Das Problem des anderen Kindes

von Stefan Götz und Hans Humenberger

Über stochastische Paradoxa ist schon sehr viel geschrieben worden (z. B. SCHRAGE 1984, BENTZ 1985, STADLER 1986, SZEKELY 1990, MEYER 1995, HUMENBERGER 2000, STEWART 2003 etc.). Dabei geht es immer um eine Situation, deren Beurteilung scheinbar einen Widerspruch enthält[1], oder besser: ein der Intuition bzw. dem gesunden Menschenverstand widersprechendes Resultat liefert. Paradoxa lassen sich i. A. meist „aufklären", d. h. nach Durchschauen der Situation ist diese dann gar nicht mehr paradox, die anfänglich scheinbaren Widersprüche haben sich aufgelöst.

Manch Außenstehende mögen glauben, dass es in der Mathematik, dieser exakten Wissenschaft, gar nicht paradox zugehen kann. Dies ist bekanntlich ein gewaltiger Irrtum, denn „Paradoxien" sind auch in der Mathematik seit jeher immer schon Anlass für weitere Entwicklungen gewesen. WINTER 1992 spricht bei Paradoxa in der Mathematik sogar von einem „essentiellen Phänomen in der Genese mathematischer Ideen." (S. 23). Er meint damit z. B. die für die Pythagoreer zunächst paradox erscheinende Behauptung von der Existenz inkommensurabler Strecken etc. Man könnte als weitere Beispiele die Entdeckung von Nichteuklidischen Geometrien oder die „Komplexen Zahlen" nennen. Durch Situationen, wo die Intuition irgendwie im Widerspruch zu etwas anderem zu stehen scheint, oder wo eine Erklärung (Sichtweise, Aussage, Phänomen etc.) nicht ganz zu einer anderen passt, dort wird der Forschergeist ja ungemein angespornt: „Dem muss ich jetzt auf den Grund gehen!", „Was ist da los?", „Das will ich jetzt wirklich wissen!". Diese mögliche Motivation kann und soll auch den Mathematikunterricht bereichern.

In der Stochastik spielen Paradoxa sicher eine besondere Rolle, denn sie entstehen oft erst durch verschiedene *Formulierungen* bzw. *Interpretationen* (wie z. B. das berühmte BERTRAND'sche Paradoxon über die Länge einer *zufällig* gezeichneten Sehne).

Auch der *didaktische* Wert solcher Paradoxa wurde schon vielfach thematisiert (z. B. BENTZ 1985, WINTER 1992 etc.). Zusammenfassend kann man sagen, dass dieser insbesondere in Faszinations- bzw. Unterhaltungswert (Motivation) und Bildungswert (Verständnis) besteht. Der zweite genannte Aspekt tritt vermutlich nur dann ein, wenn der intensiven selbständigen Beschäftigung mit einem Paradoxon und dessen Klärung genügend Zeit und Raum gegeben wird. Dabei kann auch gut *Mathematik als Prozess* erlebt werden: Schüler/innen diskutieren über Sichtweisen und Argumente, suchen in einer Unsicherheit erst ihren eigenen intuitiven Standpunkt, machen ihren jeweiligen Standpunkt dann anderen klar, tauschen Argumente aus, reden über Mathematik etc. Selbstverständlich ist dies nur dann möglich, wenn die Lehrperson das Paradoxon nicht sofort durch Frontalunterricht (vielleicht in bester Absicht) „klärt", sondern dem Prozess Zeit gibt. Das bedeutet nicht, dass die Lehrperson gar nichts zu diesem Thema sagen soll; nach einer gewissen Zeit der selbständigen Auseinandersetzung der Lernenden mit diesem Thema ist natürlich auch wieder die Lehrperson gefragt. In welcher Form dann die „Klärung" erfolgt, hängt natürlich vom Stil der Lehrkraft ab (bei hohem Grad an Selbständigkeit der Lernenden mit nur einigen Hinweisen, fragend-entwickelnder Unterricht, Lehrer/innen/vortrag, ...). Eine Herausforderung besteht auch in dem immer wieder zu beobachtenden Phänomen, dass verschiedene Personen durchaus unterschiedliche Erklärungsmuster als einsichtig akzeptieren.

Im Folgenden soll es um eine genauere Analyse eines bekannten Problems gehen.

Das Problem des anderen Kindes:
Man weiß, dass eine Familie zwei Kinder hat und mindestens ein Mädchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Familie zwei Mädchen hat?

Je nach Auffassung und Interpretation kann sich dabei der Wert $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ ergeben; vermutlich werden in einer Klasse beide Versionen auftauchen, vielleicht mit ähnlichen Begründungen wie:

- Jungen- und Mädchengeburten sind ja praktisch gleich wahrscheinlich und das Wissen über das Geschlecht eines Kindes kann doch die Wahrscheinlichkeit für das Geschlecht des zweiten Kindes nicht beeinflussen, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.
- Eine Familie mit zwei Kindern kann nur so aussehen[2]: MM, MJ, JM, JJ. Durch das Wissen „mindestens 1 Mädchen" kommt JJ nicht mehr in Frage, so dass drei Möglichkeiten überbleiben. D. h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{3}$.

Wenn nicht beide Versionen auftauchen, könnte die fehlende von der Lehrperson beigesteuert werden, um Diskussionen und selbständige Beschäftigung mit der Materie zu bewirken.

Was ist nun richtig? Genau eine von beiden Möglichkeiten? Beide irgendwie (je nachdem)? Beide falsch? Verwirrung! Das ist die typische Situation eines stochastischen Paradoxons. Auch noch ohne allzu exakte Schreib- und Denkweisen kann diese Situation im Unterricht möglicher Ausgangspunkt vieler produktiver Gespräche und Erklärungsansätze sein. Und solche Situationen sollten wir Lehrende auch nutzen! Der möglichen Gefahr, dass dadurch bei den Lernenden der Eindruck einer gewissen Beliebigkeit entsteht, kann von Seiten der Lehrenden dadurch begegnet werden, dass in dieser Fragestellung (und in anderen, wie wir noch sehen werden) nicht alle nötigen Informationen enthalten sind.

Die Abhängigkeit der Ergebnisse von den verwendeten Modellen, Voraussetzungen etc. wird im Unterricht mangels geeigneter Beispiele selten thematisiert. Das Kennen solcher Abhängigkeiten ist wohl ein wesentlicher Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung.

Werfen wir zunächst einen Blick auf eine Literaturauswahl zu dieser Aufgabe:
Z. B. heißt es in (BÜCHTER/HENN 2005, S. 302):

„Armin hört, dass Beate zwei Kinder hat, kennt aber nicht deren Geschlecht.

a) Durch Zufall erfährt er, dass eines der Kinder ein Mädchen[3] ist.
Wie groß ist die Chance, dass das zweite Kind auch ein Mädchen ist?
b) Ist die Chance anders, wenn Armin sogar erfährt, dass das ältere Kind ein Mädchen ist?"

In (KÜTTING 1999, S. 151) steht:

a) Man weiß: Eine Familie hat zwei Kinder, eines davon ist ein Mädchen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie zwei Mädchen hat?
b) Man weiß: Eine Familie hat zwei Kinder. Das ältere von beiden ist ein Mädchen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie zwei Mädchen hat?

In (BARTH/HALLER 1998, S. 101 bzw. S. 139) ist diese Aufgabe so formuliert:

„Ein Vater von zwei Kindern sagt:

a) ‚Eines meiner zwei Kinder ist ein Mädchen.'
b) ‚Das ältere meiner zwei Kinder ist ein Mädchen.'
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das zweite Kind ein Mädchen ist, falls Knaben- und Mädchengeburten als gleich wahrscheinlich angenommen werden?"

Ganz analog ist die Aufgabe auch in (HENZE 2000, S. 118) formuliert.

Völlig unstrittig ist die Antwort jeweils bei b), wenn man also weiß, dass das *ältere* Kind ein Mädchen ist: Dann reduziert sich die Frage ja auf das Geschlecht eines ganz *bestimmten* Kindes, nämlich des *jüngeren*; die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist klarerweise $\frac{1}{2}$.

Auch mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (wie z. B. in BARTH/HALLER auf S. 139 explizit gefordert) ergibt sich (selbstverständlich!) derselbe Wert:

Durch die Bedingung

B = „das ältere Kind ist ein Mädchen"

wird die ursprüngliche Ergebnismenge $\Omega = \{MM, MJ, JM, JJ\}$ eingeschränkt auf

$B = \{MM, MJ\}$, und es ist $P(MM \mid B) = \frac{P(MM \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} : \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Oder man verwendet die LAPLACE-Wahrscheinlichkeit im neuen (kleineren, durch die Bedingung eingeschränkten) Ergebnisraum B statt Ω: „In B ist von zwei möglichen Ergebnissen eines günstig".

Die oben genannten Autoren berechnen bei a) alle jeweils $\frac{1}{3}$ als Lösung. Die Angaben werden also durchweg so interpretiert: Die Kombination JJ kommt nicht mehr in Frage, und von den drei gleich wahrscheinlichen Möglichkeiten MM, MJ, JM ist eine „günstig" für das Ereignis „die Familie hat zwei Mädchen", d. h. $P = \frac{1}{3}$ – siehe oben.

Dass das Wissen „JJ kommt nun nicht mehr in Frage" eine logische *Konsequenz* der jeweiligen Angabe bei a) ist, ist klar. Aber eben vielleicht nur *eine* Konsequenz (neben anderen): Es ist nämlich auch möglich, dass in der jeweiligen Information mehr steckt als nur das triviale Ausschließen von JJ!

Man kann und soll sich nämlich (insbesondere bei Formulierungen wie bei BÜCHTER/HENN und KÜTTING) die Frage stellen:

Auf welche Weise kommt die Information „mindestens ein Mädchen" zustande?

Darüber wird nichts ausgesagt. Erstaunlicherweise beeinflusst aber die Antwort auf diese Frage das Ergebnis.

Dazu betrachten wir zunächst folgende Variante mit einer *Begegnung* (s. a. HENZE, S. 115 f.):

> Eine Familie ist neu in ein Wohnhaus eingezogen und es hat sich schon herumgesprochen, dass sie zwei Kinder hat. Im Treppenhaus begegnet man nun einem dieser neuen jungen Hausmitglieder, es ist ein Mädchen[4]. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie zwei Mädchen hat?

Die andere (in oben zitierten Literaturstellen nur bei HENZE angegebene) Lösung $\frac{1}{2}$ kann auf mehrere Arten gefunden werden:

a) Gefragt ist einfach das Geschlecht eines bestimmten Kindes, nämlich jenes des nicht gesehenen; die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist klarerweise $\frac{1}{2}$, analog zu oben, wo nach dem Geschlecht des jüngeren Kindes gefragt wurde.

b) Man kann hier aber auch mit einem Baumdiagramm argumentieren (zweistufiges Zufallsexperiment, Umdrehen von bedingten Wahrscheinlichkeiten, Regel von BAYES): Die erste Stufe des Zufallsexperiments besteht in der Kinderkonstellation der Familie; dabei setzen wir – wie üblich – etwas vereinfachend $p = \frac{1}{4}$ für alle vier Möglichkeiten. Das Geschlecht jenes Kindes, das einem im Treppenhaus als erstes begegnet, ist ja das Ergebnis eines Zufallsexperiments, wobei wir nun annehmen, dass man im Falle von MJ und JM

mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zuerst dem Mädchen begegnet. So kann die ganze geschilderte Situation als zweistufiges Zufallsexperiment aufgefasst werden (**Abb. 1**).

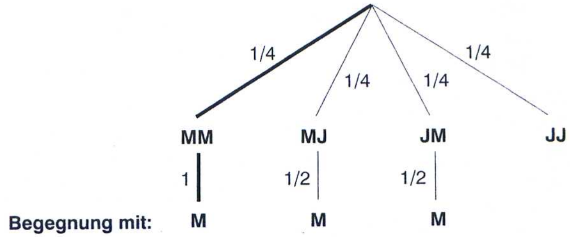

Abb. 1

Mit der Formel von BAYES (oder auch nur durch Betrachten des zugehörigen Baumdiagramms) ist klar[5], dass der dick gezeichnete Pfad zu M über MM genau so wahrscheinlich ist wie die beiden anderen Pfade zu M über MJ und JM zusammen, d. h. $P(MM \mid \text{Begegnung mit } M) = \frac{1}{2}$.

Bei den Bäumen schreiben wir aus Übersichtlichkeitsgründen in der zweiten Stufe nicht jeweils alle Möglichkeiten an, sondern nur das jeweils in Rede stehende Ereignis, von dem man weiß, dass es eingetreten ist (hier: M). Dadurch enthält der Baum wirklich nur relevante Pfade und man *überblickt* die Situation viel *schneller*.

Bei diesem ersten Beispiel führen wir auch noch die Lösung mit der BAYES'schen *Formel* an:

$$P(MM \mid M) = \frac{P(M \mid MM) \cdot P(MM)}{P(M)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

In weiterer Folge verzichten wir jedoch auf die Formel und forcieren die auch a priori intuitive Sichtweise zur Umkehr von bedingten Wahrscheinlichkeiten, nämlich als *Verhältnis* von bestimmten *Pfadwahrscheinlichkeiten*:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(\text{Pfad nach B über } A_1)}{P(\text{Summe aller Pfade, die nach B führen})} \left(= \frac{P(B \mid A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} \right)$$

Darstellungen wie **Abb. 2** forcieren wir nicht deswegen, weil wir die Formel für unwichtig hielten, sondern deswegen, weil die Formel im Unterricht oft ohnehin sehr stark dominiert, die intuitive Sichtweise des in Rede stehenden Verhältnisses (in unserer Sichtweise das „Innenleben" der Formel von BAYES) wird dabei oft kaum gewürdigt, wobei dann die BAYES-Formel sogar ins bloß Kalkülhafte zu entarten droht. Eine verständige Handhabung des Themas bedarf aber sicher beider Seiten: Formel sowie zugehörige Vorstellung über das „Innenleben" („Grundvorstellung").

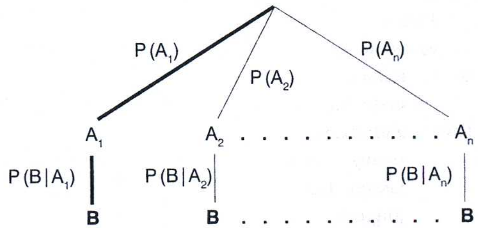

Abb. 2

Interpretation: Die Tatsache, dass einem zuerst ein Mädchen begegnet ist, ist ein *Indiz* für MM, denn bei MM ist die Wahrscheinlichkeit dafür ja doppelt so groß wie bei

MJ oder bei JM, daher wird die Wahrscheinlichkeit für MM von „$\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ angehoben“ ($\frac{1}{3}$ erhielte man bei naiver LAPLACE-Anwendung: MM ist eine von drei Möglichkeiten MM, MJ, JM).

amit ist klar: Bei den Informationen „mindestens ein Mädchen“ in den oben genannten Li-aturstellen[6] darf man sich die Information nicht durch eine *zufällige* Begegnung mit ei-m der beiden Kinder zustande gekommen denken. Denn in diesem Fall sind die drei Mög-hkeiten MM, MJ, JM a posteriori (d. h. nach der Beobachtung) eben nicht mehr gleich ahrscheinlich!

Wie ist nun die Lage, wenn man sich vorstellt: Man hat hat das Kind nicht selbst gese-n, sondern ein Freund erzählt einem, dass er ein Mädchen gesehen hat? Auch hier gilt aber sselbe Argument: Ein Zufallsexperiment hat dem Freund ein Mädchen vor Augen geführt, dass dies genau so ein Indiz für MM ist, wie wenn man selbst das Mädchen gesehen hätte. er obige Baum bleibt unverändert! Es kann also nicht darauf ankommen, *wem* der Zufall n Mädchen vor die Augen gebracht hat, entscheidend ist nur, *dass* es so war.

Nun sind wir schon sehr nahe bei „des Pudels Kern“: Entscheidend, ob man bei den Auf-ben des Typs a) zu $\frac{1}{3}$ oder zu $\frac{1}{2}$ kommt, ist, ob ein wie auch immer geartetes *Zufallsexperi-ent* ein *Mädchen* ans Licht gebracht hat, ob sozusagen eine „implizite Lotterie“ stattgefun-n hat, deren Ausgang ein „Indiz“ für eine gewisse Kinder-Konstellation ist.

Dieses Zufallsexperiment muss nicht im „Sehen eines Kindes“, sondern kann auch z. B. „Hören einer Kinderstimme“ (vorausgesetzt man kann daraus eindeutig das Geschlecht entifizieren) oder dergleichen bestehen.

Wie ist die Lage, wenn der Vater oder die Mutter erzählt: „Gestern hat ein Mädchen ge-eint“? Wiederum: Das Zufallsexperiment „Geschlecht des gestern weinenden Kindes“ hat n Mädchen als Resultat, und dies ist ein Indiz für MM usw., also wie oben, es bleibt im inzip beim obigen Baumdiagramm und beim Wert $\frac{1}{2}$.

Wie aber ist die Situation zu bewerten, wenn ein Elternteil sagt: „Gestern hat Anna ge-eint“?

Ganz analog zu oben kann man sagen: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Kind (Geschwister von Anna) ein Mädchen ist, beträgt $\frac{1}{2}$.

Etwas anders als vorhin fällt das Baumdiagramm aus (A steht für Anna, M für Mädchen, J für Junge) – zwei verschiedene Möglichkeiten:

a) Man kann einerseits die erste Stufe des Zufallsexperiments gleich lassen (älter | jünger) – die zweite Stufe besteht in: *Welches* ist das *weinende* Kind (**Abb. 3**)?

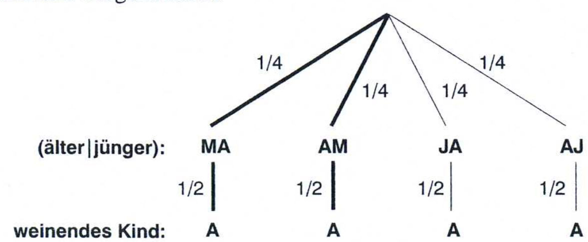

Abb. 3

b) Oder man unterscheidet in der ersten Stufe nicht nach älter/jünger, sondern einfach nach dem Geschlecht des zweiten Kindes neben Anna (**Abb. 4**):

In beiden Fällen ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit der Wert $\frac{1}{2}$: Man sieht auch ohne zu rechnen (Formel): Die Wahrscheinlichkeit der dick gezeichneten Pfade nach A machen jeweils die Hälfte der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade nach A aus.

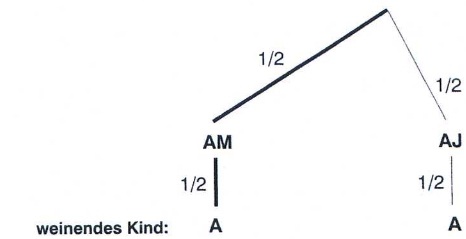

Abb. 4

Es ist gar nicht so leicht, sich eine Situation vorzustellen, in der die Vorstellung eines Zufallsexperiments, das das Geschlecht eines Kindes zeigt, nicht tragend ist, sondern einfach nur die Möglichkeit JJ ausgeschlossen wird, und die restlichen drei Möglichkeiten MM, MJ, JM gleich wahrscheinlich bleiben.

Selbst die Formulierung des Vaters oder der Mutter (die ja ihre beiden Kinder kennen!) „Eines meiner zwei Kinder ist ein *Mädchen*“ (vgl. BARTH/HALLER und HENZE, S. 118) kann als das Resultat eines Zufallsexperimentes aufgefasst werden: „*Geschlecht*, das der Elternteil in diesem Moment nennt“ (**Abb. 5**; dabei nehmen wir an, dass bei MJ bzw. JM jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ „Mädchen“ gesagt wird). In diesem Sinn wäre das aber wieder ein Indiz für MM, ganz analog zu oben.

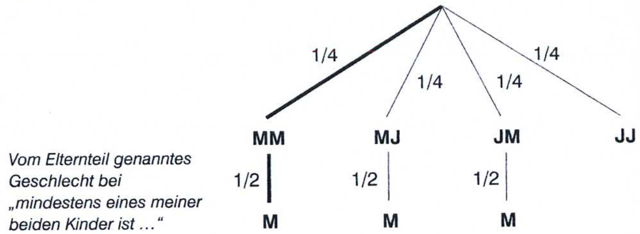

Abb. 5

Nun zwei Möglichkeiten, sich vorzustellen, wie die angesprochene Situation zustande kommen könnte: „JJ wird durch die Information ausgeschlossen, und die restlichen drei Möglichkeiten MM, MJ, JM bleiben paarweise gleich wahrscheinlich, d. h. $P(MM) = \frac{1}{3}$“:

1) Die Person, die sich für die Wahrscheinlichkeit interessiert, fragt jemanden, der das Geschlecht *beider* Kinder kennt[7]: „Sind in dieser Familie beide Kinder Jungen?“; er/sie erhält zur Antwort: „Nein“ (oder gleichwertig: „Gibt es in der Familie ein Mädchen?“ – „Ja“). In dieser Situation gibt es kein Zufallsexperiment, dessen Ausgang ein Indiz auf MM wäre, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist tatsächlich $\frac{1}{3}$. Auch hier kann man wieder einen Baum zeichnen (**Abb. 6**; eigentlich nicht nötig, der Baum wurde hier nur

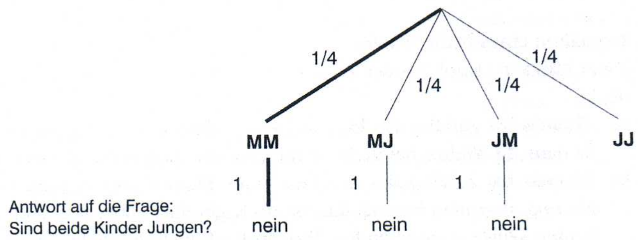

Abb. 6

wegen der Analogie zum obigen Baum gezeichnet): Die „Wahrscheinlichkeitsmasse" des dick gezeichneten Pfades macht $\frac{1}{3}$ aller Pfade nach „nein" aus.
Es ist hier aber wichtig, dass die fragende Person entweder weiß, dass die befragte das Geschlecht beider Kinder kennt, oder dass die Auskunft gebende Person dies zumindest dazusagt: „Nein, denn ich kenne das Geschlecht beider Kinder." Sonst könnte ja wieder ein verstecktes Zufallsexperiment dahinter stecken: „Nein, denn ich habe gestern ein Mädchen gesehen."

2) Oder man weiß Folgendes: Wenn die Familie mindestens ein Mädchen hat, dann sagt der Elternteil bei „In unserer Familie gibt es mindestens ein(en) …" sicher *Mädchen* statt … (d. h. auch bei MJ und JM kommt statt … sicher „Mädchen"). Solche Absprachen bzw. Informationen sind aber im Alltag kaum üblich, so dass diese Situation doch ziemlich konstruiert erscheint.

Man erkennt, dass es also ausschließlich darauf ankommt, wie die Information „mindestens ein Mädchen" zustande gekommen ist:

- Steckt ein Zufallsexperiment dahinter, dann ist mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das zweite Kind auch ein Mädchen. Die Tatsache „die Familie hat mindestens ein Mädchen" ist dann nämlich wirklich nur *eine* Konsequenz und nicht identisch mit dem Gehalt der Information, welche das Zufallsexperiment liefert.
- Folgt die Information dagegen aus der Antwort „Nein" eines Wissenden auf die Frage: „Sind in dieser Familie beide Kinder Jungen?" (bzw. „Ja" auf die Frage: Gibt es in dieser Familie ein Mädchen?"), dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.

Man kann also nicht pauschal sagen, dass bei den oben angegebenen Aufgabenformulierungen der verschiedenen Autoren $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ generell die richtige bzw. falsche Antwort wäre. Es ist eigentlich auch sehr plausibel, dass sich hier unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten ergeben, denn die beiden Aussagen „mindestens eines der Kinder ist ein Mädchen" und „das ältere[8] Kind ist ein Mädchen" sind ja auch logisch nicht äquivalent: Aus der zweiten folgt zwar die erste, aber nicht umgekehrt!

Ein wenig erinnert uns dieses Problem an das BERTRAND'sche Paradoxon, bei dem der Vorgang „*zufällig* eine Sehne zeichnen" nicht genauer festgelegt ist; daher kommt es zu unterschiedlichen Antworten. Ähnlich scheint uns hier eine Formulierung wie bei BÜCHTER/HENN oder KÜTTING variabel auslegbar zu sein. Selbst eine wie bei BARTH/HALLER oder HENZE[9] lässt sich auch anders als von den Autoren getan deuten, ist also verschiedener Interpretationen fähig: Steckt ein Zufallsexperiment dahinter?

Zum Schluss möchten wir noch auf einige andere Formulierungen (Einkleidungen) dieses Problems hinweisen, wobei die ersten beiden mathematisch völlig analog zum „Problem des anderen Kindes" sind.

Erspähen eines Münzwurfes[10]

Zwei Münzen (Kopf K oder Zahl Z) werden geworfen und z. B. mit einem Becher zugedeckt.

a) Thomas hat zufällig das Ergebnis *eines* Münzwurfes erspähen können: Kopf. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für Thomas, dass beide Münzen K zeigen?

b) Thomas hat zufällig das Ergebnis *eines* Münzwurfes erspähen können: Kopf. Daraufhin sagt er seinem Freund, dass er ein K gesehen habe, sagt aber nicht dazu, welchen der beiden Würfe er gesehen hat. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für den Freund, dass beide Münzen K zeigen?

c) Thomas hat *beide* Münzwürfe beobachtet und teilt dies seinem Freund mit; dieser fragt ihn daraufhin, ob beide Münzen auf Z gefallen sind, was Thomas verneint. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für den Freund, dass beide Münzen K zeigen?

Antworten: Bei **a)** und **b)** ergibt sich jeweils $\frac{1}{2}$ [bei **b)** auch dann, wenn Thomas seinem Freund sagt, *welchen* Wurf er gesehen hat – vgl. die Aufgabenteile b) in den oben zitierten Literaturstellen], bei **c)** ergibt sich $\frac{1}{3}$.

BERTRAND'sches Schubladenbeispiel[11]

In einem Raum stehen vier Kästchen mit je zwei Schubladen (links, rechts). Ein Kästchen enthält in jeder Lade eine Goldmünze, eines links eine Gold- und rechts eine Silbermünze, eines links eine Silber- und rechts eine Goldmünze, und schließlich das vierte Kästchen in jeder Lade eine Silbermünze (**Abb. 7**).

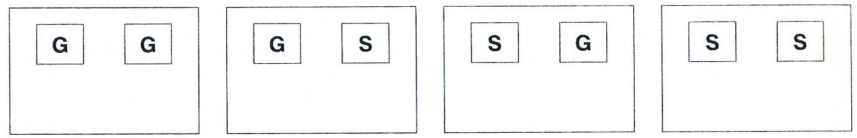

Abb. 7

a) Thomas hat ein Kästchen zufällig ausgewählt und zufällig eine Lade geöffnet; er findet eine Goldmünze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Lade dieses Kästchens eine Goldmünze enthält?

b) Thomas erzählt dies seinem Freund, sagt aber nicht dazu, welches Kästchen er gewählt hat. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für den Freund, dass sich in der zweiten Lade des Kästchens auch eine Goldmünze befindet?

c) Thomas wählt ein Kästchen und öffnet *beide* Laden. Er erzählt dies seinem Freund und dieser fragt ihn dann neugierig, ob er das Kästchen mit zwei Silbermünzen erwischt habe. „Nein" sagt Thomas. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für den Freund, dass Thomas in beiden Laden eine „Goldmünze" fand?

Antworten: Bei **a)** und **b)** ergibt sich jeweils $\frac{1}{2}$, bei **c)** ergibt sich $\frac{1}{3}$.

Drei Gefangene[12]

Drei Gefangene A, B, C sitzen in Einzelhaft. Ihnen wurde mitgeteilt, dass genau einer von ihnen zum Tode verurteilt und zwei freigesprochen wurden. Der Gefangenenwärter betritt die Zelle von A, um ihm Essen zu bringen. A spricht den Wärter an:
„Da nur einer von uns Dreien (A, B, C) zum Tod verurteilt wurde, weiß ich ja ohnehin, dass (mindestens) einer von B oder C freigesprochen wurde, also kannst du mir ja einen von diesen beiden namentlich nennen, der freigesprochen wurde. Dabei verrätst du mir in Wirklichkeit ja eigentlich nichts, nur den Namen in Bezug auf eine Tatsache, die ich sowieso weiß."
Der Gefängniswärter aber entgegnet: „Wenn ich dir den Namen eines Freigesprochenen (B oder C) nenne, so tue ich dir damit aber nichts Gutes: Momentan beträgt für dich die Wahrscheinlichkeit, der zum Tode Verurteilte zu sein, klarerweise $\frac{1}{3}$. Nenne ich dir aber einen Freigesprochenen (B oder C), dann kommt neben dir ja nur mehr **einer** für die Verurteilung

in Frage, so dass sich dann die entsprechende Wahrscheinlichkeit für dich auf $\frac{1}{2}$ erhöht."

Wie ist die Situation tatsächlich zu bewerten?

Wir gehen o. B. d. A. davon aus, dass der Wärter A gegenüber den Namen C als freigesprochene Person sagt, und fragen, was diese Auskunft für A bedeutet. Die Entscheidung, wer hier recht hat (A oder Wärter), hängt ab von der Antwort auf die Frage: Was macht der Wärter in jenem Fall, dass A selbst der zum Tod Verurteilte ist (siehe dazu auch GÖTZ 2006)?

1. Angenommen, der Wärter würde in so einem Fall sicher C sagen[13] (**Abb. 8**). Dann hätte der Wärter recht mit seiner Argumentation: Die Wahrscheinlichkeit für A, der Verurteilte zu sein, würde sich von a priori $\frac{1}{3}$ auf a posteriori $\frac{1}{2}$ erhöhen. In der Sprechweise von oben: Von den ursprünglich drei gleich wahrscheinlichen Fällen (A, B, C) bleiben nach der Nennung von C für A nur noch zwei gleich wahrscheinliche Fälle (A, B) für die verurteilte Person über. Als Baum: Beide Pfade über A bzw. B sind gleich wahrscheinlich:

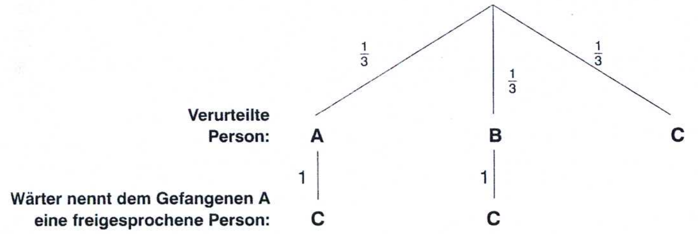

Abb. 8

2. Wenn allerdings der Wärter im Fall, dass A verurteilt wurde, B oder C jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nennt (Zufallsexperiment, d. h. er entscheidet z. B. mittels eines Münzwurfes), dann ist der Ausgang C des Zufallsexperiments „Nennen eines Freigesprochenen" eben ein Indiz dafür, dass eigentlich B der Verurteilte ist, denn der Pfad nach C über B ist doppelt so wahrscheinlich wie jener über A (**Abb. 9**): Das heißt: Die Wahrscheinlichkeit, dass B die verurteilte Person ist, steigt für A von a priori $\frac{1}{3}$ auf a posteriori $\frac{2}{3}$. Für A selbst ändert sich allerdings nichts: Seine a-priori-Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ (der Verurteilte zu sein) ist auch seine a-posteriori-Wahrscheinlichkeit! Die ursprüngliche a-priori-Wahrscheinlichkeit von C wurde auf B übertragen: C hat für A nach Nennung von C natürlich Wahrscheinlichkeit 0 (der Verurteilte zu sein), B hat den ursprünglichen Wert von C $\left(\frac{1}{3}\right)$ „einfach dazu bekommen", d. h. die Konsequenz der Nennung von C wird ganz von B getragen.

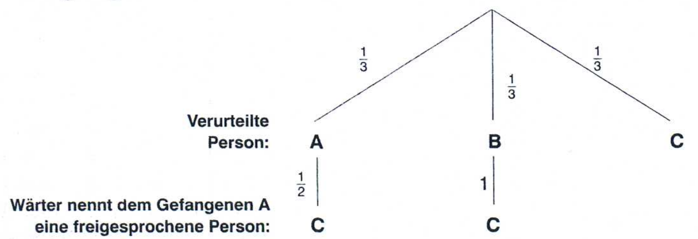

Abb. 9

Wenn also die Gefangenen keinen Kontakt haben, so kann der Wärter der Person A wirklich beruhigt den Namen eines Freigesprochenen nennen unter der hier genannten Bedingung des Zufallsexperiments, wenn A der Verurteilte ist, für A selbst ändert sich dadurch nichts. Wenn aber A Kontakt zu B hätte, und A dies alles B erzählen könnte, so wäre dies natürlich insgesamt keine „neutrale Information" mehr: Für B wären die „Chancen", der Verurteilte zu sein, von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$ gestiegen!

Wenn allerdings auch B auf dieselbe Idee kommt, den Wärter zu fragen, und dieser nennt (wieder) C, dann ist für B mit Wahrscheinlichkeit 2/3 A der Verurteilte! Nehmen dann A und B Kontakt miteinander auf, dann muss aus Symmetriegründen die Situation für die beiden mit 50 : 50 bewertet werden. Sagt allerdings der Wärter „A" auf die Frage von B und tauschen sich dann A und B aus, dann ist alles klar: B ist der Verurteilte!

Der dritte Fall, dass der Wärter auf jeden Fall B nennen würde, wenn A der Verurteilte ist, führt dazu, dass A sicher freigesprochen worden ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass B der Verurteilte ist, steigt also auf Eins.

Resümee

Es ist schon erstaunlich, dass es eine so gewichtige Rolle spielt, wie die Information „Eines der beiden Kinder ist ein Mädchen" zustande kommt. „Sehen" bzw. „Treffen" muss in dieser Hinsicht als (Ergebnis eines) Zufallsexperiment(s) interpretiert werden. Die zweifellos richtige Konsequenz daraus zu ziehen, dass die Konstellation Junge-Junge damit unmöglich ist, ist in diesem Sinne zu wenig. Die meisten Formulierungen für dieses Problem führen eigentlich genau genommen auf diese Sichtweise, die zum Wert $\frac{1}{2}$ führt. Das simple Ausschließen der Kombination Junge-Junge bei gleichzeitiger Gleichverteilung der übrigen Konstellationen Mädchen-Mädchen, Junge-Mädchen und Mädchen-Junge liefert $\frac{1}{3}$, bedarf jedoch der Konstruktion eher künstlicher Szenarien: Die Frage „Sind in dieser Familie beide Kinder Jungen?" muss von einem/r Kenner/in der Familie mit „Nein" beantwortet werden.

Vergessen wir auch nicht den folgenden ganz einfachen Lösungsansatz:
Ein Mädchen wurde gesehen o. Ä. – das andere Kind ist mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auch ein Mädchen, die Geschlechter der Geschwister sind ja unabhängig voneinander.

Last but not least ist das Problem des anderen Kindes als (ein) Prototyp für (das Berechnen von) subjektive(n) Wahrscheinlichkeiten zu sehen: Aus der A-priori-Wahrscheinlichkeit $P(MM) = \frac{1}{4}$ wird nach Beobachten eines Mädchens die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit $P(MM \mid M) = \frac{1}{2}$. Klar ist dabei jedenfalls, dass es sich hier um eine (subjektive) Bewertung einer Situation unter dem Einfluss von Vorwissen (es gibt zwei Kinder) und erhobenen Daten (ein Mädchen davon wurde gesehen) handelt, die Familienzusammensetzung steht an sich zum Zeitpunkt der Beobachtung schon fest und ist nicht dem Zufall unterworfen. Einzig die (subjektive) Unsicherheit der Person, die ein Kind sieht bzw. danach fragt, wird mit stochastischen Methoden beschrieben.

Damit unterscheidet sich dieses Problem (und viele andere auch) grundlegend von klassischen stochastischen Situationen wie z. B. dem Münzwurf, dessen Ergebnis prinzipiell nicht vorhersehbar ist, sondern – wie wir sagen – *zufällig* passiert.

In beiden Fällen (vgl. BERTRAND'sches Paradoxon) können unterschiedliche Modelle zu verschiedenen Ergebnissen führen. Erst eine Präzisierung sowohl der involvierten Wahrscheinlichkeitsbegriffe als auch des verwendeten Modells bzw. der darin steckenden Voraussetzungen klärt die vorerst paradoxe Lösungslandschaft und begründet ein tieferes Verständnis spezifischer stochastischer Situationen: ***Unsicherheit ist nicht gleich Zufall, auch wenn beide Begriffe in analoger Weise (mathematisch) beschrieben werden.***

Anmerkungen

1 Diese a-priori-Einschätzung ist natürlich eine durchaus subjektive! Wird sie von vielen geteilt, so spricht man eben von einem *Paradoxon*.

2 Dabei bezeichnet – wie üblich – der erste Buchstabe das Geschlecht des erstgeborenen und der zweite das Geschlecht des zweitgeborenen Kindes. Man könnte eine Unterscheidung aber auch nach einem beliebigen anderen Merkmal treffen, nicht notwendig nach dem Alter. Aber die Unterscheidung nach dem Alter bietet sich bei Kindern in natürlicher Weise an.

3 In vielen anderen Literaturstellen ist von *Jungen* statt *Mädchen* die Rede; außerdem wird beim gefragten Geschlecht des „anderen" Kindes oft gewechselt. Zwecks Einheitlichkeit werden wir hier auch bei diesen Literaturstellen „Mädchen" statt „Jungen" schreiben und das Geschlecht des anderen Kindes nicht wechseln.

4 Der Vater oder die Mutter des Mädchens könnten auch dabei sein, darauf kommt es nicht an.

5 Dazu betrachten wir einfach die Äste in der zweiten Stufe, denn in der ersten sind alle gleich und führen daher zu keiner Differenzierung.

6 Es wird dort jeweils $\frac{1}{3}$ für P(MM) angegeben. HENZE 2000 ist sich dieser Mehrdeutigkeit aber wohl bewusst. Bei den Lösungshinweisen (S. 283) heißt es: „mangels genauerer Vorstellungen, auf welche Weise der Fall JJ ausgeschlossen wurde".

7 Also z. B. den Vater oder die Mutter; jedenfalls nicht jemanden, dem ein *Zufallsexperiment* das Geschlecht *eines* Kindes vor Augen geführt hat.

8 Oder Unterscheidung bzgl. eines beliebigen anderen Merkmals an Stelle des Alters.

9 Wir beziehen uns auf S. 118, wo eine Mutter spricht. Auf S. 115 ist von einer „Begegnung" die Rede.

10 In HUMENBERGER/REICHEL 1995, S. 160f. wurden bei der Darstellung der dortigen Beispiele 9.6 und 9.7 Fehler gemacht.

11 Wir wählen eine Version mit vier Kästchen, damit die Struktur genau die gleiche wie beim Problem des anderen Kindes ist; bei den bekannteren drei Kästchen mit den Laden (G,G), (G, S), (S, S) sind die Baumstruktur und das numerische Ergebnis etwas anders als beim Kinderproblem, das Prinzip ist aber natürlich das gleiche!

12 In der Literatur gibt es auch die Version mit drei Personen, die verdächtigt werden, an einer Krankheit zu leiden, wobei sich der Verdacht aber nur bei einer Person bestätigt. Dieses Problem ist nun nicht mehr ganz analog zum Ausgangsproblem des anderen Kindes.

13 Für B statt C ist der folgende Gedankengang analog.

Literatur

BARTH, F. u. R. HALLER (1998): Stochastik Leistungskurs. Oldenbourg, München.

BENTZ, H.-J. (1985): Über den didaktischen Wert stochastischer Paradoxa. In: Didaktik-Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 13, 3–18.

BÜCHTER, A. u. H.-W. HENN (2005): Elementare Stochastik. Springer, Heidelberg.

GÖTZ, S. (2006): Ziegen, Autos und Bayes – eine never ending story. In: Stochastik in der Schule 26, 1, 10–15.

HENZE, N. (2000): Stochastik für Einsteiger. 3. Auflage. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

HUMENBERGER, H. (2000): Überraschendes bei Münzwurfserien. In: Stochastik in der Schule 20, 1, 4–17.

HUMENBERGER, H. u. H.-C. REICHEL (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim u. a.

KÜTTING, H. (1999): Elementare Stochastik. Spektrum, Heidelberg/Berlin.

MEYER, J. (1995): Einfache Paradoxien der beschreibenden Statistik. In: Stochastik in der Schule 15, 2, 27–50.

SCHRAGE, G. (1984): Stochastische Trugschlüsse. In: mathematica didactica 7, 3, 3–19.

STADLER, H. (1986): Paradoxien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Teil 1: Didaktik der Mathematik 14, 2, 134–154; Teil 2: 14, 3, 167–182.

STEWART, I. (2003): Der Trugschluß des Ermittlers. In: Spektrum der Wissenschaft: Dossier 02/2003 – Mathematische Unterhaltungen II, 6–8.

SZEKELY, G. J. (1990): Paradoxa – klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik. Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main.

WINTER, H. (1992): Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. In: Journal für Mathematikdidaktik 13, 1, 23–53.