckens ab diesem Zeitpunkt noch 1 Stunde und 45 Minuten.

1. Wie viele Liter faßt das Becken?

2. Gib alle für die Frage **1.** nicht benötigten Daten an!

3. Sind alle überflüssigen Daten „in Einklang" oder bergen sie einen Widerspruch in sich? (Allenfalls: Beachte insbesondere die Leistung von P_2!)

4. Falls Widersprüche auftreten, dann ändere die betreffenden Angaben so ab, daß sich keine Widersprüche mehr in den Angabedaten befinden! Gibt es dafür mehrere Möglichkeiten?

„Leistungsaufgaben" (sei es mit Pumpen, Baggern, Arbeitern usw.) sind keineswegs neu, sie sind vielmehr in fast allen gängigen Schulbüchern vertreten, aber nicht im Sinne unseres Themas („Über- bzw. Unterbestimmung"). Sie sind auch durchaus umstritten (z. B. „Pseudoanwendungen", „Einsetzaufgaben") – was hier aber nicht das Thema sein soll.

Lösung:

Zu **1:** Im letzten Satz der Angabe steht, daß P_1 für die Füllung des halben Beckens 1 h 45 min braucht; daher braucht sie zur Füllung des ganzen Beckens die doppelte Zeit, nämlich 3 h 30 min = 12 600 Sekunden. Mit der angegebenen Leistung von P_1 (5 l/s) ergibt sich für das Beckenvolumen $12.600 \cdot 5 = 63.000$ Liter bzw. 63 m³.

Zu **2:** Überflüssig für (**1.**) sind die Angaben über die Fülldauer von P_1 und P_2 gemeinsam (2 h 15 min) und von P_2 allein (3 h 20 min).

Zu **3:** Da die Leistung der Pumpe P_1 gegeben ist, wird die Leistung der Pumpe P_2 nicht nur durch die „3 h 20 min" (Fülldauer durch P_2), sondern auch durch die „2 h 15 min" (gemeinsame Fülldauer) determiniert. Nun ist zu untersuchen, ob beide Angaben dasselbe aussagen!

Zu **4:** Die 2 h 15 min entsprechen 8.100 Sekunden, was für P_1 und P_2 eine gemeinsame Leistung von $63.000 : 8.100 = 7\frac{7}{9}$ Liter pro Sekunde bedeutet. 5 l/s „davon" entfallen auf P_1, d. h. P_2 hat eine Leistung von $2\frac{7}{9}$ l/s und müßte daher zur Füllung des ganzen Beckens (63.000 l) eine Zeit von $63.000 : 2\frac{7}{9} = 22.680$ Sekunden = 6 h 18 min brauchen, und nicht – wie in der Angabe – 3 Stunden 20 Minuten. Selbstverständlich könnte auch die gemeinsame Füllzeit abgeändert werden, um Widersprüche in der Angabe zu beseitigen.

Beispiel 3.6: In der ersten Klasse (5. Schulstufe) werden häufig Flächeninhalte und Umfänge von Figuren in der Art von Fig. 2 berechnet (oft als Grundstücke oder Pläne von Wohnungen interpretiert).

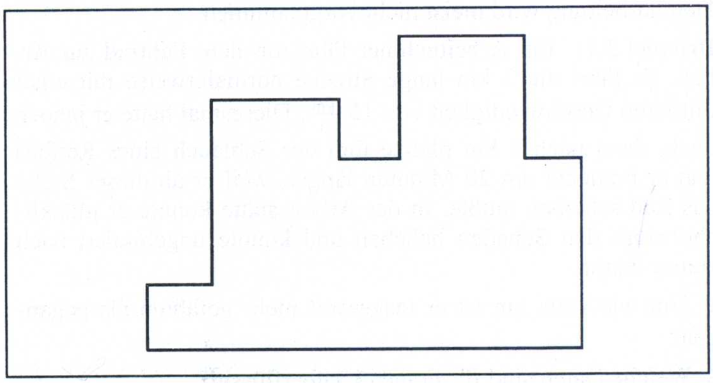

Fig. 2: Plan einer Wohnung

Folgende Aufgabenvariationen wären hier u. E. denkbar:

- Angabe zu vieler „richtiger" Maße. „Welche Angaben bräuchten gar nicht in der Abbildung stehen?", „Welche Möglichkeiten des Weglassens gäbe es?".
- Angabe zu vieler, aber widersprüchlicher Maße. „Welche Möglichkeiten der Änderung gäbe es, damit alle Angaben in Einklang wären?".
- Zu wenige Maße vorgeben. „Nimm für eventuell fehlende Maße „vernünftige" [4]) Werte (oder Variablen) an!", „Versuche, mit möglichst wenigen Eigenannahmen auszukommen!", „Gibt es mehrere Möglichkeiten?".
- Keine Angabe von Maßen. „Nimm ausreichend viele, aber möglichst wenige Maße selbst an!", „Es gibt sicher mehrere Möglichkeiten dafür, führe zwei Möglichkeiten wirklich aus!".

[4]) Hier ist vor allem die Fähigkeit des *Abschätzens* von Streckenlängen mit Bezug auf gegebene Streckenlängen gemeint.

Beispiel 3.7: Von einem Grundstück mit der Form eines allgemeinen Vierecks (siehe Fig. 3 – Maßstab 1:1000) werden die Längen aller vier Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ gemessen.

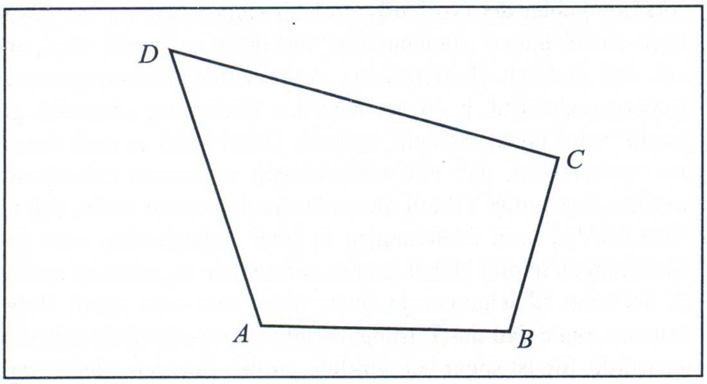

Fig. 3: Plan eines Grundstückes M=1:1000

1. Kann man daraus den Flächeninhalt bestimmen?

2. Wenn nicht, gib an, wie viele und welche Größe(n) noch bekannt sein müßten, um den Flächeninhalt berechnen zu können!

3. Miß aus der maßstabgetreuen(!) Zeichnung (Fig. 3) die benötigten Daten (Längen, Winkel) ab und berechne den Flächeninhalt auf zwei verschiedene Arten. Die Ergebnisse werden nicht völlig übereinstimmen – welchen Wert wird man als „wirklichen" Flächeninhalt deklarieren?

Lösung

Zu **1:** Die Gestalt des Vierecks ist durch die vier Seitenlängen noch nicht eindeutig bestimmt (man denke sich z. B. vier Stäbe mit einem Gelenk in jedem Eckpunkt – es ist klar, daß sich das Viereck dann noch verändern läßt)!

Zu **2:** Man braucht noch zusätzlich *eine* Angabe: Entweder die Länge einer Diagonalen oder die Größe eines Winkels (dann ist das Viereck „fixiert"). Die Berechnung des Flächeninhaltes kann dann auf mehrere Arten erfolgen (Sinussatz, Cosinussatz, *Heron*sche Dreiecksformel).

Diese Aufgabe könnte auch in folgenden Variationen gestellt werden:

- Kann man den Flächeninhalt eines Grundstückes von der Form in Fig. 3 mit Hilfe nur eines Maßbandes bestimmen? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, mit wie vielen Messungen kommt man aus? Kann man ihn ausschließlich mit Hilfe eines Winkelmessers (Theodoliten) bestimmen? Was wäre ein günstiger Weg? Warum?

  Antwort: Mit einem Maßband allein ist es möglich, man braucht dafür mindestens 5 Messungen! Mit einem Winkelmesser allein kann zwar die Gestalt des Vierecks, aber nicht dessen Größe festgehalten werden (Ähnlichkeit!). Mindestens *eine* Längenangabe ist für den Flächeninhalt also unumgänglich. Winkeln sind in der Praxis jedoch einfacher und exakter zu messen als Längen, weshalb meist wirklich nur die Minimalanzahl an Längenmessungen durchgeführt wird.

- Von dem Grundstück in Fig. 3 sind alle Längenmaße (Seitenlängen und Diagonalen) und alle Winkel angegeben. Welche Daten könnten weggelassen werden, wenn der Umfang und der Flächeninhalt berechnet werden sollen (wie viele sind dies)? Es könnten auch hier widersprüchliche Angaben eingebaut werden!

- Wenn die Punkte *C* und *D* als zwei Punkte interpretiert werden, deren Entfernung nicht direkt meßbar ist, und von der „Standlinie" *AB* aus berechnet werden soll, so könnte die Aufgabe lauten:

  Die Entfernung $\overline{AB}$ und die Größe der beiden Winkel $\measuredangle DAB$ und $\measuredangle ABC$ sind bekannt. Genügen diese Werte, um auf die Entfernung $\overline{CD}$ schließen zu können? Wie viele zusätzliche Messungen müßten mindestens noch durchgeführt werden? Kann man ohne weitere Entfernungsmessungen auskommen? (Dies wäre z.B. dann notwendig, wenn die Punkte *C* und *D* selbst völlig unzugänglich.)

Beispiel 3.8: Von einer rechteckigen, geraden Pyramide sind die Koordinaten der gegenüberliegenden Eckpunkte $A(5|2|0)$ und $C(-1|4|2)$ des Grundrechtecks und die Höhe $h = 4$ gegeben.

1. Kann man daraus die Koordinaten der anderen Basispunkte (*B*, *D*) und der Spitze *S* bestimmen? Kann über deren Lage überhaupt etwas gesagt werden?

2. Läßt sich über irgendein anderes „Bestimmungsstück" (G,O,V,a,b,s,h_1,h_2) etwas aussagen?

3. Triff möglichst wenige zusätzliche Annahmen, sodaß die Pyramide eindeutig festgelegt ist.

Lösung:

Zu **1:** Die Koordinaten der Punkte *B*, *D* und *S* lassen sich aufgrund der gegebenen Information nicht eindeutig angeben. Es ist nicht einmal die Ebene des Basisrechtecks fixiert, es kommt dafür das ganze Ebenenbüschel durch die Gerade *AC* in Frage.

Selbst wenn man sich auf *eine* (z. B. vorgegebene) Ebene beschränkte, so wäre durch die Diagonale *AC* das Rechteck auch noch nicht eindeutig vorgegeben. Die möglichen Eckpunkte *BD* lägen dann aber alle auf dem *Thales*-Kreis über *AC* und zwar jeweils diametral gegenüber (s. Fig. 4).

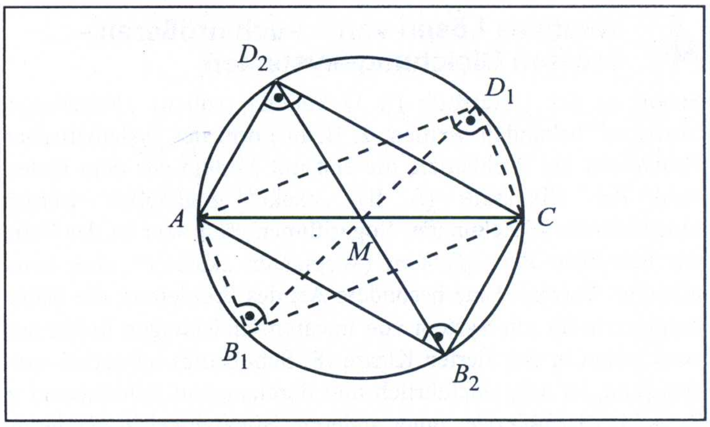

Fig. 4: Mögliche Lagen von *B* und *D* am *Thales*-Kreis über *AC*

Insgesamt läßt sich also über die Lage der Punkte *B* und *D* nur aussagen, daß sie auf der „*Thales*-Kugel" κ_1 mit Mittelpunkt $M = M_{AC} = (2|3|1)$ und Radius $r = \dfrac{\overline{AC}}{2} = \sqrt{11}$ einander diametral gegenüberliegen müssen; diese Kugel hat folgende Gleichung:

$$\kappa_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 11.$$

Die Spitze S muß einerseits in der Symmetrieebene ε_{AC} der Strecke AC liegen und andererseits den Abstand $h = 4$ von M_{AC} haben; dies bedeutet, daß S auf einem Kreis liegen muß, der in ε_{AC} liegt, den Mittelpunkt M_{AC} und Radius 4 hat. Dies ist der Schnittkreis der Kugel $\kappa_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right]^2 = 16$ mit der Ebene ε_{AC}: $3x - y - z = 2$. Wenn die Ebene des Grundrechtecks schon feststeht, dann ist selbstverständlich nicht mehr jeder Punkt dieses Kreises für S möglich, sondern nur mehr *zwei*! Wenn umgekehrt S zuerst auf dem angegebenen Kreis gewählt wird, dann ist damit auch die Ebene des Grundrechtecks eindeutig fixiert.

Zu **2:** Nur eines der genannten „Bestimmungsstücke" ist festgelegt, nämlich die Länge s einer Seitenkante: Für diese erhält man laut Satz von *Pythagoras*: $s = \sqrt{11+4^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Zu **3:** Treffen wir nun zusätzliche Annahmen z. B. über den Punkt B. Wir wissen, daß wir ihn nicht völlig frei wählen dürfen, denn laut **1.** muß er ja auf einer bestimmten Kugel liegen. Man könnte z. B. zwei der Koordinaten des Punktes B frei wählen [5]) und die dritte Koordinate berechnen (entweder aus der Kugelgleichung oder aus der Orthogonalität von AB und BC). Für $B(2|0|z_B)$ z. B. ergibt sich $z_B = 1 \pm\sqrt{2}$. Mit einem dieser beiden Werte ist die Pyramide nun eindeutig festgelegt!

Man könnte nun alle weiteren Bestimmungsstücke tatsächlich berechnen. Wir glauben jedoch, daß es *nicht* notwendig bzw. nicht einmal sinnvoll ist, bei *jedem* Beispiel eine völlige numerische Durchrechnung zu verlangen. Es sollte auch manchmal eine programmartige Beschreibung des Lösungsweges „ausreichen"; eine solche ist bisweilen ohnedies schwieriger anzugeben, sie schärft den Blick auf das Wesentliche, erzwingt selbständige Formulierungen und Ausdrucksweisen (Mathematik und/als Sprache!) und erspart oft langwierige Rechenarbeiten.

4 Iteratives Lösen von – auch größeren – linearen Gleichungssystemen

Schon in der Unterstufe (S I) können (sollen) „Näherungslösungen" behandelt werden, z. B. in Form des systematischen *Probierens* bei Problemen, die erst mit Mitteln aus dem Unterricht der Oberstufe (S II) „exakt" zugänglich werden (quadratische Gleichungen, Logarithmen etc.) oder in der Form des bewußten *Vereinfachens* (Weglassen „kleiner", aber komplizierter Terme). Eine besondere Art des Probierens, die Näherungswerte für ein System von linearen Gleichungen liefert und auch schon in der vierten Klasse (8. Schulstufe) behandelt werden kann, ist sehr ausführlich und durchaus auf Schulniveau z. B. in [4] (S.254f) oder unter anderem Blickwinkel in [5] dargestellt! Das dort beschriebene „System" wird insbesondere bei *überbestimmten* (mehr Gleichungen als Unbekannte) und garantiert *lösbaren* (keine Widersprüche) Gleichungssystemen angewendet.

Es geht dabei um eine Methode, mit der iterativ verbesserte Näherungswerte eines evtl. auch sehr „großen" Systems linearer Gleichungen bestimmt werden können, und zwar dadurch, daß – *cum grano salis* – zunächst Werte für die Variablen der ersten Gleichung angenommen (geschätzt) und der in einer Gleichung erkannte Fehler der (vorläufigen) Näherungswerte für die jeweiligen Unbekannten „gleichmäßig" auf diese aufgeteilt wird, und mit den dadurch (hoffentlich!) verbesserten Näherungswerten weitergerechnet, d. h. in der nächsten Gleichung „dasselbe gemacht" wird (siehe Beispiel unten!). Dabei kann es auch durchaus vorkommen, daß alle Gleichungen mehrmals durchlaufen werden. Der große Vorteil dieser Methode besteht darin, daß sie nicht nur bei zwei Gleichungen in zwei Unbekannten oder drei Gleichungen in drei Unbekannten anwendbar ist, sondern auch z. B. bei zehn Gleichungen in sechs (oder acht oder zehn) Unbekannten, ohne daß das Lösungsverfahren prinzipiell komplizierter würde. Sie ist sogar bei wirklich großen linearen Gleichungssystemen (tausende Gleichungen in tausenden Variablen), wie sie z. B. bei der *Computertomographie* auftreten, eine sehr wesentliche Methode, mit der auf relativ großen Rechenanlagen in einer akzeptablen Zeit ein Ergebnis mit hinreichender und sinnvoller Genauigkeit zu erhalten ist. An einem „Beispielausschnitt" sei die Methode nur kurz erläutert: Gegeben sei z. B. das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lccccl} (1) & a + b & + c & + d & = 8{,}4 \\ (2) & b & & + d & = 5 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

Aus Gleichung (1) erhält man die „Startwerte" a_1, b_1,c_1 und d_1, indem der Wert der Summe gleichmäßig auf die Unbekannten aufgeteilt wird

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \frac{8{,}4}{4} = 2{,}1.$$

Diese werden in Gleichung (2) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcll} b + d & = & 5 & \text{(Sollwert)}, \\ b_1 + d_1 & = & 4{,}2 & \text{(vorläufiger Istwert)}. \end{array}$$

Der momentane „Zeilenfehler" (Differenz von Sollwert und vorläufigem Istwert) von 0,8 wird nun wieder gleichmäßig auf die in dieser Gleichung auftretenden Unbekannten (hier b und d) aufgeteilt, sodaß sich „neue" Werte (b_2 und d_2) für b und d ergeben:

$$b_2 = d_2 = 2{,}1 + 0{,}4 = 2{,}5.$$

Analog geht man nun Gleichung für Gleichung weiter, setzt jeweils den letztgültigen Wert für die jeweilige Unbekannte ein und teilt den dadurch entstehenden Zeilenfehler (= Differenz von Soll- und Istwert) auf die Unbekannten gleichmäßig auf, um neue (bessere) Näherungswerte zu erhalten. Man wird (soll!) hierbei nach der letzten Gleichung des Systems nicht aufhören, sondern wieder mit Gleichung (1) erneut anfangen und so mehrere (eigentlich beliebig viele) „Durchläufe" absolvieren, z. B. solange, bis sich *alle* Werte bei einem vollen Durchlauf (oder bei einem Änderungsschritt) nur mehr um ein konkret vorgegebenes ε verändern (= Abbruchbedingung für die mögliche Implementierung in einen Computer). Hier ist das Wort „alle" sehr wichtig, weil es durchaus vorkommen kann, daß zwar viele Werte sich fast nicht mehr ändern, daß aber vielleicht sogar nur mehr ein Wert sich noch beträchtlich ändert und dadurch anzeigt, daß insgesamt die wirkliche Lösung noch gar nicht so nahe ist, wie die minimale Änderung der meisten anderen Werte glauben machen könnte!

---

[5]) Natürlich nicht ganz frei, denn B muß ja – wie gesagt – auf der erwähnten Kugel liegen. Wenn hier „falsche" Koordinaten gewählt werden, so liefert die anschließende Rechnung (quadratische Gleichung) nur komplexe Lösungen, was auch *a posteriori* zeigt, daß die Kugel *keine* solchen Punkte mit den gewählten Koordinaten enthält.

Didaktische Bemerkungen:

(1) Die Kenntnis der jeweiligen exakten Lösungen[6]) ist besonders am Anfang vorteilhaft, weil die Schüler dadurch direkt „sehen“ können, wie sich die Näherungslösungen den exakten nähern. In jedem Stadium des Iterationsverfahrens haben die Schüler die „Kontrolle“ über die jeweiligen Fehler!

(2) Für dieses Verfahren genügt eigentlich ein Taschenrechner, u. E. ist es aber auch ein Beispiel für einen sinnvollen PC-Einsatz (insbesondere bei etwas umfangreicheren Aufgaben). Es soll natürlich im Mathematikunterricht *nicht* um die *Erstellung* eines entsprechenden Programms gehen, sondern ausschließlich um das Arbeiten mit einem Programm[7]).

(3) Der Grund dafür, daß die Koeffizienten in den Gleichungen nur die Werte 0 oder 1 haben, liegt darin, daß erstens dieser Fall in der Praxis sehr häufig auftritt (z. B. bei der Computertomographie), daß zweitens das Verfahren dann stets und rasch konvergiert – vorausgesetzt es existiert überhaupt eine Lösung – und daß es drittens in diesem Fall eine besonders „schöne“ geometrische Interpretation des Verfahrens gibt (siehe [5]).

5 Zusammenfassung

Das Behandeln von über- und unterbestimmten Problemen ist sicher auch ein Faktor für die *Anwendungsorientierung* des Unterrichts, und zwar in Form von Aufgabenstellungen, bei denen die Schüler entweder überflüssige oder fehlende Angaben erkennen müssen (bei denen sie also wissen, daß irgendetwas zu wenig oder zu viel angegeben ist), oder in Form von offenen Aufgaben, bei denen nicht angegeben ist, ob sie über- bzw. unterbestimmt oder – wie üblich – eindeutig lösbar sind. Es einer Aufgabe anzumerken, ob Angaben fehlen oder ob welche überflüssig bzw. vielleicht sogar widersprüchlich sind, zählt sicher auch zu den Fundamentalen Ideen der Angewandten Mathematik (vgl. auch [1] und [2]). Dieses „Entdecken“ kann sogar den Hauptteil von Aufgaben bilden und das wirkliche Durchrechnen kann dabei manchmal entweder ganz weggelassen oder als zweitrangig betrachtet werden. Schülerantworten wie (Sprache!) „Zur Lösung dieses Problems bräuchte man noch weitere Angaben über ... , die man z.B. d urch eine zusätzliche Messung erhalten könnte.“, „Wenn man zusätzlich annimmt, daß der Wert für ... ungefähr ... beträgt, so ergibt sich ... .“ oder „Die Angaben über ... sind in die Rechnung nicht eingegangen, sie widersprechen jedoch den verwendeten Daten (nicht)!“ wären in diesem Zusammenhang zu begrüßen (zu fördern) und auch zu verlangen!

Aufgaben der folgenden Art wären u. E. geeignet – wenn sie immer wieder und zu vielen verschiedenen Stoffgebieten gestellt werden – , hier eine gewisse (notwendige) „Sensibilisierung“ der Schüler zu erreichen:

1. *Überbestimmung:*

Benötigst du alle Angaben? Welche sind überflüssig (warum)? Kann man einige von ihnen z. B. aus den anderen herleiten? Welche anderen Fragen wären mit den gegebenen Daten zu beantworten? Sind alle Angaben „in Einklang“ (d. h. widerspruchsfrei)? Auch: *Keine* konkrete Fragestellung und die Aufforderung: „Formuliere selbst möglichst viele sinnvolle Fragen dazu!“

2. *Unterbestimmung:*

Wenn du die Aufgabe nicht lösen kannst, erkläre, unter welchen Umständen du sie lösen könntest. Benötigst du weitere Angaben, die nicht zur Verfügung stehen? Wenn ja, welche? Wie könnte man diese in der Realität beschaffen? Welche „vernünftigen“ Annahmen könnten getroffen werden? Auch: *Keine* konkreten Angaben (nur Situationsbeschreibung), nur ein konkretes Ziel und die Frage: „Welche Daten braucht man dafür?“

3. *Selbständiges Erfinden von über- bzw. unterbestimmten Aufgaben:*

Auch in der Praxis muß anhand der einzelnen Problemstellungen oft erst *erkannt* werden, welche Größen als „Eingangswerte“ bestimmt (gemessen) werden sollen, um auf gewünschte Werte schließen zu können. Wir vertreten daher die Ansicht, daß – nicht zuletzt im Sinne einer stärkeren Anwendungsorientierung des Unterrichts – über- und unterbestimmte Probleme häufig behandelt werden sollen, und zwar immer wieder („spiralförmig“) mit verschiedenen Inhalten bzw. auf den verschiedenen Schul- und Exaktheitsstufen – wie dies für eine „Fundamentale Idee“ nach [1] charakterisierend ist! Besonders dafür geeignet scheinen uns neben linearen Gleichungssystemen in der 8. Schulstufe „Sachaufgaben“ aller Art, „Konstruktionsaufgaben“ etc., und in der 10. Schulstufe „Vermessungsaufgaben“ oder Aufgaben aus der „Koordinatengeometrie“ zu sein.

Literatur

[1] *Bruner, J. S.:* Der Prozeß der Erziehung. Berlin-Verlag und Schwann, Berlin – Düsseldorf 1970 (englisch bereits 1960 erschienen).

[2] *Humenberger, H.:* Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Dissertation, Universität Wien 1993.

[3] *Linke, H.-P.:* Individuelle Leistungsunterschiede von Schülern beim mathematischen Modellieren. **MU 37** (1991) H. 5, S.51-58.

[4] *Reichel, H.-C.* u. *J. Zöchling:* Tausend Gleichungen - und was nun? Computertomographie als Einstieg in ein aktuelles Thema des Mathematikunterrichts. **DdM 18** (1990) H. 4, S. 245-270.

[5] *Reichel, H.-C.* u. *J. Zöchling:* Iteratives Lösen größerer Linearer Gleichungssysteme (Zur Förderung der Numerischen Mathematik im Unterricht). **MNU 47** (1994) 20-25. Preprint 14pp.

[6] *Weigand, H.-G.:* Eine Begründung für das iterative Lösen von Gleichungssystemen – Anmerkungen zum Artikel von *Reichel* und *Zöchling*: `Tausend Gleichungen – und was nun?' **DdM 20** (1992) H. 2, S.146-153.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Hans Humenberger, Institut für Mathematik und Angewandte Statistik der der Universität für Bodenkultur, Gregor Mendelstr. 33, A-1180 Wien

[6]) Dies ist z.B. dann besonders leicht möglich, wenn *zuerst* konkrete Werte für die „Unbekannten“ gewählt und mit diesen Werten einige Gleichungen willkürlich „konstruiert“ werden.

[7]) Ein solches kann u. U. vom Lehrer selbst erstellt, oder von den Autoren *H.-C. Reichel* und *J. Zöchling* bezogen werden (Adresse: Institut für Mathematik der Universität Wien, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Österreich).

Erzeugung „merkwürdiger Punkte“

In Ergänzung zu [1] wird der folgende Satz bewiesen.

Satz: Sind A, B, C nicht-kollinear, $A_1 \in BC\setminus\{B,C\}$, $B_1 \in CA\setminus\{C,A\}$, $C_1 \in AB\setminus\{A,B\}$, sind die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 parallel, und sind AA_2, BB_2, CC_2 die Mittelpunkte der Punktepaare (B_1,C_1), (C_1,A_1), (A_1,B_1), so gehen die Geraden AA_2, BB_2, CC_2 durch einen Punkt.

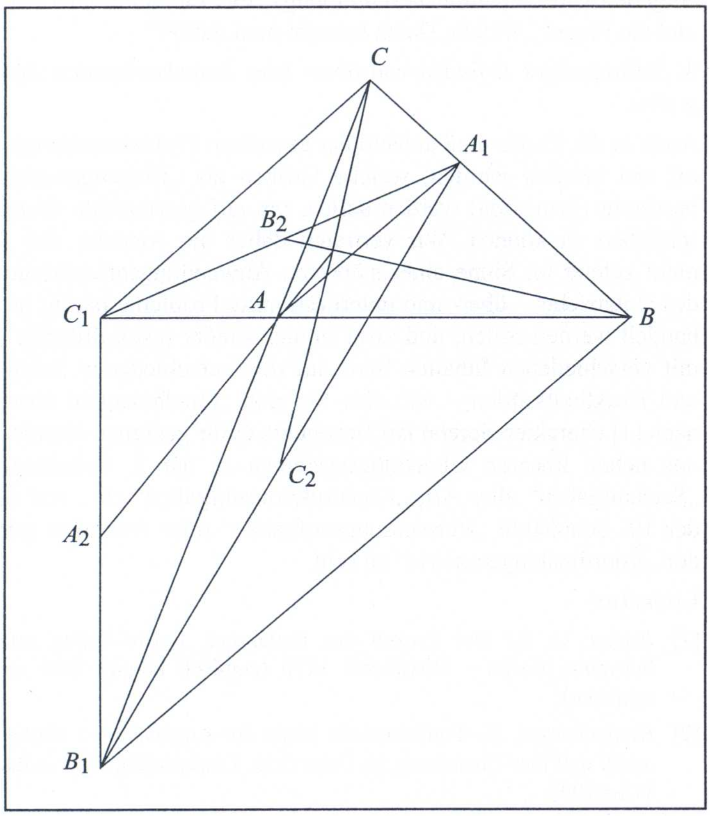

Fig.

Beweis: Man nimmt zweckmäßigerweise A als Anfangspunkt für die Ortsvektoren. Die Ortsvektoren $\vec{b}$ von B und $\vec{d}$ von A_1 sind linear unabhängig.

$\vec{b}+s\vec{d}, t\vec{b}$ mit $s \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ $t \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ sind Ortsvektoren der Punkte B_1, C_1. Da $\overrightarrow{AC} = t\vec{b} + \overrightarrow{CC_1}$ ein Vielfaches von $\vec{b}+s\vec{d}$ und $\overrightarrow{C_1C}$ ein solches von $\vec{d}$ ist ergibt sich $t(\vec{b}+s\vec{d})$ als Ortsvektor des Punktes C. Da A_1 auf der Geraden BC liegt, gilt

(1) $st = 1 - t.$

Weiter verwendet man die Mittelpunktseigenschaft (siehe [1], S. 49, II) der Punkte A_2, B_2, C_2 und erhält für deren Ortsvektoren

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{2}((1+t)\vec{b}+s\vec{d}),\quad \vec{b}_2 = \frac{1}{2}(t\vec{b}+\vec{d}),\quad \vec{c}_2 = \frac{1}{2}(\vec{b}+(1+s)\vec{d}).$$

Damit lassen sich für die Geraden AA_2, BB_2, CC_2 folgende Parameterdarstellungen gewinnen:

AA_2: $\quad \vec{x} = u((1+t)\vec{b}+s\vec{d}, \quad u \in \mathbb{R},$

BB_2: $\quad \vec{x} = (1-v(1-\frac{1}{2}t))\vec{b} + \frac{1}{2}v\vec{d}, \quad v \in \mathbb{R},$

CC_2: $\quad \vec{x}0(t+w(\frac{1}{2}-t))\vec{b} + (st+w(\frac{1}{2}(1+s)-st))\vec{d}, \quad w \in \mathbb{R}.$

Da $\vec{b}$, $\vec{d}$ linear unabhängig sind, haben die Geraden AA_2, BB_2, CC_2 genau dann einen Punkt gemeinsam, wenn es u, v, w mit

$$(2) \quad \begin{array}{ll} 1-v(1-\frac{t}{2}) = u(1+t), & 1-v(1-\frac{t}{2}) = t+w(\frac{1}{2}-t) \\ \frac{1}{2}v = us & \frac{1}{2}v = st+w(\frac{1}{2}(1+s)-st) \end{array}$$

gibt.

Mittels (1) erweisen sich die erste und die dritte Gleichung von (2) als äquivalent mit

$$v = 2ut^{-1}(1-t),\quad 2u(t^2-t+1) = t,$$

sowie die zweite und vierte Gleichung von (2) äquivalent mit

$$w = -vt,\qquad v(t^2-t+1) = 1-t.$$

Wegen $t^2 - t \geq -\frac{1}{4}$ (für alle $t \in \mathbb{R}$) sind die vier Gleichungen (2) äquivalent mit

$$u = \frac{t}{2}(t^2-t+1)^{-1},\quad v = (1-t)(t^2-t+1)^{-1},$$
$$w = t(t-1)(t^2-t+1)^{-1}.$$

Die drei Geraden AA_2, BB_2, CC_2 gehen also durch den Punkt mit dem Ortsvektor

$$\frac{t}{2}(t^2-t+1)^{-1}((1+t)\vec{b}+s\vec{d}).$$

Herrn *Prof. Pickert* danke ich sehr herzlich für Verbesserungsvorschläge.

Literatur:

[1] *Pickert, G.*, Eine Ergänzung zum Beitrag „Ein Verfahren zur Erzeugung von beliebig vielen merkwürdigen Punkten“ von *Peter Baptist* in **PM 27** (1985) 264-268, **PM 28** (1986) 48-50.

W. Hauptmann, Gießen