HANS HUMENBERGER

Pol und Polare am Kreis – die Kreisspiegelung

1 Einleitung

Im Schulunterricht spielt die Kreisspiegelung kaum eine Rolle. Der Grund dafür ist vielleicht, dass dieses Thema als ein nur theoretisches angesehen wird, ohne praktischen Bezug und ohne praktische Umsetzmöglichkeit. Und wofür sollte man im Unterricht die Eigenschaften einer rein innermathematischen (geometrischen) Abbildung studieren, die man ohnehin nicht realisieren kann, warum sollte man sich überhaupt dafür interessieren? Die praktischen Anwendungen der Kreisspiegelung sind wirklich nicht sehr zahlreich (zu erwähnen wäre hier aber der PEAUCELLIER'sche Inversor, siehe unten), dennoch sind Kreisspiegelungen ein interessantes Thema für den Schulunterricht. So sind ihre Eigenschaften (u. a. die Abbildungen von Kreisen auf Geraden und umgekehrt) viel interessantere Anlässe für reichhaltige geometrische Überlegungen als die meisten Standardinhalte des Unterrichts in analytischer Geometrie. Weiterhin zeigen sich zahlreiche Bezüge zwischen der (synthetischen) Mittelstufen- und der (analytischen) Oberstufengeometrie, deren Methoden bei der Behandlung der Kreisspiegelung „Hand in Hand greifen". Zudem ist mit den neuen Medien eine Möglichkeit der „automatisierten Realisierung" dieser Abbildung geschaffen worden, z.B. gibt es in GeoGebra bei den Abbildungen die Möglichkeit „Spiegle an Kreis" (so wie „Spiegle an Gerade"). Das macht dieses Thema lebendiger und bringt neue Möglichkeiten für einen Unterricht zu diesem Thema mit sich (z.B. in Leistungskursen).[1]

2 Pol und Polare am Kreis

2.1 Von Tangenten zu Polaren

Es seien k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r sowie P ein Punkt dieses Kreises. Dann ist

$$(X-M)\cdot(P-M)=r^2 \qquad (1)$$

eine Gleichung der Tangente an k im Berührpunkt P, sie heißt bekanntlich auch „Spaltenform der Tangentengleichung", ein verbreiteter Unterrichtsinhalt in der Sekundarstufe 2.

Da ergibt sich eigentlich in sehr natürlicher Weise die Frage, welche Punktmenge durch die Gleichung (1) beschrieben wird, wenn P ein beliebiger Punkt der Ebene (also nicht notwendig ein Kreispunkt) ist. Klar ist a priori, dass es sich wohl um eine Gerade handeln wird, wir nennen sie p, aber was ist das für eine Gerade? Für den Fall $P=M$ besitzt (1) offenbar keine Lösung, wir setzen daher für die weiteren Betrachtungen $P\neq M$ voraus.

[1] Zu vergleichen ist das vielleicht mit Themen der Numerischen Mathematik (näherungsweises Lösen von Gleichungen, numerische Integration etc.), auch hier bringen neue Medien erst Lebendigkeit in das Thema, weil man dann erst experimentieren kann.

Nehmen wir an, wir haben zwei Punkte P_1, P_2 gefunden, die (1) für einen beliebigen aber festen Punkt $P\neq M$ erfüllen, für die also gilt:

$$\begin{aligned} r^2 &= (P_1-M)\cdot(P-M) \\ &= (P_2-M)\cdot(P-M) \end{aligned} \qquad (2)$$

Man sieht, dass die Vektoren $\overrightarrow{MP_1}=P_1-M$ und $\overrightarrow{MP_2}=P_2-M$ mit dem Vektor $\overrightarrow{MP}=P-M$ gleiches Skalarprodukt haben, d.h. sie haben gleiche senkrechte Projektionen auf $\overrightarrow{MP}$ (in **Abb. 1** fett markiert). Die Gerade p durch P_1 und P_2 steht also senkrecht auf der Geraden g durch M und P.

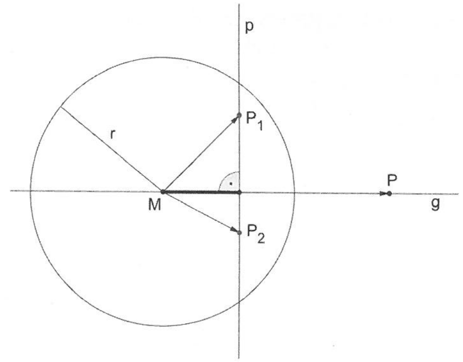


Abb. 1: Gerade p durch P_1 und P_2 senkrecht auf g

Offenbar gilt für jeden Punkt X (statt P_1, P_2) der Geraden p die Gleichung (2). Der Abstand der Geraden p vom Mittelpunkt M des Kreises ist gleich der Länge der in **Abb. 1** fett markierten Strecke. Damit erhalten wir ein erstes wichtiges Ergebnis:

- Für jeden Punkt $P\neq M$ beschreibt die Gleichung $(X-M)\cdot(P-M)=r^2$ die zu MP senkrechte Gerade p, für deren Abstand zum Mittelpunkt M des Kreises gilt:

$$d(M,p)=\frac{r^2}{d(M,P)} \qquad (3)$$

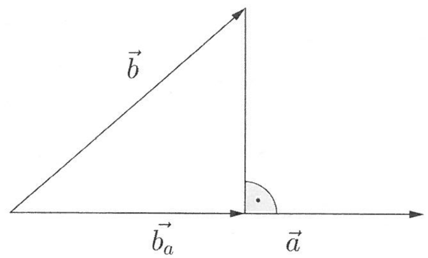


Abb. 2: Skalarprodukt – Projektion

Dies kann man einsehen wegen der bekannten Formel für das Skalarprodukt: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_a|$ (vgl. **Abb. 2**).

In unserem Fall ist $\vec{a}\cdot\vec{b}=r^2>0$, daher kann man den Betrag weglassen:

$$\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{r^2}=\underbrace{|\vec{a}|}_{d(M,P)}\cdot\underbrace{|\vec{b}_a|}_{d(M,p)} \quad \text{mit } \vec{a}=\overrightarrow{MP} \text{ und } \vec{b}=\overrightarrow{MX}.$$

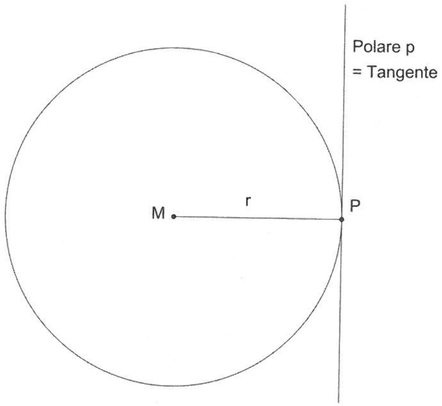


Abb. 3: Polare als Tangente

Man kann daraus ablesen, dass für jeden Kreis $k[M,r]$ die Zuordnung $P\mapsto p$ bijektiv ist, und zwar von den Punkten der Ebene (ausgenommen M) auf die Menge der Geraden der Ebene, die nicht durch M verlaufen. Diese Abbildung heißt auch Polarität am Kreis k, der Punkt P und die Gerade p werden **Pol** bzw. **Polare** genannt.

2.2 Eigenschaften von Pol und Polare

Um weitere Eigenschaften von Pol und Polare zu untersuchen, führen wir eine Fallunterscheidung durch:

- Fall 1: $d(M,P)=r$

  Dieser Fall beschreibt unsere Ausgangssituation: P liegt auf dem Kreis k (**Abb. 3**), die Gerade p (Polare) ist daher die (zu MP senkrechte) Tangente an k im Berührpunkt P.
- Fall 2: $d(M,P)>r$

  Aus Gleichung (3) folgt $d(M,p)<r$, d.h. die Gerade p schneidet den Kreis in zwei verschiedenen Punkten B_1, B_2. Schreibt man Gleichung (1) für den Punkt B_1 auf, so ergibt sich:

$$(B_1-M)\cdot(P-M)=r^2 \qquad (4)$$

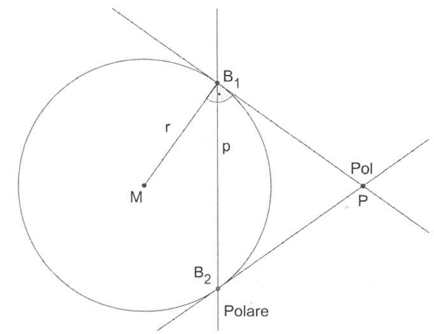


Abb. 4: Pol P außerhalb des Kreises

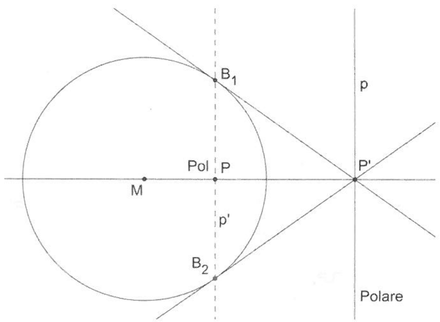


Abb. 5: Pol innerhalb des Kreises

Folglich liegt der Punkt P auf der Tangente an den Kreis k im Punkt B_1 mit $(B_1-M)\cdot(X-M)=r^2$. Analoges gilt für B_2. Die Gerade p (Polare) ist also Verbindungsgerade der Berührpunkte der beiden Tangenten durch den Punkt P an den Kreis k (**Abb. 4**). So konstruiert man die Polare zu einem Punkt P außerhalb des Kreises.

- Fall 3: $0<d(M,P)<r$

  Der Punkt P liegt im Inneren des Kreises k, und nach Gleichung (3) geht die Gerade p im Abstand $d(M,p)=\frac{r^2}{d(M,P)}>r$ am Kreis k vorbei (senkrecht zu MP).

  Bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden durch M und P und p mit P' und die Parallele zu p durch P mit p', so befinden sich P' und p' offenbar in der gleichen Konstellation wie P und p in Fall 2 (das Produkt der beiden Abstände zu M ist r^2).

  Der Pol P liegt also auf der Verbindungsgeraden der Berührpunkte $B_{1,2}$ der Tangenten durch P' an den Kreis k, und die Polare p verläuft parallel zu dieser Geraden durch P' (**Abb. 5**).

Daraus ist die Konstruktion der Polaren, wenn P innerhalb des Kreises liegt, ablesbar: Zeichne den Radius durch P und die darauf senkrechte Sehne → Schnittpunkte $B_{1,2}$ mit dem Kreis. Die Tangenten durch $B_{1,2}$ schneiden einander in P'. Die Polare ist nun jene Gerade durch P', die (i) normal zu MP bzw. MP' bzw. gleichwertig dazu (ii) parallel zu B_1B_2 ist.

Aus der Polarengleichung $p: (X-M)\cdot(P-M)=r^2$ ergibt sich unmittelbar eine sehr interessante Eigenschaft der Polarität am Kreis:

Satz 1: Q liegt auf der Polaren von $P \Leftrightarrow P$ liegt auf der Polaren von Q.

Beweis: Die Polare von P hat die Gleichung $p:(X-M)\cdot(P-M)=r^2$.

Die Polare von Q hat die Gleichung $q:(X-M)\cdot(Q-M)=r^2$.

$$Q\in p \Leftrightarrow (Q-M)\cdot(P-M)=r^2 \Leftrightarrow (P-M)\cdot(Q-M)=r^2 \Leftrightarrow P\in q$$

Mit GeoGebra kann und soll dies dynamisch veranschaulicht bzw. erlebbar gemacht werden:

1) Pol P außen, Polare schneidet den Kreis (**Abb. 6**).
2) Pol P innen, Polare geht am Kreis vorbei: **Abb. 6** mit vertauschten Rollen von P und Q
3) Pol P am Kreis: **Abb. 7**

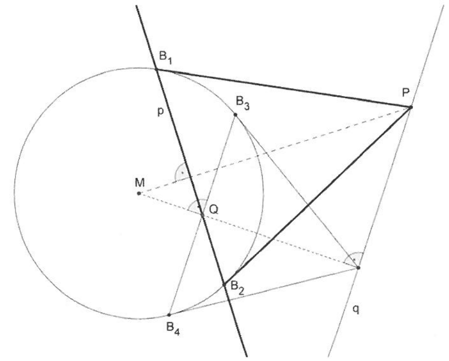


Abb. 6: Pol P außen/innen

Die Polare verallgemeinert also die Spaltenform der Tangentengleichung und ist die Antwort auf die Frage: Was passiert, wenn man in die Spaltenform der Tangentengleichung nicht einen Kreispunkt, sondern einen anderen Punkt einsetzt? Und solche Fragen können den Unterricht (primär in Leistungskursen) durchaus bereichern. Dies umso mehr als die zugehörigen Begründungen eigentlich nur Schulstoff enthalten (Geradengleichungen, Kreisgleichungen, Skalarprodukt und seine Eigenschaften) und das Thema Grundlage einer interessanten geometrischen Abbildung ist, die z.B. mit GeoGebra leicht realisiert werden kann (siehe unten).

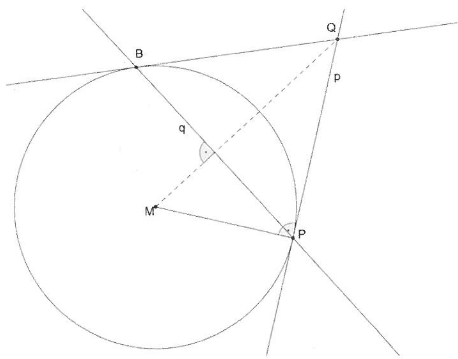


Abb. 7: Pol P am Kreis

3 Die Inversion bzw. Spiegelung am Kreis

Das Thema „Pol – Polare" hängt eng mit einer speziellen Abbildung zusammen, die man *Kreisspiegelung* oder *Inversion am Kreis* nennt. Der Name rührt daher, dass dabei die Punkte auf der Kreislinie Fixpunkte sind, Punkte innerhalb der Kreislinie auf Punkte außerhalb und umgekehrt abgebildet werden.

Dabei ist der Kreismittelpunkt M als Urbild ausgeschlossen (diesem entspricht dabei ein unendlich weit entfernt liegender Punkt – „Fernpunkt"). Geraden werden hierbei oft als „Kreise mit Radius unendlich" aufgefasst, dann kann man nämlich sagen, dass *Kreise auf Kreise* abgebildet werden (Details siehe unten).

3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften der Kreisspiegelung

Definition der Kreisspiegelung: Gegeben sei ein Kreis $k[M;r]$. Jeder Punkt $P \neq M$ wird dabei folgendermaßen auf seinen Bildpunkt P' abgebildet:

1. P' liegt auf der Halbgeraden (Strahl) MP
2. $|MP| \cdot |MP'| = r^2$

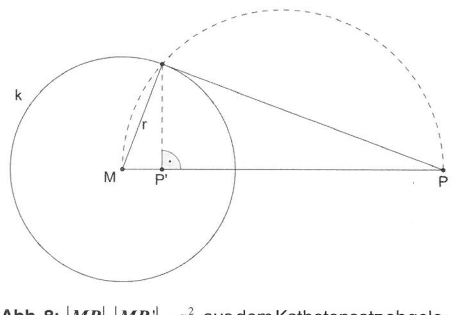


Abb. 8: $|MP| \cdot |MP'| = r^2$ aus dem Kathetensatz abgelesen

Das Bild von P' ist dann wieder P, d. h. die Kreisspiegelung ist zu sich selbst invers (wie ja auch eine normale Achsenspiegelung). Man sieht: Das ist genau dieselbe Beziehung, die wir bei der *Polaren* hatten! Auch der *Kathetensatz* kann angewendet werden, um die *Konstruktion des Bildpunktes* mit Hilfe des *Thaleskreises* zu verdeutlichen (**Abb. 8**).

Ein entsprechender Befehl ist z. B. in GeoGebra vorhanden („Spiegle am Kreis"). Dadurch ist es auch in der Schule viel besser möglich (z. B. in einem Leistungskurs), auf diese Abbildung einzugehen, da man damit leicht selbst experimentieren kann.

Satz 2: Bei der Inversion am Kreis k mit dem Mittelpunkt M gilt:

1) Jede Gerade durch M (ohne den Punkt M) wird auf sich abgebildet.
2) Jede Gerade, die nicht durch M geht, wird auf einen Kreis durch M (ohne den Punkt M) abgebildet und umgekehrt (**Abb. 9**).
3) Jeder Kreis, der nicht durch M geht, wird auf einen ebensolchen Kreis abgebildet (**Abb. 10**).
4) Ein Kreis $\neq k$ ist genau dann Fixkreis der Inversion, wenn er den Inversionskreis k rechtwinklig schneidet.

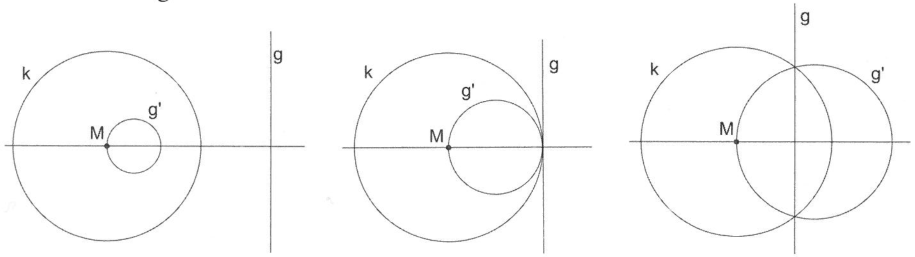


Abb. 9: Gerade nicht durch M $\leftrightarrow$ Kreis durch M

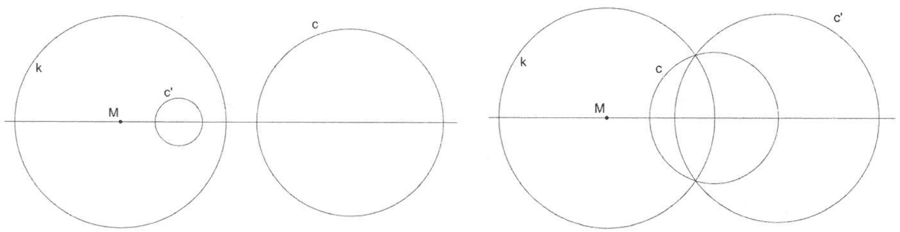


Abb. 10: Kreis nicht durch M $\leftrightarrow$ Kreis nicht durch M

Beweis von Satz 2 [vgl. SCHEID 2001, 146ff.]: Wir führen den Beweis durch Rechnen in einem kartesischen Koordinatensystem, d. h. es kommen *Gleichungen* von *Kreisen* und *Geraden* ins Spiel, man ist damit also mitten in der Analytischen Geometrie.

Bemerkung: Es wäre auch möglich dabei rein elementargeometrisch zu arbeiten. Da es aber in diesem Heft um „Analytische Geometrie" geht, wird das hier nicht weiter ausgeführt.

Wir nehmen o. B. d. A. an, dass der Inversionskreis der Einheitskreis: $k: x^2 + y^2 = 1$ ist, mit $r = 1$ und $M = (0|0)$, siehe **Abb. 11**.

Abbildungsgleichungen:

$P = (x|y)$, $P' = (x'|y')$

Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt: $\frac{x'}{x} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y'}{y}$ (*)

Aufgrund der Abbildungsvorschrift gilt $\sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 1 (= r^2)$ und daher $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; dies in (*) eingesetzt ergibt: $\boxed{x' = \frac{x}{x^2 + y^2},\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2}}$

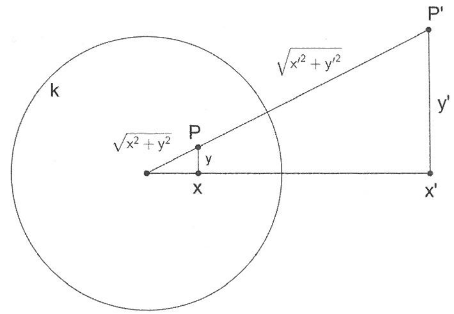


Abb. 11: Spiegelung am Einheitskreis

Wichtig: Die zugehörige Umkehrabbildung hat dieselben Abbildungsgleichungen, da sie ebenfalls die Inversion an k ist. Das heißt, zu fragen: „Auf welche Kurve wird die Gerade $x = a$ abgebildet?" ist gleichwertig mit der Frage: „Für welche $(x|y)$ ist $x' = a$?"

Zum Beweis von 1) und 2) nehmen wir o. B. d. A. die Gerade $g: x = a$ (Parallele zur y-Achse). Sie wird abgebildet auf die Kurve $\frac{x}{x^2+y^2} = a$ bzw. $a \cdot (x^2 + y^2) = x$. Mit $a = 0$ ergibt sich die Behauptung 1). Mit $a \neq 0$ lässt sich diese Gleichung umformen zu $\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2$; dies ist die Gleichung eines Kreises durch $M = (0|0)$: Radius $R = \frac{1}{2a}$, Mittelpunkt um diesen Radius nach „rechts" verschoben (in **Abb. 12** z. B. für $a = \frac{1}{4}$ und $R = 2$ dargestellt). Dieser Kreis wird umgekehrt auf die Gerade $g: x = a$ abgebildet, womit 2) bewiesen ist.

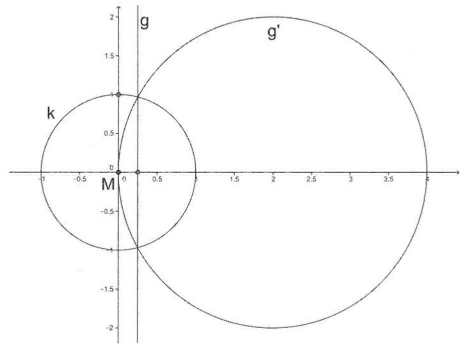


Abb. 12: Zum Beweis von Satz 2, Teile 1) und 2)

Zum Beweis von 3) bilden wir den Kreis mit der Gleichung $(x - b)^2 + y^2 = r^2$ ab. Bedenkt man wieder, dass die Abbildung gleich ihrer Umkehrabbildung ist, kann man wieder fragen:

„Für welche $(x \mid y)$ ist $(x'-b)^2+y'^2=r^2$?“
Einsetzen der Abbildungsgleichungen ergibt:

$$\left(x-b\cdot(x^2+y^2)\right)^2+y^2=r^2(x^2+y^2)^2$$

bzw. umgeformt

$$(x^2+y^2)^2\cdot(r^2-b^2)+2bx\cdot(x^2+y^2)=x^2+y^2.$$

Wegen $(x \mid y)\neq(0 \mid 0)$ (der Kreis darf nicht durch M gehen!) kann man durch $x^2+y^2\neq 0$ kürzen:

$$(x^2+y^2)\cdot(r^2-b^2)+2bx=1.$$

Für $|b|=r$ ergibt sich die Gerade mit der Gleichung $2bx=1$, also erneut ein Beweis von 2): Ein Kreis durch M wird auf eine Gerade, die nicht durch M verläuft, abgebildet und umgekehrt.

Für $|b|\neq r$ (Kreis geht nicht durch M) lässt sich diese Gleichung umformen:

$$x^2+y^2+\frac{2bx}{r^2-b^2}=\frac{1}{r^2-b^2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{r^2-b^2}\right)^2+y^2=\underbrace{\frac{1}{r^2-b^2}+\left(\frac{b}{r^2-b^2}\right)^2}_{\frac{r^2-b^2+b^2}{\left(r^2-b^2\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{r^2-b^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{r^2-b^2}\right)^2;$$

dies ist die Gleichung eines Kreises, der nicht durch M geht, womit 3) bewiesen ist.

Beweis von 4): Beim Beweis von 3) haben wir gezeigt, dass der Kreis mit $(x-b)^2+y^2=r^2$ auf den Kreis mit $\left(x+\frac{b}{r^2-b^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{r^2-b^2}\right)^2$ abgebildet wird. Das ist genau dann derselbe Kreis, wenn: $-b=\frac{b}{r^2-b^2}$ und $r^2-b^2=\pm 1$. Aus der ersten Gleichung entnimmt man $r^2-b^2=-1$ bzw. $b^2=r^2+1$, dies ist aber gleichbedeutend mit *rechtwinkligem Schnitt* (PYTHAGORAS, **Abb. 13**).

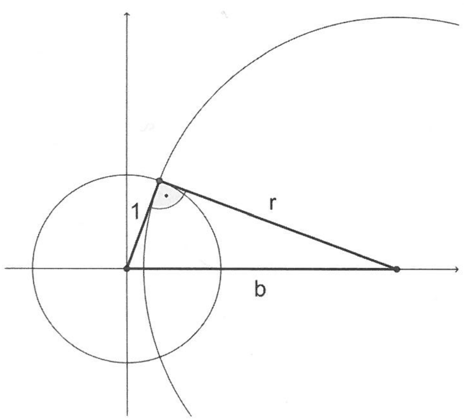


Abb. 13: Rechtwinklig schneidende Kreise als Fixkreise

3.2 Mechanische Realisierung der Kreisspiegelung

Wenn man die Kreisspiegelung mechanisch realisiert, so hat man dadurch einen „Geradführmechanismus“ (eine Kreisbewegung wird in eine geradlinige Bewegung umgewandelt); so ein einfacher Gelenksmechanismus ist z. B. der PEAUCELLIERsche Inversor

(1864 durch den französischen General PEAUCELLIER erfunden), bestehend aus sieben Metallstäben. Diesen kann man auch explizit nachbauen und so experimentell bestätigen, dass sich der Bildpunkt auf einer Geraden bewegt (**Abb. 14**). Auch auf youtube findet man einen entsprechenden Film (https://www.youtube.com/watch?v=hSdW-i3nO1M).

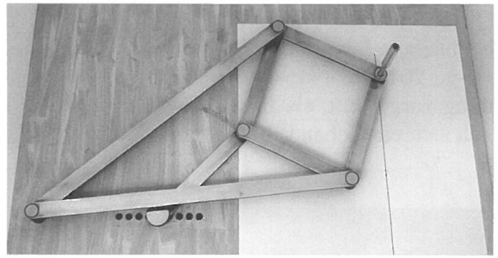


Abb. 14: Peaucellier'scher Inversor (© BRYANT/SANGWIN [2008], Princeton University Press, mit freundlicher Genehmigung)

Das Besondere an diesem Geradführmechanismus ist u. a., dass man hier keine „Schienen“ bzw. Führungszylinder braucht (wie bei der Schubkurbel), die einen Kolben o. ä. auf eine Gerade zwingen. Anwendung fand dieser Inversor bei Kolbendampfmaschinen. Unter http://en.wikipedia.org/wiki/Peaucellier%E2%80%93Lipkin_linkage findet man dynamische Animationen des angesprochenen Inversors.

Wie kann man einsehen, dass wirklich Geradführung vorliegt? Dazu eine schematische Darstellung (**Abb. 15**, vgl. auch WITTMANN [1987, 171 ff.]):

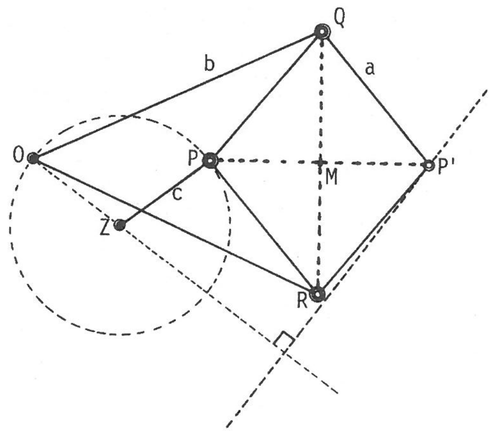


Abb. 15: Schematische Darstellung aus WITTMANN [1987, S. 171] (mit freundlicher Genehmigung)

Man hat eine Gelenkraute $PRP'Q$ (Seitenlänge a), an den Gegenecken R, Q sind zwei Stangen der Länge b $(b>a)$ gelenkig befestigt. Diese beiden Stangen sind auch im ortsfesten Punkt O gelenkig verbunden. Die 7. Stange ZP ist im ortsfesten Punkt Z und in P gelenkig montiert, und es gilt $|OZ|=|ZP|=c$.

Die Punkte O, P, P' liegen auf der Mittelsenkrechten zu QR. In den rechtwinkligen Dreiecken OMQ und PMQ gilt laut PYTHAGORAS:

$$\left(|OP|+|PM|\right)^2+|MQ|^2=b^2$$

$$|PM|^2+|MQ|^2=a^2$$

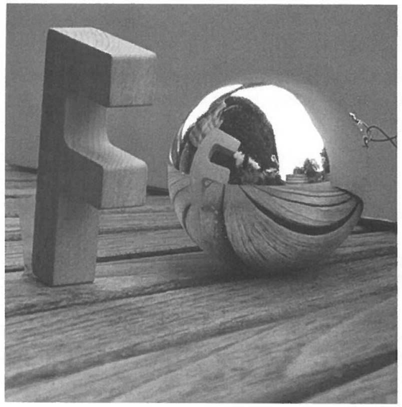
Ausquadrieren der 1. Gleichung und Subtrahieren beider Gleichungen ergibt

$$|OP|^2+2|OP|\cdot|PM|=b^2-a^2 \Leftrightarrow |OP|\cdot\left(|OP|+2|PM|\right)=b^2-a^2 \Leftrightarrow |OP|\cdot|OP'|=b^2-a^2$$

Das Produkt der Abstände der Punkte P und P' vom festen Punkt O hat also einen festen (konstanten) Wert, und das ist die definierende Eigenschaft bei der **Kreisspiegelung** (der zugehörige Inversionskreis ist hierbei nicht wichtig, er hat Mittelpunkt O und Radius $\sqrt{b^2-a^2}$). Daher muss sich P' auf einer Geraden bewegen, wenn sich P auf einer Kreisbahn bewegt. (Der zugehörige Kreis geht ja durch O, den Mittelpunkt des Inversionskreises, und mit Satz 2, Teil 2 ist die *Gerade* als Bahn von P' garantiert.)

Das räumliche Pendant zur Kreisspiegelung, das man auch an spiegelnden Kugeln häufig beobachten kann, ist die sogenannte Kugelspiegelung. In einem Schulbuch [SCHMIDT u.a. Hrsg., 2011, S. 191] wird die Kreisspiegelung als Beispiel einer nicht geradentreuen Abbildung vorgestellt, als Bild dazu sieht man eine Kugelspiegelung (**Abb. 16a**). In **Abb. 16b** spiegelt sich ein Gebäude in mehreren Kugeln.

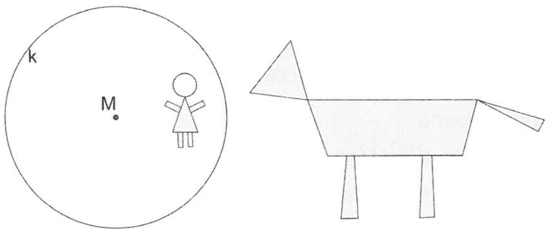
a



b

Abb. 16: Kugelspiegelungen (**a:** SCHMIDT u.a. Hrsg., [2011, S. 191]; mit freundlicher Genehmigung; **b:** © THOMAS WEICHSELGARTNER, thomasweichsel@kabelmail.de, mit freundlicher Genehmigung)

a



b

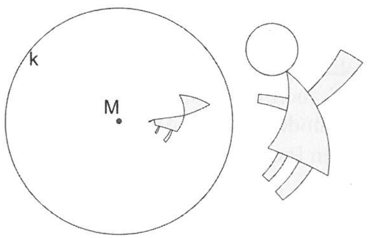


Abb. 17: a: Vor der Kreisspiegelung, **b:** Nach der Kreisspiegelung

Bekannt ist auch die oft zitierte Möglichkeit von Mathematikern, einen Löwen in der Wüste zu fangen (mittels Umdefinieren, was „draußen“ und was „drinnen“ ist). Aber es ginge auch mit einer Kreisspiegelung: Der Mathematiker wendet eine Kreisspiegelung (an einem Kreis, der zwar ihn, aber nicht den Löwen enthält) an, dann ist nach der Kreisspiegelung der Löwe im Kreisinneren (gefangen), er aber außerhalb des Kreises, denn die Kreisspiegelung leistet ja gerade das Gewünschte: Das Gebiet außerhalb des Kreises hat seinen Bildbereich innerhalb und umgekehrt, perfekt für diese Zwecke (**Abb. 17**)!

Mit GeoGebra sind solche Vorgänge leicht zu realisieren, was gut sein mag für die Motivation in einem möglichen Unterricht, aber in der Wirklichkeit hilft dies dem Mathematiker in der Wüste natürlich wenig!

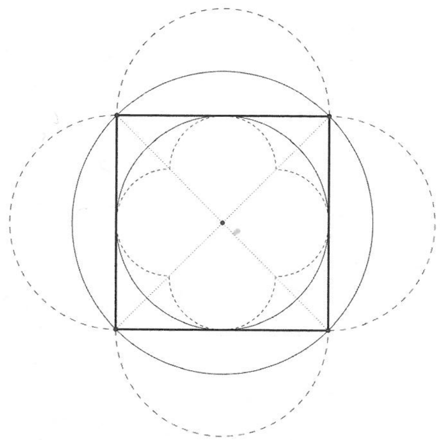


Abb. 18: Quadrat gespiegelt an In- und Umkreis

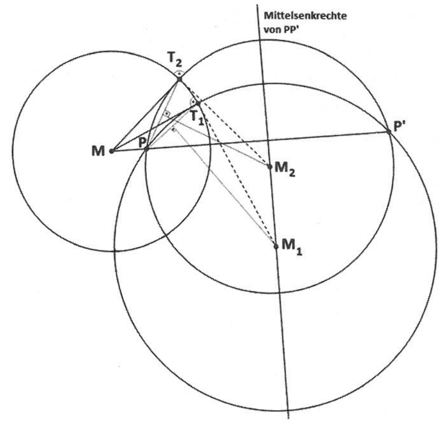


Abb. 19: Rechtwinkliger Schnitt der Kreise

3.3 Weitere interessante Eigenschaften der Kreisspiegelung

Satz 3:

a) Die Hintereinanderausführung zweier Kreisspiegelungen an konzentrischen Kreisen (gemeinsamer Mittelpunkt M) ist eine zentrische Streckung mit Zentrum M.

b) Jeder Kreis durch P und P' schneidet den Inversionskreis k rechtwinklig („orthogonale Kreise“) und ist somit ein Fixkreis der Inversion).

c) Die Kreisspiegelung ist winkeltreu.

Beweis:

a) $P \mapsto P' \mapsto P''$; wenn $r_{1,2}$ die Radien der konzentrischen Kreise sind, liegt P'' auf der Geraden MP mit $|MP| \cdot |MP'| = r_1^2$ und $|MP'| \cdot |MP''| = r_2^2$; daraus folgt unmittelbar

$$\frac{|MP''|}{|MP|} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 =: k$$

und das ist die Abbildungsvorschrift einer zentrischen Streckung mit Zentrum M und Streckfaktor k.

Man sieht dies auch sehr schön, wenn man z. B. ein Quadrat sowohl am In- als auch am Umkreis spiegelt, es entstehen dabei jeweils vier Halbkreise (GeoGebra, **Abb. 18**).

b) Zum Beweis braucht man den sogenannten Sekanten-Tangenten-Satz aus der Elementargeometrie: Von einem Punkt außerhalb des Kreises ist das Produkt der beiden Sekantenabschnitte genau so groß wie das Quadrat des zugehörigen Tangentenabschnitts.

Mit $|MP| \cdot |MP'| = r^2$ und $|MT| = r$ folgt sofort, dass MT Tangentenstrecke von M an den Kreis durch P, P' ist, somit ist der dortige Schnitt mit dem Inversionskreis rechtwinklig (in **Abb. 19** ist diese Situation für zwei verschiedene Kreise durch P, P' dargestellt).

Dies eröffnet auch eine weitere Möglichkeit, den Bildpunkt P' von P bei der Kreisspiegelung an k zu konstruieren: Man schneidet einen beliebigen zu k orthogonalen Kreis durch P mit der Geraden MP: Wähle T beliebig auf k (nur nicht auf der Geraden MP), schneide die Tangente in T mit der Mittelsenkrechten von PT $\to$ Mittelpunkt des Orthogonalkreises durch P.

c) Für die Winkeltreue ist zu zeigen, dass in jedem Punkt $P \neq M$ die ursprünglichen Geraden (Kreise) einander im gleichen Winkel schneiden wie die abgebildeten in P'.

Fall 1: $P \notin k$: Dann gibt es $P' \neq P$ und man kann durch P und P' beliebige Kreise zeichnen; diese schneiden nach b) den Inversionskreis rechtwinklig, sind also Fixkreise. In P seien zwei beliebige *Richtungen* (zunächst ungleich der Richtung MP; siehe **Abb. 19**) gegeben, diese können durch zwei verschiedene Kreise durch P und P' realisiert werden (Mittelpunkt irgendwo auf der Mittelsenkrechten von PP'); da es sich um Fixkreise handelt, gehen diese Kreise auf sich über, und dem Schnitt der beiden Kreise in P entspricht nach der Abbildung der Schnitt *derselben beiden Kreise* in P'! Dort bilden sie aber aus Symmetriegründen einen gleich großen Winkel (zwei einander in zwei verschiedenen Punkten schneidende Kreise schneiden einander in beiden Punkten in gleichen Winkeln). Wenn eine der beiden vorgegebenen Richtungen der Richtung MP entspricht (oben ja zunächst ausgeschlossen), so braucht man nur *einen* Kreis: Die Gerade MP ist Fixgerade und schneidet den Kreis in P und P' im selben Winkel!

Fall 2: $P \in k$: Betrachte die Kreisspiegelung als Hintereinanderausführung einer zentrischen Streckung und einer Kreisspiegelung an einem konzentrischen Kreis mit anderem Radius, d. h. für diese Kreisspiegelung ist dann $P \notin k$. Beide Teilabbildungen (zentrische Streckung und Kreisspiegelung mit $P \notin k$) sind dann winkeltreu, also auch die Gesamtabbildung.

Literatur

[1] Bryant, J., Sangwin, C. J. [2008]: How round is your circle? Where engineering and mathematics meet. Princeton: Princeton University Press.

[2] Scheid, H. [2001]: Elemente der Geometrie. Heidelberg Berlin: Spektrum.

[3] Schmidt, G., Zacharias, M., Lergenmüller, A. [Hrsg., 2011]: Mathematik Neue Wege. Lineare Algebra, Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel.

[4] Wittmann, E. Ch. [1987]: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.