Problemlösen (II)

im Umfeld spezieller mathematischer Theorien

Hans Humenberger

Hier sollen einige *Probleme* behandelt werden, die insbesondere das Wesen und die Bedeutung gewisser mathematischer Inhalte („Theorien" oder „Theorieteile") gut illustrieren, die „prägnante Merkmale" dieser Theorie enthalten und leicht erkennen lassen. Manchmal können solche oder ähnliche Beispiele sogar als *Einstieg* in gewisse mathematische Gebiete dienen, wenn an ihnen das Wesentliche des „Neuen" *entdeckt* werden kann, wenn sie motivierend für eine tiefere Beschäftigung mit der jeweiligen Materie sind. Solche Einstiegsprobleme dürfen nicht zu hochtrabend sein und sollten deutlich zeigen, dass eine Wissensvermehrung (z. B. Exaktifizierung, theoretische Untersuchung, Systematisierung etc.) nötig bzw. zumindest möglich ist.

1 Ein „Problem", das verschiedene Theorien repräsentiert

Beispiel 1.1: „Die Türme von Hanoi" (vgl. z. B. [7] oder [2])

Auf einer von drei Stangen ist ein Turm von n (z. B. $n = 7$) Scheiben aufgebaut, wobei die Scheiben von unten nach oben kleiner werden (s. Fig. 1).

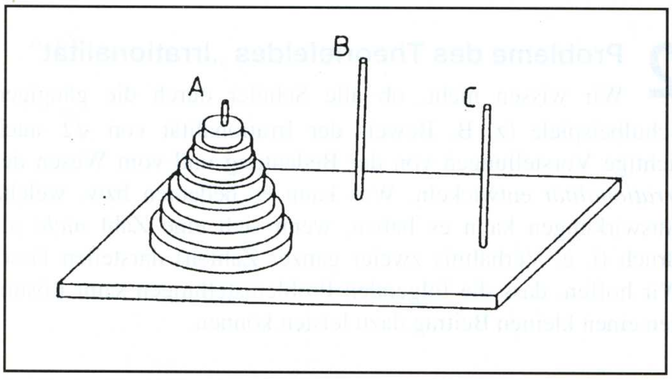


Fig. 1: Die Türme von Hanoi

Die Aufgabe besteht nun darin, diesen „n-Turm" von einer Stange auf eine andere zu befördern und zwar unter Beachtung zweier Spielregeln:

1. Es darf jeweils nur eine Scheibe von einer Stange zu einer anderen bewegt werden, und
2. es darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren zu liegen kommen.

Gesucht ist dabei die *minimale* Anzahl $H(n)$ von Einzelschritten (Umlegungen von Scheiben), die bei einem Turm aus n Scheiben dafür nötig sind.

Es ist hier sicher sehr von Vorteil, wenn für erste Probierzwecke ein „Modell" aus beliebigen, kleiner werdenden Gegenständen (z. B. Bücher, Papierstücke etc.) vorhanden ist bzw. „angefertigt" wird. Durch Probieren ergibt sich für kleine n sofort die Tabelle 1:

n	1	2	3	4
$H(n)$	1	3	7	(15)

Tabelle 1: $H(n)$-Werte für kleine n

Bei $n = 4$ werden viele Schüler schon erste Schwierigkeiten haben, für halbwegs interessierte Schüler wird aber auch $H(4) = 15$ nicht schwer herauszufinden sein. Nun ist doch die Frage ziemlich nahe liegend, ob hier ein „System" dahinter steckt, ob man $H(4)$, $H(5)$, $H(6)$, ... auch durch ein „Gedankenexperiment" gewinnen kann (z. B. aus den bekannten Werten $H(1)$, $H(2)$ bzw. $H(3)$)? Gehen wir noch einen Schritt zurück: Lässt sich schon $H(3) = 7$ aus Überlegungen gewinnen, ohne das Experiment wirklich durchzuführen? Anders gefragt: Wie kann man einen 3-Turm umlegen, wenn man weiß, wie ein 2-Turm umzulegen ist?

Eine Antwort gewinnt man i. a. leicht aus konkreten Probier-Erfahrungen: Um einen 3-Turm von Stange A nach Stange C zu bringen, muss der obere 2-Turm zunächst zur Stange B gebracht werden, dann ist die unterste (größte) Scheibe von A nach C zu bewegen und schließlich muss der bei B „zwischengelagerte" 2-Turm auch nach C gebracht werden (nach dem selben Schema, wie er vorher von A nach B gebracht wurde - s. Fig. 1). Nun ist ja bekannt, wie und in wie vielen Schritten ein 2-Turm umzulegen ist - $H(2) = 3$ -, daher muss für $H(3)$ gelten: $H(3) = H(2) + 1 + H(2)$; es gilt tatsächlich $7 = 3 + 1 + 3$, wie im Experiment schon bestätigt wurde.

Jetzt wird die Struktur des Problems schon deutlich: Dasselbe Prinzip muss nun für $H(4)$ anwendbar sein: $H(4) = H(3) + 1 + H(3) = 2 \cdot H(3) + 1$. Um einen 4-Turm umzulegen, muss analog zunächst ein 3-Turm bewegt werden, dann die unterste Scheibe und schließlich nochmals ein 3-Turm. Es ist nun nicht mehr besonders schwer, zu „entdecken":

$$H(n) = 2 \cdot H(n-1) + 1.$$

Der Wert $H(n)$ ist also leicht zu bestimmen, wenn $H(n-1)$ bekannt ist, diesen wiederum gewinnt man leicht, wenn $H(n-2)$ bekannt ist usw. - bis man bei einem bekannten $H(k)$ angelangt ist. Ausgehend von diesem lässt sich nun

$$H(k+1) = 2\,H(k) + 1,\ \ H(k+2) = 2\,H(k+1) + 1, \ldots,$$
$$H(n) = 2\,H(n-1) + 1$$

schrittweise bestimmen. Dadurch kann obige Tabelle bequem fortgesetzt werden:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$H(n)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	...

Tabelle 2: Erweiterte Tabelle

Die u. E. letzte Zahl, mit der das Experiment *realiter* sinnvoll durchgeführt werden kann, ist $n = 6$, weil ab $n = 7$ die nötige Anzahl von Einzelschritten schon sehr groß wird.

Man sieht, dass dieses Beispiel auf sehr natürlichem Weg zum Prinzip der **Rekursion** bzw. **Iteration** hinführt, auch wenn Schüler bislang noch nichts darüber gehört haben. Es kann so ein „Tor" zur zugehörigen Theorie darstellen. Den Unterschied zwischen Iteration und Rekursion hat einmal jemand treffend so formuliert: *Iteration* bedeutet eine Treppe hinaufgehen, Rekursion bedeutet zunächst eine Treppe hinuntergehen, dort etwas holen und die Treppe wieder heraufgehen.

Eine weitere „Theorie“ wäre jene der *Differenzengleichungen* (z.B. lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten), die zur Beschreibung dynamischer Systeme auch im Schulunterricht zunehmend an Bedeutung gewinnen. Insbesondere jene von erster Ordnung ($a_n = k \cdot a_{n-1} + d$) und allenfalls jene von zweiter Ordnung ($a_n = k_1 \cdot a_{n-1} + k_2 \cdot a_{n-2} + d$).

Auch das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* kann durch dieses „Problem“ gut illustriert und sogar motiviert werden! Generell ist gerade bei der „vollständigen Induktion“ zu sagen, dass derern Einführung oft ganz ohne natürliche Motivation, ohne „Entdeckung“ erfolgt, und zwar durch einen relativ „trockenen“ und „frontalen“ Lehrervortrag, wobei die Schüler oft weder die Notwendigkeit noch das Beweisprinzip an sich wirklich verstehen!

Für große n (z.B. $n = 50$) ist die schrittweise Berechnung der Werte $H(n)$ natürlich relativ mühsam (zumindest ohne programmierbaren Taschenrechner bzw. PC). Es erhebt sich also die Frage, ob $H(n)$ nicht auch *direkt* durch eine Formel angegeben werden kann - ohne bei $H(2)$ oder $H(3)$ beginnen zu müssen und nur schrittweise weiterzukommen. Dazu nun ein weiterer Blick auf Tabelle 2. Die Potenzen von 2, nämlich

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

sind sehr markante und einprägsame Zahlen, so dass einem bald auffallen wird, dass die Werte $H(n)$ jeweils um 1 kleiner als 2^n sind. Es scheint daher die Vermutung

$$\forall n\colon\ H(n) = 2^n - 1$$

gerechtfertigt. Sie stimmt laut Tabelle 2 zumindest für $n \leq 10$.

Wie sieht nun der Fall $n = 11$ aus? Wir wissen $H(10) = 2^{10} - 1$ und weiters wissen wir $H(11) = 2 \cdot H(10) + 1$. Daher ergibt sich $H(11) = 2 \cdot (2^{10} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{10} - 2 + 1 = 2^{11} - 1$. Unsere Vermutung stimmt also auch für $n = 11$. Wir haben aus der Gültigkeit der Formel für $n = 10$ die Gültigkeit für $n = 11$ bewiesen. Für $n = 12$ erhält man analog $H(12) = 2 \cdot H(11) + 1 = 2 \cdot (2^{11} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{11} - 2 + 1 = 2^{12} - 1$.

Man erkennt bereits hier, dass sich die Gültigkeit der Formel von einer Zahl auf die nächste „vererben“ wird (es können auch noch weitere konkrete „Übergänge“ durchgeführt werden). Durch diese konkreten Beispiele ist schon „spürbar“, dass diese Vererbungseigenschaft nicht von der speziellen Wahl von n (z. B. $n = 11$ oder $n = 12$) abhängt. Wir könnten obigen Beweisschritt beliebig oft wiederholen, um so die Gültigkeit der Formel für jedes vorgegebene n zu zeigen. Anstatt dessen ist es jedoch viel bequemer, die Vererbungseigenschaft *allgemein* - i. e. losgelöst von konkreten Zahlenwerten - zu zeigen: Wir wollen für jedes $n \in \mathbb{N}$ die *Erblichkeit* der Formel für $H(n)$ beweisen. Nehmen wir für ein beliebiges n die Gültigkeit der Formel $H(n) = 2^n - 1$ an. Dann folgt doch daraus:

$$H(n+1) = 2 \cdot H(n) + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{n+1} - 1,$$

also die Gültigkeit der Formel für die nächste Zahl $n + 1$.

Wenn aber eine Formel für $n = 1$ gilt, und aus der Gültigkeit bei einer beliebigen natürlichen Zahl die Gültigkeit bei der jeweils nächsten natürlichen Zahl folgt, so muss die Formel offenbar für alle natürlichen Zahlen gelten:

$$H(1) \to H(2) \to H(3) \to H(4) \to H(5) \to \ldots$$

Wir glauben anhand dieses Problems könnten die Schüler die „Theorien“ *Rekursion* und *vollständige Induktion* in genetischer Weise nahezu selbst entdecken und daher eventuell besser verstehen (s. auch [7, S.7ff]).

Eine andere Möglichkeit, die Gültigkeit von $H(n) = 2^n - 1$ zu begründen, wäre einerseits über die Summenformel geometrischer Reihen gegeben (eine weitere dahinter steckende „Theorie“) oder andererseits z. B. durch folgende Überlegung:

Es gilt die Rekursionsgleichung $H(n + 1) = 2 \cdot H(n) + 1$ mit $H(1) = 1$. Daraus erhält man wiederum schrittweise:

$$\begin{aligned} H(2) &= 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 2 + H(1) \\ H(3) &= 2 \cdot (2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 2^2 + H(2) \\ H(4) &= 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 2^3 + H(3) \\ &\vdots \\ H(n + 1) &= \ldots = 2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1 = 2^n + H(n). \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Terme für $H(n + 1)$ erhält man

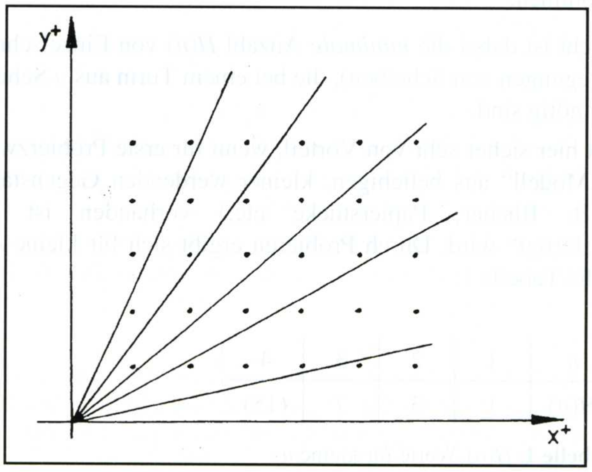
$2 \cdot H(n) + 1 = 2^n + H(n)$, woraus sofort folgt: $H(n) = 2^n - 1$.

2 Probleme des Theoriefeldes „Irrationalität“

Wir wissen nicht, ob alle Schüler durch die gängigen Schulbeispiele (z. B. Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ auch richtige Vorstellungen von der Bedeutung und vom Wesen der *Irrationalität* entwickeln. Was kann es bedeuten bzw. welche Auswirkungen kann es haben, wenn sich eine Zahl *nicht* als Bruch (i. e. Verhältnis zweier ganzer Zahlen) darstellen lässt? Wir hoffen, dass die folgenden Problemstellungen samt Lösungen einen kleinen Beitrag dazu leisten können.

Beispiel 2.1: In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^n$ heißt ein Punkt mit nur ganzzahligen Koordinaten „Gitterpunkt“ (z. B. der Punkt (4 | 3) wäre ein Gitterpunkt, der Punkt (0,5 | 2) nicht!). Gibt es in einem zweidimensionalen Koordinatensystem Gerade durch den Ursprung, die keinen einzigen „Gitterpunkt“ (mit ganzzahligen Koordinaten) enthalten (s. Fig. 2)? Man kann sich dabei aus Symmetriegründen auf den ersten Quadranten beschränken.

Fig. 2: Gerade und Gitterpunkte



Natürlich gibt es viele Gerade, die im Ausschnitt der Fig. 2 keinen Gitterpunkt enthalten, aber ob diese nicht doch „irgendwo" einen Gitterpunkt treffen, ist doch eine spannende Frage!

Eine andere Formulierung könnte lauten: Kann vom Ursprung ein idealisierter „Pfeil" (mit Dicke Null) durch einen „Wald" mit „Bäumen" an den Gitterpunkten (ebenfalls mit Dicke Null) geschossen werden, ohne dass er jemals einen „Baum" trifft (der „Pfeil" möge seine Abflugrichtung „ewig" beibehalten) [1]?

Lösung: Wenn eine Gerade durch den Ursprung einen Gitterpunkt mit den Koordinaten $(m \mid n)$ $m, n \in \mathbb{N}$ enthält, so hat sie die Steigung $\frac{n}{m}$. Dies bedeutet: Wenn sich die Steigung einer Geraden *nicht* als Quotient zweier natürlicher Zahlen darstellen lässt, so kann sie auch keinen Gitterpunkt enthalten. Die „Umkehrung" gilt selbstverständlich auch: Wenn eine Gerade Steigung $\frac{n}{m}$ hat, so enthält sie auch einen Gitterpunkt, z. B. $(m \mid n)$. Es sind also genau die Geraden mit irrationaler Steigung, die keine Gitterpunkte enthalten, und dafür gibt es vielmehr Möglichkeiten als für Geraden mit rationaler Steigung. Obwohl es sowohl unendlich viele Geraden mit rationaler als auch unendlich viele Geraden mit irrationaler Steigung gibt, kann man formulieren: „Der Großteil aller Geraden durch den Ursprung enthält keine Gitterpunkte" (*überabzählbar* unendlich viele im Gegensatz zu den *abzählbar* unendlich vielen Geraden mit Gitterpunkten).

Als Fortsetzung könnte gezeigt werden: Wenn eine Gerade durch den Ursprung noch einen weiteren Gitterpunkt enthält, so muss sie bereits unendlich viele enthalten! Welchen Abstand haben dabei je zwei benachbarte Gitterpunkte?

Lösung: Wenn $(a \mid b)$ ein Gitterpunkt ist, dann sind natürlich auch $(2a \mid 2b)$, $(3a \mid 3b)$, ... Gitterpunkte. Diese sind benachbart, wenn a und b teilerfremd sind. Für den Abstand ergibt sich in diesem Fall $\sqrt{a^2+b^2}$. Sind a und b nicht teilerfremd, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ mit $a = a_1 \cdot k$ und $b = b_1 \cdot k$, so dass a_1 und b_1 teilerfremd sind. In diesem Fall ist der Punkt $(a_1 \mid b_1)$ ein dem Punkt $(0 \mid 0)$ benachbarter und der Abstand je zwei benachbarter Punkte ergibt sich zu $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$.

Beispiel 2.2: Eine „uhrenähnliche" Scheibe mit *einem* leicht und frei drehbaren „Zeiger" und markierten Sektoren heiße „Glücksrad". Der Name rührt von einem Gewinnspiel her, bei dem der Spieler nach einem gewissen Geldeinsatz den Zeiger einmal in Bewegung setzen konnte und je nachdem, in welchem Sektor der Zeiger stehen blieb, konnte er verschiedene Gewinne erzielen bzw. musste er einen Verlust hinnehmen. In welchem Sektor der Zeiger stehen blieb, hing dabei vom „Glück" ab (→ Name).

Bei einem „Glücksrad" (dieses habe jetzt keine „Sektoren", sondern nur einen beweglichen Zeiger) wird nun der Zeiger, der zu Beginn bei P_0 steht (s. Fig. 3), schrittweise um $\alpha°$ im Uhrzeigersinn - jetzt nicht vom Glück beeinflusst, sondern fest vorgegeben - weiterbewegt ($P_0 \to P_1 \to P_2 \to ...$). Bei welchen Werten für $\alpha°$ kommt der Zeiger dabei *nie mehr* zum Ausgangspunkt P_0 zurück?

[1]) Solche Formulierungen sollen *nicht* Anwendungsorientierung suggerieren, sondern nur der in der Mathematik schon uralten Tradition der „Einkleidung" folgen, die wahrscheinlich primär aus Motivationsgründen entstand - wie eine Art „Spiel" oder „Sport".

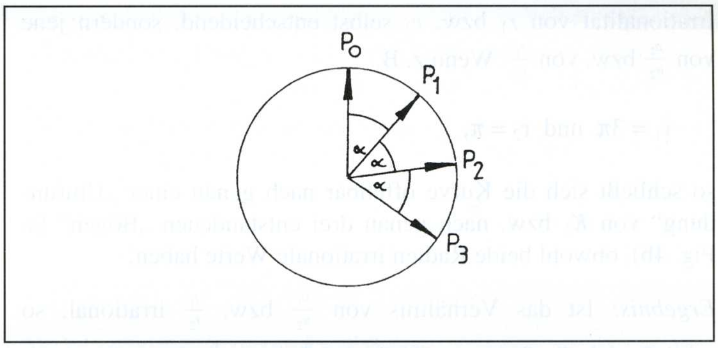


Fig. 3: Wiederholte Drehung eines Zeigers an einem „Glücksrad"

Lösung: „Zu P_0 zurückkommen" bedeutet, dass irgendein Vielfaches von α ebenfalls ein Vielfaches von 360 ist, m. a. W. dass es natürliche Zahlen k und l gibt, so dass gilt:

$$360 \cdot k = \alpha \cdot l \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{360 \cdot k}{l}$$

Wenn der Zeiger zu P_0 zurückkommen soll, so muss α demnach eine eine *rationale* Gradzahl sein. Wenn umgekehrt α eine (positive) rationale Zahl ist ($\alpha = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$), so gibt es sicher natürliche Zahlen k und l, so dass $360 \cdot k = \frac{a}{b} \cdot l$ gilt, z. B. $k = a$ und $l = 360 \cdot b$. Es sind demnach wiederum genau alle irrationalen α (in Grad), bei denen der Ausgangspunkt P_0 nie wieder erreicht wird.

Beispiel 2.3: Auf einem Kreis K_1 mit Radius r_1 liegt ein anderer Kreis K_2 mit Radius r_2; die Berührpunkte seien mit $P_0 \in K_1$ bzw. $P \in K_2$ bezeichnet (s. Fig. 4a). Beim Abrollen des Kreises K_2 auf K_1 beschreibt der Punkt P eine bogenförmige Bahn („Epizykloide" - s. Fig. 4b), wobei die „nächsten" Berührpunkte, bei denen P wieder genau auf K_1 zu liegen kommt, mit P_1, P_2, ... bezeichnet seien. Bei welchen Bedingungen an r_1 und r_2 schließt sich die Bahn des Punktes jemals? (Wann kommt P jemals zum Ausgangspunkt P_0 zurück? Wann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $P_n = P_0$?)

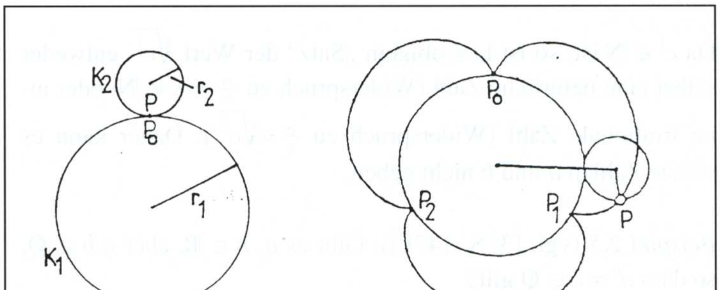


Fig. 4: Abrollen eines Kreises - „Epizykloiden"

Lösung: Hier könnte man vorschnell meinen: Nur wenn r_1 und r_2 rationale Werte haben, so schließt sich die Kurve und sonst nicht. Es wird sich aber herausstellen, dass es auch noch andere Fälle gibt, in denen sich die Kurve schließt. Die Kurve schließt sich offenbar genau dann, wenn die beiden Kreisumfänge (u_1 und u_2) ein gemeinsames Vielfaches haben, wenn es also natürliche Zahlen k und l gibt mit $(2r_1\pi) \cdot k = (2r_2\pi) \cdot l$. Dies ist gleichbedeutend mit $r_1 \cdot k = r_2 \cdot l$ bzw. $\frac{r_1}{r_2} = \frac{l}{k}$. Es ist hier also nicht die

Irrationalität von r_1 bzw. r_2 selbst entscheidend, sondern jene von $\frac{u_1}{u_2}$ bzw. von $\frac{r_1}{r_2}$. Wenn z. B.

$$r_1 = 3\pi \text{ und } r_2 = \pi,$$

so schließt sich die Kurve offenbar nach genau einer „Umrundung" von K_1 bzw. nach genau drei entstandenen „Bögen" (s. Fig. 4b), obwohl beide Radien irrationale Werte haben.

Ergebnis: Ist das Verhältnis von $\frac{u_1}{u_2}$ bzw. $\frac{r_1}{r_2}$ irrational, so schließt sich die Bahn von P nie. Ist $\frac{u_1}{u_2}$ bzw. $\frac{r_1}{r_2}$ rational und gilt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m}{n}$ (m und n teilerfremd), so schließt sich die Kurve nach genau n Umrundungen von K_1 bzw. nach genau m Bögen.

Im Zusammenhang von *rationalen* Zahlen mit *Potenz-* bzw. *Exponentialfunktionen* könnten wir uns auch folgende Aufgaben als motivierende „Probleme" vorstellen.

Beispiel 2.4: Gibt es positive Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$, aber $a, b \notin \mathbb{N}$, so dass $a^b = c \in \mathbb{N}$ ist?

Meist kennen die Schüler folgenden „Satz": Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl ist entweder selbst eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl! Dasselbe gilt für jede k-te Wurzel statt der Quadratwurzel (analog zu zeigen).

Lösung: Es gibt keine solchen Zahlen a und b.

Indirekter Beweis: Sei $a = \frac{m}{n}$ ($a \notin \mathbb{N}$) und $b = \frac{k}{l}$ ($b \notin \mathbb{N}$) und sei obige Bedingung erfüllt:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k}{l}} = c \quad (c \in \mathbb{N}).$$

Dann folgt daraus

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{k} = c^l \quad \text{bzw.} \quad \frac{m}{n} = \sqrt[k]{c^l}.$$

Da $c^l \in \mathbb{N}$ ist, so ist laut obigem „Satz" der Wert $\sqrt[k]{c^l}$ entweder selbst eine natürliche Zahl (Widerspruch zu $\frac{m}{n} = a \notin \mathbb{N}$) oder eine irrationale Zahl (Widerspruch zu $\frac{m}{n} = \sqrt[k]{c^l}$). Daher kann es solche Zahlen a und b nicht geben.

Beispiel 2.5 (vgl. [3; S. 147f.]): Gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, aber $a,b \notin \mathbb{Q}$, so dass $a^b = c \in \mathbb{Q}$ gilt?

Lösung: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl, oft die erste, die Schüler kennen lernen. Wir bilden (probieren) nun z. B. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ - einer der „einfachsten" Ausdrücke der geforderten Gestalt - und fragen uns, ob dieser Wert in $\mathbb{Q}$ liegt oder nicht. Wenn dieser Wert rational ist, so haben wir bereits ein Beispiel gefunden, und wir müssen die gestellte Frage mit „ja" beantworten; wenn nicht, so müssen wir weiterarbeiten. Gehen wir also einmal davon aus, dass $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nicht rational ist, und „probieren" wir weiter.

Wir bilden z. B.

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

und sehen, dass das Ergebnis (i. e. 2) nicht nur rational, sondern sogar eine natürliche Zahl ist, obwohl der Exponent ($\sqrt{2}$) irrational und (laut Annahme) auch die Basis ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$) irrational ist.

Ergebnis: Wenn $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist, so müssen wir die gestellte Frage von vornherein bejahen, wenn $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist, so haben wir mit $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ ein Beispiel der geforderten Gestalt gefunden und wir müssen die Frage ebenfalls bejahen. Ganz ohne zu wissen, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ selbst rational oder irrational ist, haben wir also in jedem Fall ein Beispiel gefunden.

Analoge Beispiele wären: $\left(\sqrt{5}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ oder $\left(\sqrt[3]{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$. Solche und ähnliche Beispiele könnten (sollten) von den Schülern auch selbst erfunden werden! Worauf kommt es dabei an?

3 Probleme rund um „komplexe Zahlen"

Die folgenden Aufgaben (Probleme) haben die „Theorie der komplexen Zahlen" als Hintergrund und enthalten einige „überraschende" Ergebnisse. Gerade überraschende Momente sind im Unterricht oft besonders motivationsfördernd, faszinierend, spannend, interessant etc. Es sei jedoch gleich am Anfang dieses Abschnittes betont, dass es sich dabei um Probleme handelt, die eher nur in leistungsstarken Kursen erfolgreichen Einsatz finden können. In Fortsetzung zu oben gleich das erste „Problem":

Beispiel 3.1: Gibt es $a, b \in \mathbb{C}$, aber $a, b \notin \mathbb{R}$, so dass $a^b = c \in \mathbb{R}$?

Die Schüler lernen meist die *Euler*sche Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ ohne genaue Begründung durch Reihenentwicklungen kennen. Die genaue Herleitung und die Kenntnis aller Probleme rund um die exakte Definition der komplexen Exponentialfunktion sind für folgende Betrachtungen aber auch gar nicht nötig.

Setzen wir nun in die *Euler*sche Formel einfach einige Werte ein und warten „gespannt" auf das Ergebnis! Für $\varphi = \pi$ erhalten wir schon das erste überraschende Ergebnis

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \cdot \sin\pi = -1.$$

Diese Beziehung kann noch eindrucksvoller als

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

geschrieben werden: eine Gleichung in der ausschließlich die fünf vermutlich wichtigsten Konstanten bzw. Zahlen der Mathematik vorkommen: 0, 1, π, e, i.

Die Zahlen e und π sind irrational (sogar *transzendent*), $i \cdot \pi$ ist eine komplexe Zahl und $e^{i\pi}$ ist trotzdem eine *ganze* Zahl - wirklich erstaunlich! Für $\varphi = 2\pi$ ergibt sich $e^{2i\pi} = 1$ - sogar eine natürliche Zahl.

Nehmen wir nun $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und setzen ein: Wir erhalten $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ - auch eine interessante Identität. Die einfachste Potenz, bei der

Basis und Exponent nicht reelle Zahlen sind [2]), ist i^i. Wir erhalten

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$$

also eine *reelle* Zahl, die wieder mit den in der Mathematik überaus wichtigen Zahlen e und π ausgedrückt wird.

Mit Hilfe der *Euler*schen Formel ergeben sich auch erste Einblicke in die Periodizität der komplexen Exponentialfunktion und z. B. die Lösungen des folgenden Problems.

Beispiel 3.2: Hat die Gleichung $1^x = 3$ in **C** eine Lösung?

Wie oben schon gesehen, liefert die *Euler*sche Formel für $\varphi = 2\pi$ die Identität $e^{2\pi i} = 1$. Da bekanntlich die Funktionen sin und cos periodisch mit Periodenlänge 2π sind, gilt auch für $\varphi = 4\pi, 6\pi, ..., 2k\pi, ...$:

$$e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \cdot \sin(2k\pi) = 1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wir sehen, die Gleichung $e^x = 1$ hat nicht nur die Lösung $x = 0$, sondern sogar unendlich viele Lösungen $x = 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$. Nun zur Gleichung des gestellten Problems $1^x = 3$, die - wie gerade gesehen - auch so geschrieben werden kann:

$$(e^{2k\pi i})^x = e^{\ln 3} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2k\pi i x} = e^{\ln 3}$$

woraus sofort folgt:

$$x = \frac{\ln 3}{2k\pi i} = -\frac{\ln 3}{2k\pi} \cdot i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Die angegebene Gleichung hat in $\mathbb{R}$ bekanntlich zwar keine, aber in **C** sogar unendlich viele Lösungen, was ein besonders interessanter Beleg für die mathematische Reichhaltigkeit der komplexen Zahlen darstellt. Natürlich kann in der Schule nicht „komplexe Analysis" betrieben werden, aber kleine Einblicke in die Erweiterungsmöglichkeiten durch komplexe Zahlen scheinen uns - insbesondere für Leistungskurse - sehr interessant und motivationsfördernd zu sein.

Auch die *Analytische Geometrie* bietet einige Überraschungen und gute Gelegenheiten, komplexe Zahlen in gewisse Betrachtungen einzubeziehen; dazu nur ein Beispiel.

Beispiel 3.3: Was passiert, wenn von einem inneren Punkt eines Kreises formal die „Tangenten" an diesen gelegt werden?

Dass dies im Reellen nicht möglich ist, braucht wohl nicht erst begründet zu werden. Im Reich der komplexen Zahlen ist aber selbst dies möglich! Wir wollen z. B. vom Koordinatenursprung (0 | 0), dem Mittelpunkt des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, formalrechnerisch die Tangenten an diesen legen. Die aus der reellen analytischen Geometrie bekannte „Berührbedingung" einer Geraden $y = kx + d$ lautet:

$$r^2(1 + k^2) = d^2.$$

Da die Tangente an den Kreis aus dem Punkt (0 | 0) gelegt werden soll, ist $d = 0$, und wegen $r \neq 0$ folgt

[2]) Die genaue Bedeutung eines solchen Ausdruckes braucht (noch) gar nicht wirklich bekannt zu sein, es genügt hier das formale Einsetzen in die *Euler*sche Formel.

$$1 + k^2 = 0, \quad \text{also} \quad k = \pm i.$$

Die Gleichungen der Tangenten lauten daher

$$y = \pm i \cdot x,$$

sie haben - wie erwartet - komplexe Gestalt. Diese Geraden haben nicht nur diese interessante „Tangenteneigenschaft" für *jeden* Kreis mit (0 | 0) als Mittelpunkt (unabhängig vom Radius *r* !), sondern noch zwei weitere überraschende Eigenschaften, die das Ergebnis folgender „Probleme" sind:

Beispiel 3.4: Welche Geraden sind orthogonal zu $y = ix$ bzw. zu $y = -ix$?

Zwei Geraden werden bekanntlich dann als „orthogonal" bezeichnet, wenn für ihre Steigungen k_1 und k_2 gilt: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Für die Gerade $y = ix$ ist $k_1 = i$; gesucht ist nun ein k_2 mit $i \cdot k_2 = -1$, d. h. $k_2 = i$. Die zu $y = ix$ orthogonale Gerade ist also $y = ix$ selbst (!) - dies ist kein Druckfehler, im Komplexen gibt es Geraden, die zu sich selbst *orthogonal* sind (analog: $y = -ix$) !

Welchen Abstand im Sinne der reellen *Euklid*ischen Geometrie haben je zwei Punkte auf den Geraden $y = ix$ bzw. $y = -ix$?

Seien $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ zwei Punkte auf der Geraden $y = ix$ (d. h. $y_1 = ix_1$ und $y_2 = ix_2$). Für ihren Abstand ergibt sich stets der Wert Null:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (ix_2 - ix_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + \underbrace{i^2}_{-1} \cdot (x_2 - x_1)^2 = 0.$$

Für eine „erfolgreiche" Behandlung dieser Aufgaben im Schulunterricht müssen u. E. mindestens zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Das Leistungsniveau der Klasse muss relativ hoch sein, weil die zu vollziehenden Abstraktionsprozesse nicht ganz elementar sind.
2. Der Lehrer muss einerseits selbst von den doch überraschenden Ergebnissen begeistert und andererseits fähig sein, diese Begeisterung (Spannung) auf eine „positive Erwartungshaltung" der Schüler zu übertragen.

4 Probleme über „Summen natürlicher Zahlen"

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf das Gebiet „arithmetische Reihen", insbesondere auf die Formel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Gerade diese Formel wird in der Schule häufig mit nur ziemlich stereotypen und rezeptartigen Aufgaben eingeübt. Folgende „Probleme" scheinen uns doch etwas vielfältiger zu sein.

Beispiel 4.1: Berechne die Summe aller natürlichen Zahlen bis 300, die weder durch 8 noch durch 6 teilbar sind !

Dies ist eine typische Aufgabe, die leicht in Teilaufgaben zerlegt werden kann. Zunächst kann einmal die Summe *aller* natürlichen Zahlen von 1 bis 300 berechnet werden:

$$1 + 2 + 3 + ... + 299 + 300 = \tfrac{300 \cdot 301}{2} = 150 \cdot 301 = 45\,150.$$

Nun ist natürlich noch die Summe derjenigen Zahlen zu subtrahieren, die durch 8 oder durch 6 teilbar sind. Die Summe aller Zahlen (≤ 300), die durch 8 teilbar sind, beträgt

$$8 + 16 + 24 + ... + 296 = 8 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 37) = 8 \cdot \tfrac{37 \cdot 38}{2} = 5\,624.$$

Die Summe aller durch 6 teilbaren Zahlen beträgt analog

$$6 + 12 + 18 + 24 + ... + 294 + 300 = 6 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 50) = 6 \cdot \tfrac{50 \cdot 51}{2} = 7\,650.$$

Bildet man nun die Summe 5 624 + 7 650 = 13 274, so hat man doch die Summe all jener Zahlen, die durch 6 oder durch 8 teilbar sind - oder? Nein, eine kleine Korrektur muss noch angebracht werden: Die Zahl 24 wurde z. B. doppelt gezählt (siehe oben), weil sie sowohl durch 8 als auch durch 6 teilbar ist. Wir sehen: Alle Zahlen mit dieser Eigenschaft wurden doppelt gezählt, das heißt sie müssen einmal wieder subtrahiert werden. Welche Zahlen sind nun durch 8 *und* durch 6 teilbar? Es ist nicht besonders schwierig zu sehen, dass dies alle Vielfachen von 24 sind.

Die Summe

$$24 + 48 + 72 + ... + 240 + 264 + 288 = 24 \cdot (1 + 2 + ... + 11 + 12) = 24 \cdot \tfrac{12 \cdot 13}{2} = 1\,872$$

muss also noch von 13 274 subtrahieret werden:

$$13\,274 - 1\,872 = 11\,402.$$

Diese Zahl ist nun noch von 45 150 zu subtrahieren und es ergibt sich **33 748** als Ergebnis.

Beispiel 4.2: (vgl. [1, S.14 u. 89f]): Beginnend mit 1 werden die natürlichen Zahlen der Reihe nach addiert, bis sich eine dreistellige Zahl mit drei gleichen Ziffern ergibt. Wie viele Zahlen müssen addiert werden?

Lösung: Eine Lösung bestünde darin, schrittweise einfach solange zu addieren, bis sich die gewünschte Formation einstellt. Wir wollen jedoch einen anderen (interessanteren) Zugang wählen. Es müssen n Zahlen addiert werden und diese Summe $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ darf höchstens 999 betragen. Durch Einsetzen oder durch Lösen einer quadratischen Gleichung sieht man leicht, dass n höchstens 44 betragen darf. Wir suchen also ein $n \leq 44$, so dass gilt

$$\frac{n(n+1)}{2} = xxx \quad (1 \leq x \leq 9).$$

Nun ist der Ausdruck „xxx“ in einer Gleichung nicht sehr brauchbar, daher suchen wir nach einer geeigneteren, möglichst einfachen Darstellung von „xxx“, z. B. $xxx = x \cdot 111$ und damit

$$\frac{n(n+1)}{2} = x \cdot 111.$$

Die Zahl 111 kann aber noch elementarer als Produkt von Primzahlen $37 \cdot 3 = 111$ geschrieben werden; man erhält dadurch

$$n(n + 1) = 2 \cdot x \cdot 37 \cdot 3 \qquad n \leq 44; \quad 1 \leq x \leq 9.$$

Da 37 eine Primzahl ist, muss entweder n oder $n + 1$ durch 37 teilbar sein. Mit der Bedingung $n \leq 44$ bleiben also nur die Möglichkeiten $n = 37$ oder $n = 36$. Für $n = 37$ ergibt sich $37 \cdot 38 = 2 \cdot x \cdot 37 \cdot 3$, was aber nicht möglich ist, da $37 \cdot 38$ nicht durch 3 teilbar ist. Es bleibt also nur noch $n = 36$. Aus $36 \cdot 37 = 2 \cdot x \cdot 37 \cdot 3$ folgt unmittelbar $x = 6$. Die Summe der Zahlen von 1 bis 36 ergibt tatsächlich 666.

Die Darstellung von „xxx“ als $x \cdot 111 = x \cdot 37 \cdot 3$ kann zwar auch als „Trick“ bezeichnet werden, aber wir würden ihn nicht als abwegig erachten, sondern doch eher als nahe liegend und insoferne auch für Schüler zumutbar, die nicht an einer Mathematik-Olympiade teilnehmen.

Beispiel 4.3: Bestimme die Summe der Ziffernsummen aller Zahlen von 1 bis 999.

Lösung: Was bedeutet es eigentlich, eine Summe von Ziffernsummen gewisser Zahlen zu bilden? Es wird dabei offenbar jede Ziffer sooft gezählt (summiert), als sie in den einzelnen Zahlen vorkommt; z.B. die Summe der Ziffernsummen der Zahlen 123, 203, 125 und 52 beträgt

$$(1 + 2 + 3) + (2 + 3) + (1 + 2 + 5) + (5 + 2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 26.$$

Es ist daher die Frage zu klären, wie oft die Ziffern 1, 2, ..., 9 in den Zahlen von 1 bis 999 vorkommen! Wie oft die Ziffer 0 vorkommt ist irrelevant, da sie nichts zur Ziffernsumme beisteuert. Es ist zunächst klar, dass die Ziffern 1, 2, ..., 9 jeweils gleichoft in den Zahlen von 1 bis 999 auftreten [3]), weil ja jede Ziffer an jeder Stelle (Hunderter, Zehner, Einer) gleichoft vorkommt, nur *wie* oft? Teilen wir das Problem wieder auf!

Wie oft kommt z. B. die Ziffer 3 als Hunderterziffer vor? Offenbar 100-mal (300 – 399). Wie oft kommt 3 als Zehnerziffer vor? In jedem „Hunderter-Abschnitt“ 10-mal (z. B. 130 – 139). Da es 10 solche „Hunderter-Abschnitte“ gibt, kommt die Ziffer 3 insgesamt $10 \cdot 10 = 100$-mal als Zehnerziffer vor. Als Einerziffer kommt die Ziffer 3 ebenfalls in jedem „Hunderter-Abschnitt“ 10-mal (z. B. 103, 113, ..., 193) insgesamt also wieder 100-mal vor. Wir sehen, die Ziffer 3 (und auch alle anderen Ziffern - außer 0 [4]) kommt in den Zahlen von 1 bis 999 insgesamt 300-mal vor. Die Summe der Ziffernsummen beträgt daher

$$300 \cdot (1 + 2 + ... + 9) = 300 \cdot \tfrac{9 \cdot 10}{2} = 13\,500.$$

5 „Probleme“ zur Divergenz der „harmonischen Reihe“

5.1. Die Schnecke auf dem Gummiband

Das folgende Beispiel aus [5, S. 157 bzw. 223f] soll nicht als „praxisbezogene“ Aufgabe interpretiert werden, die vorgenommene „Einkleidung“ ist hier nur ein Element, das die Überraschung durch das Ergebnis des „Gedankenexperimentes“ unterstützen und evtl. zur Motivation beitragen soll - wenn die *harmonische Reihe* (insbesondere deren Divergenz) überhaupt Gegenstand des Unterrichts war, was in Grundkursen (Pflichtunterricht) wahrscheinlich nur selten der Fall sein wird (zumindest in Österreich).

Beispiel 5.1: „Die Schnecke auf dem Gummiband“

Auf dem Ende A eines 1 km langen und unbegrenzt dehnbaren Gummibandes sitzt eine Schnecke, die nur eine Aufgabe in ih-

[3]) Dies kann auch erst nach einigen konkreten Überlegungen deutlich werden, was aber nichts ausmachen würde.

[4]) Die Ziffer 0 kommt insgesamt nur 189 mal vor.

rem unbegrenzt langen Leben sieht: Sie kriecht mit einer Geschwindigkeit von 1 cm/s gegen das andere Ende *B* des Gummibandes. Dieses jedoch zu erreichen, wird ihr dadurch erschwert, dass am Ende jeder vergangenen Sekunde das Band von einer unsichtbaren Macht plötzlich um 1 km verlängert wird (durch homogene Dehnung des ganzen Bandes). Erreicht die Schnecke jemals das andere Ende *B* des Gummibandes? Wenn ja, nach welchem Zeitraum kommt sie dort an?

Lösung: (vgl. [5, S.223f]) Wir überlegen zunächst, wie die Länge des Bandes sich im Laufe der Zeit entwickelt. Zu jeder vollen Sekunde wird das Band um einen Kilometer gleichmäßig gedehnt. Der Zeitpunkt unmittelbar *vor* Vollendung der *n*-ten Sekunde werde mit n^-, jener unmittelbar *nach* Vollendung der *n*-ten Sekunde werde mit n^+ bezeichnet - dazwischen ist das Band um einen Kilometer länger geworden. Zur Zeit n^- ist das Band *n* km lang, zur Zeit n^+ jedoch schon *n* + 1 km - verursacht durch eine „blitzartige", gleichmäßige Dehnung des ganzen Bandes um 1 km, d. h. um den Faktor $\frac{n+1}{n}$ - auch der von der Schnecke schon zurückgelegte Weg wird dabei gedehnt.

Wenn die Schnecke überhaupt jemals ans Ziel kommt, dann sicherlich *nicht erstmals unmittelbar nach* einer Dehnung, anders ausgedrückt: wenn die Schnecke unmittelbar nach einer Dehnung am Ziel ist, dann muss sie es auch schon vor dieser gewesen sein! Daher untersuchen wir im folgenden die Zeitpunkte n^- und nicht n^+ (wie dies in [5] der Fall ist).

Betrachten wir zunächst einzeln die 1 cm Stücke, die die Schnecke während der 1., 2., ... *n*-ten Sekunde zurücklegt, insbesondere die Dehnungen, die auf diese Stücke wirken.

Das 1 cm Stück, das die Schnecke in der *ersten* Sekunde zurückgelegt hat, wird beim Übergang $1^- \rightarrow 1^+$ auf das 2-fache, beim Übergang $2^- \rightarrow 2^+$ auf das $\frac{3}{2}$-fache, ..., allgemein beim Übergang $k^- \rightarrow k^+$ auf das $\frac{k+1}{k}$-fache gedehnt. Es hat zur Zeit n^- (also noch vor der Dehnung $n^- \rightarrow n^+$) die Länge (in cm):

$$1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n}{1}.$$

Das 1 cm Stück, das die Schnecke während der *zweiten* Sekunde gekrochen ist, macht (als schon *zurückgelegter* Weg) die erste Dehnung beim Übergang $1^- \rightarrow 1^+$ noch *nicht* mit, es wird erst beim Übergang $2^- \rightarrow 2^+$ auf das $\frac{3}{2}$-fache, beim Übergang $3^- \rightarrow 3^+$ auf das $\frac{4}{3}$-fache, ..., allgemein beim Übergang $k^- \rightarrow k^+$ auf das $\frac{k+1}{k}$-fache gedehnt. Es hat zur Zeit n^- die Länge (in cm):

$$1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n}{2}.$$

Das 1 cm Stück, das die Schnecke während der *dritten* Sekunde zurückgelegt hat, wird (als zurückgelegter Weg) erst ab der dritten Dehnung mitgedehnt, für die Länge dieses Stückes zur Zeit n^- ergibt sich analog (in cm):

$$1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n}{3}.$$

Schließlich betrachten wir das in der (*n*-1)-ten Sekunde zurückgelegte 1 cm Stück, das nur mehr beim Übergang $(n\text{-}1)^- \rightarrow (n-1)^+$ mit dem Streckungsfaktor $\frac{n}{n-1}$ gestreckt wird. Dieses Stück hat also zum Zeitpunkt n^- eine Länge von $\frac{n}{n-1}$ cm. Das in der *n*-ten Sekunde gekrochene 1 cm Stück wird bis zum Zeitpunkt n^- gar nicht gedehnt, es hat die Länge 1 cm. (Es würde erst beim Übergang $n^- \rightarrow n^+$ gedehnt werden um den Faktor $\frac{n+1}{n}$.)

Die Summe aller dieser „gestreckten 1 cm Stücke" gibt nun die Gesamtentfernung der Schnecke vom Startpunkt *A* an. Diese Entfernung beträgt daher zum Zeitpunkt n^-:

$$\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\ldots+\frac{n}{n-1}+1 = n\cdot(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}).$$

Das Band selbst hat zum Zeitpunkt n^- eine Länge von *n* km = $n \cdot 10^5$ cm.

Die Frage, ob die Schnecke jemals das Bandende erreicht, ist also gleichbedeutend mit der Frage, ob der Weg, den die Schnecke mit eigener Kraft und mit Hilfe der Dehnungen bereits hinter sich gelassen hat, nämlich $n\cdot(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})$, jemals so groß wie die momentane Länge des Bandes $n \cdot 10^5$ wird, also ob es ein *n* gibt mit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \geq 10^5$.

Die hier auftretende Summe $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ ist die *harmonische Reihe*, die bekanntlich divergent ist, d. h. sie wächst über alle vorgegebenen Grenzen hinaus! Die Summe muss also „eines Tages" auch den Wert 10^5 erreichen (überschreiten), was bedeutet, dass die Schnecke das Bandende trotz der Dehnungen doch „irgendwann" erreicht - wie man anfänglich vielleicht gar nicht vermutet hätte.

Allerdings dauert es sehr sehr lange, bis dies der Fall ist. Um nur eine ungefähre Ahnung von der Größenordnung des dafür nötigen Zeitraumes zu bekommen, könnte die für sehr große *n* bekannte Approximationsformel [5]) helfen:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n \approx 0{,}57722 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \approx \ln n + 0{,}57722$$

Aus der Ungleichung $\ln n + 0{,}57722 > 10^5$ ergibt sich für *n* unmittelbar

$$n > e^{10^5-0{,}57722} \approx 10^{43\,429{,}2} \approx 1{,}58\cdot 10^{43\,429}.$$

Dies ist die für die lange Wanderung benötigte Zeit in Sekunden. Selbst in Jahren liest sich diese Zahl nicht um vieles kleiner, es wären ungefähr $5 \cdot 10^{43421}$ Jahre - eine unvorstellbar große Zahl und ein wahrscheinlich noch „unvorstellbarerer" Zeitraum (seit dem so genannen „Urknall" sind dem heutigen Wissen nach nur ungefähr $2 \cdot 10^{10}$ Jahre vergangen)!

Bemerkungen: (1) In [9] wird das kontinuierliche Analogon dazu gelöst (das Band wird nicht nur nach jeder Sekunde blitzartig gedehnt, sondern gleichmäßig bzw. kontinuierlich). Die Schnecke braucht dabei fast doppelt so lange bis ans „Ziel" ($2{,}8\cdot 10^{43\,429}$ Sekunden bzw. $8{,}9\cdot 10^{43\,421}$ Jahre). Es ist auch anschaulich klar, dass die diskrete Version die schnellere ist: das Band ist nach jeder vollen Sekunde in beiden Fällen gleich lang. Bei der diskreten Version werden aber die einzelnen 1 cm Stücke, die die Schnecke während jeder Sekunde gekrochen ist, zur Gänze *nach* ihrer Zurücklegung (also als bereits gekrochene Strecken) gedehnt; bei der kontinuierlichen Dehnung werden diese Stücke während des Kriechens, also *auch* als noch zurückzulegende Strecken gedehnt, was der Schnecke natürlich noch mehr „schadet".

---

[5]) Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n) \approx 0{,}57721566\ldots$ heißt *„Euler-Mascheroni*-Konstante". Die exakte Begründung dieser Grenzwertaussage wird wohl in der Schule kaum möglich sein - der Lehrer könnte sie aber einfach angeben (ohne Beweis), um eine Vorstellung über den nötigen Zeitraum zu bekommen.

(2) In [9] wird jedoch *fälschlicherweise* geschrieben, die kontinuierliche Dehnung sei die für die Schnecke schnellere Version („fast doppelt so schnell"). Dies vermutlich deswegen, weil sich in den Berechnungen von [5] ein *Vorzeichenfehler* eingeschlichen hat und der Autor von [9] sein Ergebnis einfach mit jenem von [5] (offenbar an dessen Richtigkeit glaubend) verglichen hat. Aufgrund des Vorzeichenfehlers ergeben sich in [5] jedoch *falsche* Werte: ca. $5\cdot 10^{43\,429}$ Sekunden bzw. $16\cdot 10^{43\,421}$ Jahre.

(3) Nicht nur bei 1 cm/s Kriechgeschwindigkeit der Schnecke und 1 km/s Ausdehnungsgeschwindigkeit des Bandes erreichte die Schnecke das andere Ende des Bandes, sondern sogar bei jeder noch so kleinen aber konstanten Kriechgeschwindigkeit der Schnecke und jeder noch so großen aber konstanten Ausdehnungsgeschwindigkeit des Bandes (hinreichende aber nicht notwendige Bedingung). Dies gilt sowohl im diskreten als auch im kontinuierlichen Modell.

5.2. Ein Bücherstapel

Beispiel 5.2 (vgl. [8, S.47f und S.190]): Eine Anzahl von völlig gleichartigen Büchern, repräsentiert als kongruente Quader mit den Ausmaßen Länge $l = 1$, Breite b und Höhe h wird gestapelt. Dabei hat jedes Buch einen seitlichen Überstand (in Richtung der Kante mit der Länge $l = 1$) gegenüber dem darunterliegenden (vgl. Fig. 5).

Das zweite Buch wird so weit nach rechts versetzt unter das erste geschoben, dass der Schwerpunkt des ersten genau über die linke Oberkante des zweiten zu liegen kommt; es kippt daher gerade nicht ab. Unter den dadurch entstehenden Stapel aus zwei Büchern wird nun das dritte Buch so gelegt, dass der gemeinsame Schwerpunkt der ersten beiden genau über der linken Oberkante des dritten zu liegen kommt. Das Verfahren wird mit dem vierten, fünften, ..., n-ten Buch fortgesetzt.

Da in jedem Schritt der Stapel gerade noch stabil ist, können wir so theoretisch beliebig viele Bücher übereinanderstapeln, ohne dass der Stapel kippt.

1. Wie groß ist der Gesamtüberhang bei n Büchern ?
2. Nach wie vielen Schritten fällt der Zuwachs des Überhangs unter die Genauigkeitsgrenze von $\frac{1}{1000}$?
3. Wie groß ist die Gesamtlänge aller Überstände, i. e. der Grenzwert der Überhangsumme für $n \to \infty$?

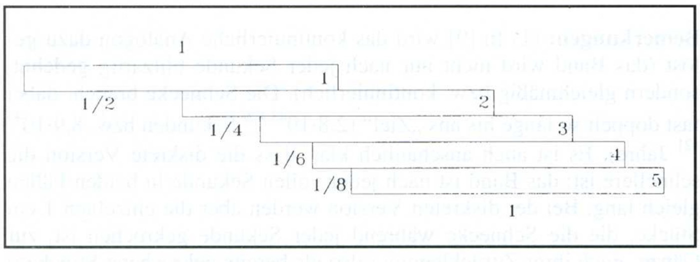


Fig. 5: Stapel überhängender Bücher

Es genügt, sich auf eine Raumrichtung (die Versetzungsrichtung x) zu beschränken (Breite b und Höhe h der Bücher beeinflussen die x-Koordinate des Schwerpunktes des Stapels nicht). Die x-Koordinate des Schwerpunktes eines Körpers, der sich aus zwei Teilen mit den Massen m_1, m_2 und den Schwerpunktskoordinaten x_1, x_2 zusammensetzt, ist das gewichtete Mittel

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Der erste Überhang a_1 (Buch 1 über Buch 2) ist natürlich $\frac{1}{2}$, da der Schwerpunkt des ersten Buches genau in der Mitte liegt. Nun bestimmen wir die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes der ersten beiden Bücher vom *rechten* Rand des Buches 2. Dieser ist gegeben durch

$$\frac{1\cdot 1 + 1\cdot \frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}.$$

Als Überhang a_2 ergibt sich daher $a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Analog berechnen wir die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes der ersten drei Bücher vom *rechten* Rand des Buches 3 mit $\frac{2\cdot 1 + 1\cdot \frac{1}{2}}{2+1} = \frac{5}{6}$. Für den Überhang a_3 ergibt sich daher $a_3 = \frac{1}{6}$.

Allgemein: Die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes der ersten k Bücher vom rechten Rand des Buches k ergibt sich als $\frac{(k-1)\cdot 1 + 1\cdot \frac{1}{2}}{(k-1)+1} = \frac{2k-1}{2k}$. Für den Überhang a_k erhalten wir daher $a_k = \frac{1}{2k}$. Nach 500 Schritten ist also die Genauigkeitsgrenze von $\frac{1}{1000}$ beim Zuwachs des Überhangs (= neuer Überhang) unterschritten.

Da der Gesamtüberhang gleich der Summe der einzelnen ist, erhalten wir für den Gesamtüberhang s_n bei n Büchern (nach dem $(n-1)$-ten Schritt, $n-1$ Überhänge)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ bewirkt, dass auch $s_n = \frac{1}{2}\cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ jeden vorgegebenen Wert überschreitet ($\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$). Durch die beschriebene Stapelung kann also (theoretisch) erreicht werden, dass das letzte Buch gegenüber dem ersten beliebig weit seitlich verschoben sein kann, ohne dass der Stapel kippt.

Natürlich ist dieses Modell eines Bücherstapels von der Realität genauso weit entfernt, wie die „Schnecke am Gummiband". *Praxisbezug* ist aber auch gar nicht der Anspruch der beiden Aufgaben, sondern „nur" ein durch die Einkleidung anregendes und interessantes Gedankenexperiment zu sein!

Literatur

[1] *Baron, G. / E. Windischbacher* (Hrsg.): Österreichische Mathematik Olympiaden 1970 - 1989. Aufgaben und Lösungen. Universitätsverlag Wagner, Innsbruck 1990.

[2] *Haussmann, K.:* Iteratives versus rekursives Denken beim Problemlösen im Mathematikunterricht. **mathematica didactica** (1986) 61-74.

[3] *Heinze, G.:* Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter Schüler in Sachsen am Beispiel der Mathematikausbildung am Gymnasium Dresden Blasewitz. **DdM 21** (1993) 140-153.

[4] *Humenberger, H.:* Problemlösen als „roter Faden" im Unterricht - einige Anregungen. **PM 40** (1998) 193-201.

[5] *Kranzer, W.:* So interessant ist Mathematik. Aulis, Köln 1989.

[6] *Schüffler, K.:* Experimente zur harmonischen Reihe. **PM 33** (1991) 263f.

(2) In [9] wird jedoch *fälschlicherweise* geschrieben, die kontinuierliche Dehnung sei die für die Schnecke schnellere Version („fast doppelt so schnell"). Dies vermutlich deswegen, weil sich in den Berechnungen von [5] ein *Vorzeichenfehler* eingeschlichen hat und der Autor von [9] sein Ergebnis einfach mit jenem von [5] (offenbar an dessen Richtigkeit glaubend) verglichen hat. Aufgrund des Vorzeichenfehlers ergeben sich in [5] jedoch *falsche* Werte: ca. $5 \cdot 10^{43\,429}$ Sekunden bzw. $16 \cdot 10^{43\,421}$ Jahre.

(3) Nicht nur bei 1 cm/s Kriechgeschwindigkeit der Schnecke und 1 km/s Ausdehnungsgeschwindigkeit des Bandes erreichte die Schnecke das andere Ende des Bandes, sondern sogar bei jeder noch so kleinen aber konstanten Kriechgeschwindigkeit der Schnecke und jeder noch so großen aber konstanten Ausdehnungsgeschwindigkeit des Bandes (hinreichende aber nicht notwendige Bedingung). Dies gilt sowohl im diskreten als auch im kontinuierlichen Modell.

5.2. Ein Bücherstapel

Beispiel 5.2 (vgl. [8, S.47f und S.190]): Eine Anzahl von völlig gleichartigen Büchern, repräsentiert als kongruente Quader mit den Ausmaßen Länge $l = 1$, Breite b und Höhe h wird gestapelt. Dabei hat jedes Buch einen seitlichen Überstand (in Richtung der Kante mit der Länge $l = 1$) gegenüber dem darunterliegenden (vgl. Fig. 5).

Das zweite Buch wird so weit nach rechts versetzt unter das erste geschoben, dass der Schwerpunkt des ersten genau über die linke Oberkante des zweiten zu liegen kommt; es kippt daher gerade nicht ab. Unter den dadurch entstehenden Stapel aus zwei Büchern wird nun das dritte Buch so gelegt, dass der gemeinsame Schwerpunkt der ersten beiden genau über der linken Oberkante des dritten zu liegen kommt. Das Verfahren wird mit dem vierten, fünften, ..., n-ten Buch fortgesetzt.

Da in jedem Schritt der Stapel gerade noch stabil ist, können wir so theoretisch beliebig viele Bücher übereinanderstapeln, ohne dass der Stapel kippt.

1. Wie groß ist der Gesamtüberhang bei n Büchern ?
2. Nach wie vielen Schritten fällt der Zuwachs des Überhangs unter die Genauigkeitsgrenze von $\frac{1}{1000}$?
3. Wie groß ist die Gesamtlänge aller Überstände, i. e. der Grenzwert der Überhangsumme für $n \to \infty$?

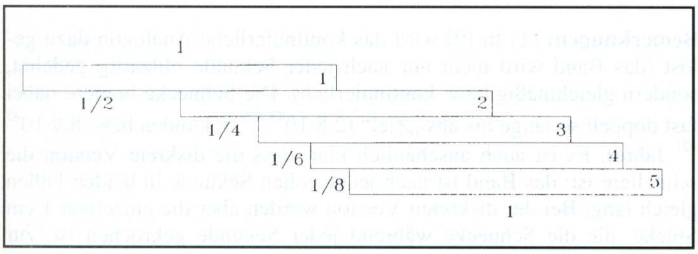


Fig. 5: Stapel überhängender Bücher

Es genügt, sich auf eine Raumrichtung (die Versetzungsrichtung x) zu beschränken (Breite b und Höhe h der Bücher beeinflussen die x-Koordinate des Schwerpunktes des Stapels nicht). Die x-Koordinate des Schwerpunktes eines Körpers, der sich aus zwei Teilen mit den Massen m_1, m_2 und den Schwerpunktskoordinaten x_1, x_2 zusammensetzt, ist das gewichtete Mittel

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Der erste Überhang a_1 (Buch 1 über Buch 2) ist natürlich $\frac{1}{2}$, da der Schwerpunkt des ersten Buches genau in der Mitte liegt. Nun bestimmen wir die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes der ersten beiden Bücher vom *rechten* Rand des Buches 2. Dieser ist gegeben durch

$$\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}.$$

Als Überhang a_2 ergibt sich daher $a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Analog berechnen wir die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes der ersten drei Bücher vom *rechten* Rand des Buches 3 mit $\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}}{2+1} = \frac{5}{6}$. Für den Überhang a_3 ergibt sich daher $a_3 = \frac{1}{6}$.

Allgemein: Die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes der ersten k Bücher vom rechten Rand des Buches k ergibt sich als $\frac{(k-1) \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}}{(k-1)+1} = \frac{2k-1}{2k}$. Für den Überhang a_k erhalten wir daher $a_k = \frac{1}{2k}$. Nach 500 Schritten ist also die Genauigkeitsgrenze von $\frac{1}{1000}$ beim Zuwachs des Überhangs (= neuer Überhang) unterschritten.

Da der Gesamtüberhang gleich der Summe der einzelnen ist, erhalten wir für den Gesamtüberhang s_n bei n Büchern (nach dem $(n-1)$-ten Schritt, $n-1$ Überhänge)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ bewirkt, dass auch $s_n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ jeden vorgegebenen Wert überschreitet ($\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$). Durch die beschriebene Stapelung kann also (theoretisch) erreicht werden, dass das letzte Buch gegenüber dem ersten beliebig weit seitlich verschoben sein kann, ohne dass der Stapel kippt.

Natürlich ist dieses Modell eines Bücherstapels von der Realität genauso weit entfernt, wie die „Schnecke am Gummiband". *Praxisbezug* ist aber auch gar nicht der Anspruch der beiden Aufgaben, sondern „nur" ein durch die Einkleidung anregendes und interessantes Gedankenexperiment zu sein!

Literatur

[1] *Baron, G. / E. Windischbacher* (Hrsg.): Österreichische Mathematik Olympiaden 1970 - 1989. Aufgaben und Lösungen. Universitätsverlag Wagner, Innsbruck 1990.

[2] *Haussmann, K.:* Iteratives versus rekursives Denken beim Problemlösen im Mathematikunterricht. **mathematica didactica** (1986) 61-74.

[3] *Heinze, G.:* Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter Schüler in Sachsen am Beispiel der Mathematikausbildung am Gymnasium Dresden Blasewitz. **DdM 21** (1993) 140-153.

[4] *Humenberger, H.:* Problemlösen als „roter Faden" im Unterricht - einige Anregungen. **PM 40** (1998) 193-201.

[5] *Kranzer, W.:* So interessant ist Mathematik. Aulis, Köln 1989.

[6] *Schüffler, K.:* Experimente zur harmonischen Reihe. **PM 33** (1991) 263f.

[7] *Stowasser, R. / B. Mohry*: Rekursive Verfahren aus der Mathematikgeschichte für den Unterricht. **MU 23**/1 (1977) 5-41.

[8] *Trinkaus, L.*: Probleme? Höhere Mathematik! Springer, Berlin [2]1993.

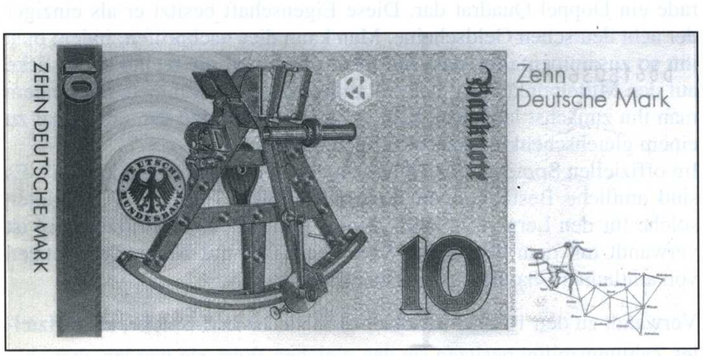
[9] *Welke, S.*: Die Schnecke auf dem Gummiband. **PM 37** (1995) 64-65.

Anschrift des Verfassers:
Hans Humenberger, Institut für Mathematik und Angewandte Statistik, Universität für Bodenkultur, Gregor Mendel-Str. 33, A-1180 Wien; e-mail: hans@mail.boku.ac.at

Mathematische Bemerkungen zum 10-DM-Schein

Hans G. Schönwald

In Vertretungsstunden oder in letzten Stunden vor Ferien könnte man diese mathematischen Bemerkungen zum 10-DM-Schein besprechen. Es handelt sich durchweg um mathematisch oberflächliche Aussagen, um auf der Hand liegende Bemerkungen oder höchstens um Hinweise auf tieferliegende. Der didaktische Sinn liegt einerseits in der Möglichkeit, sie als „einfache vermischte Übungen" fragend entwicklend zu unterrichten, und anderseits in dem Alltagsbezug: Weil jederman / jedefrau (noch) immer wieder einen 10-DM-Schein in die Hand nimmt und ihn noch öfter sieht und weil diese Scheine als Geld eine besondere existentielle Wucht ausstrahlen und zwar im sprichwörtlichen Sinn und doch wörtlich genommen - deshalb verhallt auch das mathematische Reflektieren über ihr Aussehen nicht so schnell. Und als vermischte Übungen konzentrieren sie sich zwar nicht um einen einzigen mathematischen Gegenstand; vielmehr simulieren sie jedoch den Alltag, in dem einem Mathematik immer wieder und schroff wechselnd begegnet.



Bald schon werden die 10-DM-Scheine ausgedient haben und gegen Euros ausgetauscht werden. Entweder sollte man diese didaktische Möglichkeit noch rasch vorher mit echten Banknoten nutzen oder sich einen Klassensatz an Fotokopien davon anfertigen, um sie später einsetzen zu können. Um Sicherheitsbedenken zu begegnen, könnte man die 10-DM-Scheine vergrößert fotokopieren.

Bei Geldscheinen unterscheidet man eine Vorder- und eine Rückseite. Die Vorderseiten der deutschen Geldscheine sind diejenigen Seiten, auf denen die Unterschriften des Bundesbankpräsidenten und des Vizepräsidenten stehen sowie der Beginn der Amtszeit des zum Zeitpunkt des Drucks amtierenden Präsidenten und Vizepräsidenten. Auf der Rückseite steht das Copyright. Auf den Vorderseiten sind Portraits von bedeutenden Persönlichkeiten aus dem deutschen Kultur- und Geistesleben abgebildet und auf den Rückseiten Gegenstände, mit denen ihr Ruhm zusammenhängt.

Auf vielen 10-DM-Scheinen ist bei dem Copyright das Jahr 1991 als Jahreszahl der Veröffentlichung des Erscheinungsbildes dieser Note angegeben. Diese Zahl ist ein „Palindrom"; von hinten gelesen ergibt sich dieselbe Zahl wie von vorn. Wenn man in einer Klasse nach einer besonderen Eigenschaft dieser Zahl fragt, findet meist ein Schüler die Palindrom Eigenschaft (freilich nicht diese Bezeichnung) ; zur Unterstützung des Suchens sollte man die Zahl lesen, und wenn eine weitere Unterstützung erforderlich wird, sollte man sie ziffernweise vorlesen. Die vorhergehende Jahreszahl mit dieser Eigenschaft ist 1881, die nächstfolgende schon 2002, die übernächste erst wieder 2112.

Auf der Vorderseite ist *Carl Friedrich Gauß* abgebildet. Er ist einer der bedeutendsten Mathematiker überhaupt, sicherlich der bedeutendste seiner Zeit, und wohl auch der bedeutendste deutsche. Er wurde „Mathematicorum Princeps" genannt, der „Fürst der Mathematiker". Er lebte - wie auf dem Geldschein notiert - von 1777 bis 1855, oder wie man oft verkürzend sagt: von 77 bis 55. Das legt für Schüler nahe, dass die Zahl, die sein Lebensalter angibt, durch 11 teilbar sei. Das ist falsch; richtig ist, dass diese Zahl ein 100-Komplement einer 11er Zahl ist: erst 77 – 55 = 22; dann 100 – 22 = 78. Allerdings hat er das 78. Lebensjahr nicht vollendet (30.4.77 - 23.2.55); er war 77 Jahre alt, als er starb, so dass man sagen könnte, das Doppelte von 77 sei 55 (modulo 100). Es ist aber auch 7-quadrat ungefähr 5-zig.

In das danebenstehende kartesische Koordiantensystem ist der Graph der *„Gaußschen Normalverteilung"* eingezeichnet; und auch die Definitionsgleichung dieser Funktion ist hineingeschrieben, nämlich

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Mit ihr kann man mancherlei statistische Verteilungen in der Natur ganz gut beschreiben. Wie man leicht aus dem Funktionsterm ersieht, ist die *Gauß*sche Normalverteilung symmetrisch zur (Senkrechten an der) Stelle μ. Bei dem Graphen auf dem 10 DM-Schein sind die Parameter μ (für den Erwartungswert) und σ (für die Standardabweichung) speziell gewählt: $\mu = 3$, $\sigma = 1$. Der Grund für diese Wahl liegt wohl darin, dass dann der Graph gerade im Koordinatennullpunkt „aufzukommen" scheint; entsprechend endet er an der Stelle $\mu + \sigma$ (= 6). Genau genommen läuft er auf beiden Seiten unendlich weiter und schmiegt sich dabei immer enger an die *x*-Achse an. Aber das kann man ohnehin nicht mehr zeichnen, da die Strichstärke breiter als der Abstand zwischen Graph und Achse wäre. An den Stellen 0 und 6 betragen die Funktionswerte ungefähr 0,005. Das macht bei 31,25 mm als Einheit auf der $f(x)$-Achse (0,4 ≙ 12,5 mm) ungefähr 0,15 mm aus; im Vergleich mit der Skala auf der *x*-Achse mit 3,125 mm als Einheit und $^1/_{10}$-Einteilung müsste der Schnittpunkt des Graphen mit der $f(x)$-Achse halb so weit vom Nullpunkt entfernt liegen wie der erste $^1/_{10}$-Strich auf der *x*-Achse. Mit einem Vergrößerungsglas sieht man, dass das beim Nullpunkt wohl nicht ganz hinkommt - jedenfalls nicht mit der sonst auf Geldscheinen üblichen Genauigkeit. Bei der Stelle 6 ist es wohl in Zeichengenauigkeitsgrenzen richtig gezeichnet; der Abstand zwischen Graph und *x*-Achse erreicht nicht die Strichstärke der beiden Linien. Bei der Stelle 0 aber wird dieser Abstand jedoch schon etwa ab dem *x*-Wert 0,07 unterschritten, so dass sich die beiden Linien teilweise zu überlagern scheinen. Somit ist der Graph auch nicht ganz symmetrisch, wie er es sein sollte. Diese graphische Ungenauigkeit ist allerdings durch das verwendete Druckverfahren, nämlich Stichtiefdruck, bedingt. Mathematisch nicht falsch, aber auch nicht „schön" ist, dass bei den $^1/_{10}$-Einteilungen auf den Achsen die 5er-Strichlein nicht hervorgehoben sind, ferner dass die Angaben der durch die Achsen dargestellten Größen, nämlich *x* und $f(x)$ exakt bei den letzten Skalenzahlen liegen, und dass sie „innen" und nicht wie üblich „außen" liegen (bezogen auf den positiven Quadranten). Die Wahl dieser Funktion ist sicherlich glücklicher als die der komplexen Ebene auf der Gedenk-Briefmarke zum 200. Geburtstag; denn die „*Gauß-Wessel*sche Zahlenebene" hat *Gauß* nicht allein entwickelt, während er sich vielerlei andere Verdienste nicht mit anderen zu teilen braucht.

Auf der Rückseite ist ein Sextant dargestellt. *Gauß* benutzte ihn bei seinen Vermessungsarbeiten. „Was ist das für ein komisches Gerät?", fragt der Cornelsen Verlag in seinem Lehrer-Rundschreiben „zum Beginn des Schuljahres 1994/95" und verweist als Antwort auf S. 112f in dem dort erschienen Schülerlexikon für Mathematik. Der Name Sextant weist im Sinne von „pars pro toto" darauf hin, dass die Winkelskala (auf dem 10 DM-Schein unten) ein Sechstel eines Vollkreises umfasst. Mit diesem Gerät kann man Winkel zwischen Sternen oder anderen Bezugspunkten bis zu einer Größe von einem Drittel eines Voll-Winkels messen; bei dem Messvorgang werden deren Bilder über z. T. halbdurchlässige Spiegel zur Deckung gebracht. Übrigens ist rechts oberhalb des Sextanten ein regelmäßiges Sechseck - in dessen Inneren man im Gegenlicht ein rechts links gespiegeltes „D" sieht - abgebildet; die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken erzeugen Sechstel-Voll-Winkel.

Gauß war Professor in Göttingen, also vom Hannoverschen König angestellt. Dessen Königreich hat er vermessen. Der nördlichste Teil der Landkarte ist auf der Rückseite rechts unten abgebildet.

Auf der Vorderseite ist die Nummer des Geldscheines zweimal abgedruckt, einmal links oben und einmal rechts unten. Die Geldscheine sind einzeln nummeriert! Die eigentliche zehnstellige Nummer, aus Ziffern und Buchstaben zusammengesetzt, ist um eine Prüfziffer (elfte Stelle) ergänzt. Die Prüfziffer erlaubt eine gewisse Kontrolle, ob die Nummer richtig gelesen worden ist; und zwar können alle Einzelfehler und alle einfachen Vertauschungen mittels dieser Prüfziffer erkannt werden. Die Kontrollrechnung ist aber so kompliziert, dass sie für praktische Zwecke nur von Computern, die die Geldscheine zählen, durchgeführt werden kann. Diese können es allerdings wiederum so schnell, dass pro Sekunde etwa zehn Scheine gezählt werden. Gleichwohl würde eine einzige solche Maschine, da einige hundert Millionen 10 DM-Schein im Umlauf sind, mehr als ein Jahr dafür brauchen, wenn sie ununterbrochen zählte. Da ein Schein ca. $^1/_{10}$ mm dick ist, würden alle 10 DM-Scheine in Päckchen stehend hintereinander gelegt eine einige zig km lange Reihe ergeben. Oder, da das Volumen eines solchen Scheins knapp 1 cm^3 ausmacht, würden alle zusammen in ein Ein-Familien-Haus passen, wenn man sie ganz eng legte. Und langeweg aneinandergeklebt könnte man damit ein Schleif„chen" um den Erdball binden.

Die Zahl 10 ist die Basiszahl unseres Zahlensystem für den Alltag in unserer Gesellschaft und ebenso für die Einheiten der meisten Maße. Sie steht vielfach auf jedem Schein. Zunächst einmal steht sie als große „10" je doppelt auf Vorder- und Rückseite. Dann steht sie vorn einmal und hinten zweimal als große „ZEHN". Auf dem Sicherheitsfaden, einem aluminiumbeschichteten Plastiksteifen, ist die Zehn eingestanzt, im Gegenlicht kann man es lesen. Er ist als visuell prüfbares Echtheitsmerkmal für jedermann gedacht, wird aber auch für eine maschinelle Echtheitsprüfung genutzt. Außerdem steht sie als Punkt und Balken Zeichen in verstärktem Stichtiefdruck, also mit fühlbarem Relief für Sehbehinderte auf der Vorderseite. Schließlich stehen in Mikroschrift zwei Dtzd. „10" auf den Rändern der beiden regelmäßigen Sechsecke auf Vorder- und Rückseite und einige hundert Mal „Zehn" auf der Vorderseite rechts vom Portrait von *C. F. Gauß*.

Der 10-DM-Schein ist 130 mm lang und 65 mm breit. Er stellt also gerade ein Doppel-Quadrat dar. Diese Eigenschaft besitzt er als einziger der acht deutschen Geldscheine. Man kann dies nachprüfen, indem man ihn so zusammenfaltet, dass die linke obere und die rechte obere Ecke auf den Mittelpunkt des unteren Randes zu liegen kommen, oder indem man ihn zunächst langeweg halb zusammenfaltet und dann diagonal zu einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck.

Im offiziellen Sprachgebrauch heißen die Geldscheine „Banknoten". Es sind amtliche Bestätigungen für den Geldwert - so wie Schul-Noten solche für den Lernerfolg sind. „Nota" (lat.; Marke, Schriftzeichen) ist verwandt mit dem deutschen Wort Notiz und mit Notar, der Notizen von amtlichen Charakter niederschreibt.

Verwandt zu den 10-DM-Scheinen sind die 10-DM-Stücke; als offizielles Zahlungsmittel besitzen sie den gleichen Wert, sie werden aber eher als Sammelobjekt genutzt. Sie werden auch mit wechselnden Motiven und jeweils in limitierter Auflage zu besonderen Anlässen herausgegeben.

Anschrift des Verfassers:
OStR Dr. Hans G. Schönwald, Wildener Str. 36,
57290 Neunkirchen / Siegerland