HANS HUMENBERGER

Ein Grenzwert zum Anfassen

Mit Glasröhrchen und Tabellen zu Gleichgewichten

LERNGRUPPE:	10./11. Schuljahr
IDEE:	Grenzwerte im Experiment erfahren
VORWISSEN:	Umgang mit einer Tabellenkalkulation, rekursive Darstellung von Folgen: $a_{n+1} = f(a_n)$
ZEITBEDARF:	2–4 Stunden, je nach Behandlung von Begründungen (Beweisen)

Folgende Unterrichtseinheit beginnt mit einem (möglichst realen) Experiment, dann folgt die Simulation mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (TK). In beiden Fällen geht es dabei um einen stationären Zustand, mathematisch gesehen um einen Grenzwert. Zum Schluss wird auf verschiedene Möglichkeiten eingegangen, Konvergenzbegründungen durchzuführen.

Das Experiment

Aus dem Chemieunterricht kennen die Schülerinnen und Schüler dünne Glasröhrchen (auch Pipetten genannt). Mit diesen stellen sie sich die Situation in **Kasten 1** vor.

Bei solchen Situationen werden die Lernenden nicht sofort eine Vermutung haben und sie werden auch nicht sofort auf die mathematisch korrekte Lösung mit Hilfe von Grenzwerten kommen. Das ist hier auch gar nicht vorgesehen.

Die Schülerinnen und Schüler sollten das Experiment unbedingt durchführen können und beobachten, was passiert. Dies ist mit entsprechenden Glasröhrchen aus dem Chemielabor und Gläsern auch nicht schwierig. Das Experiment und die zugehörigen Messungen werden niemanden überfordern, sondern im Gegenteil motivieren, sich auch mathematisch mit dem Thema auseinanderzusetzen.

Die Schülerinnen und Schüler stellen fest: Die Höhen scheinen sich bei bestimmten Werten einzupendeln. Sie können so *Grenzwerte real erfahren*, was bekanntlich gar nicht so leicht möglich ist.

Es ist aber nicht ohne Weiteres klar, wovon diese „Endhöhen" abhängen, auch wenn man die Werte von G, A_0, B_0, Q_1, Q_2 gemessen hat. Die Glasröhrchen dürfen nicht allzu dünn bzw. die Gefäße nicht allzu dick sein, denn sonst dauert dieser Austausch sehr lange, bis sich die Höhen einpendeln. Bei einer Gefäßgrundfläche von ca. $10\,\text{cm}^2$, Anfangshöhen von 12 cm bzw. 4 cm und Röhrchenquerschnitten von $1\,\text{cm}^2$ bzw. $0{,}5\,\text{cm}^2$ ist nach ca. 20 Schritten ein stationärer Zustand zu beobachten.

Aber immerhin ist es schon an dieser frühen Stelle möglich, dass die Schülerinnen und Schüler auf den entscheidenden Zusammenhang kommen, wenn sie einige Male den entsprechenden Austausch durchführen, bis sich die Wasserhöhen nicht mehr ändern („stationärer Zustand"): Das passiert dann, wenn in beiden Glasröhrchen das gleiche Wasservolumen transportiert wird. Mathematisch ausgedrückt heißt das, wenn man die „Endhöhen" mit A^* und B^* bezeichnet: $A^* \cdot Q_1 = B^* \cdot Q_2$. Dies bedeutet umgeformt:

$$\frac{A^*}{B^*} = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Simulation mit Excel

Wenn man das mit dem stationären Zustand nicht so schnell sieht, kann auf eine andere unkomplizierte Art weitergemacht werden (ohne sich um formale Grenzwerte zu kümmern), nämlich mit Hilfe einer Tabellenkalkulation wie EXCEL. Immer wenn Iterationen im Spiel sind, ist eine Tabellenkalkulation ein gutes Werkzeug.

Gerade zum Explorieren von Situationen wie in **Kasten 1** (noch ohne theoretische Überlegungen) sind Tabellenkalkulationen wunderbare Werkzeuge. Noch dazu braucht man hier wirklich nur elementare Kenntnisse in TK, die heutzutage für Schülerinnen und Schüler fast selbstverständlich sind.

Formeln eingeben

Um die entsprechenden Formeln in eine Tabellenkalkulation eingeben zu können, muss man überlegen, wie sich die Höhen „von Schritt zu Schritt" verändern. Das Wiederholen dieses Schrittes erledigt das Programm durch das berühmte „Herunterziehen" der entsprechenden Formeln.

Zunächst nehmen die Schülerinnen und Schüler konkrete Werte für G, A_0, B_0, Q_1, Q_2 und versuchen, die Zusammenhänge zu analysieren. Es sollte nicht allzu schwerfallen, zu beschreiben, wie sich die Höhe (z. B. im ersten Gefäß) entwickelt. Schülerinnen und Schüler werden dies zunächst für einige konkrete (kleine) Werte von n aufschreiben, bevor sie es allgemein formulieren: $A_{n+1} = A_n + \frac{\Delta V}{G}$.

Für die allgemeine Formulierung ist die Unterstützung durch die Lehrkraft nötig.

Die Volumenänderung ΔV ist gegeben durch die Volumina in den Glasröhrchen; beim ersten Gefäß kommt das Volumen in R_2 dazu und jenes von R_1 weg: $\Delta V = Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n$. Insgesamt ergibt sich daraus:

$$A_{n+1} = A_n + \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}$$

und analog

$$B_{n+1} = B_n + \frac{Q_1 \cdot A_n - Q_2 \cdot B_n}{G}$$

bzw.

$$B_{n+1} = B_n - \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}$$

Diese Formeln werden jetzt nur noch in geeignete Zellen geschrieben. „Herunterziehen“ zeigt, wo sich die Werte (Wasserhöhen) „stabilisieren“.

Für G, A_0, B_0, Q_1, Q_2 können die Schülerinnen und Schüler die Werte aus dem realen Experiment nehmen, oder auch erfundene Werte. Im Computerexperiment kommt es ja nicht mehr so sehr auf die konkrete Wahl an. Auch dickere Gefäße oder dünnere Glasröhrchen können modelliert werden, der Computer macht die vielen Wiederholungen auf Knopfdruck. So erhält man für $G = 1000$, $Q_1 = 8$, $Q_2 = 14$, $A_0 = 50$, $B_0 = 20$ ein Einpendeln der Höhen bei den Werten $44,\overline{54}$ und $25,\overline{45}$ (vgl. **Tab. 1**, S. 36). In der Tabellenkalkulation zeigt sich, dass die ersten beiden Nachkommastellen erst nach 320 Iterationen unverändert bleiben, d. h. diese Glasröhrchen und Gläser wären für ein reales Experiment nicht sehr gut geeignet.

Vermutlich wird man bei diesen Zahlenwerten noch nicht sehr viel entdecken. Klar sollte allerdings a priori sein, dass die Summe der beiden Höhen immer konstant ist (das Gesamtvolumen bleibt immer dasselbe und damit auch die Gesamthöhe).

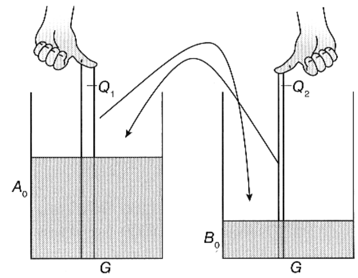
Wenn man hier aber „rundere“ Verhältnisse bei den Querschnittflächen nimmt (etwa 1 : 2), so ergibt sich z. B. **Tab. 2** (die ersten beiden Nachkommastellen ändern sich nach ca. 230 Schritten nicht mehr). Hier springt schon das Verhältnis 2 : 1 bei den resultierenden Höhen ins Auge. Dies kann natürlich noch durch andere Werte auf Knopfdruck bestätigt werden. Bei einem Querschnittsverhältnis von 3 : 1 ergibt sich ein resultierendes Höhenverhältnis von 1 : 3 (**Tab. 3**).

Dies ist der entscheidende Vorteil von TK-Programmen beim Explorieren iterativer Situationen: Man kann viele Situationen in kurzer Zeit ausprobieren und zu folgender Vermutung kommen:

1 ZUM AUSPROBIEREN

Hin und Her – ein Experiment

Es stehen zwei Gefäße mit gleicher Grundfläche G auf dem Tisch, wobei in einem Wasser bis zur Höhe A_0 und im anderen bis zur Höhe B_0 steht.
Des Weiteren stehen zwei verschieden dicke zylindrische Glasröhrchen R_1 und R_2 zur Verfügung mit den Querschnitten Q_1 und Q_2.



Wasserhöhen ausgleichen?!
Nun können Sie in einem Experiment wiederholt für einen Austausch zwischen diesen beiden Gefäßen sorgen:
R_1 wird bis zum Boden in das erste Gefäß mit Wasserhöhe A_0, R_2 ins zweite Gefäß mit Wasserhöhe B_0 getaucht. Dann gibt man je einen Finger auf die Glasröhrchen, sodass man sie gefüllt aus den Gefäßen nehmen kann, und gibt die Inhalte in das jeweils andere Gefäß. Dann wiederholt man diesen Schritt noch einige Male: Immer mit R_1 vom ersten Gefäß ins zweite und mit R_2 umgekehrt (gleichzeitig).

Fragen:
Was passiert dabei langfristig mit den Wasserhöhen in den Gefäßen?
Kann man diese in einem mathematischen Modell voraussagen?
Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, hängt das Verhalten der Höhen langfristig ab?

Das resultierende Höhenverhältnis ist reziprok zum Verhältnis der Glasröhrchenquerschnittsflächen.

Sowohl die dahinter liegende Mathematik als auch die nötigen TK-Kenntnisse bleiben auf relativ elementarem Niveau, so dass diese Aufgabe auch selbstständig bearbeitet werden kann.

Die Frage nach dem *Warum* dieses Einpendelns der Werte (Höhen) ist hier in ganz natürlicher Weise gegeben (Begründungsbedürfnis, Motivation): *Falls* sich die Werte A_n bzw. B_n der Höhen in den Gefäßen irgendwann nicht mehr ändern, sich also bei Werten A^* bzw. B^* eingependelt haben, dann muss ja $A_{n+1} = A^* = A_n$ gelten und somit:

$$A^* = A^* + \frac{Q_2 \cdot B^* - Q_1 \cdot A^*}{G}$$

$$\Leftrightarrow Q_2 \cdot B^* - Q_1 \cdot A^* = 0.$$

Natürlich ist hier auch die Interpretation mit den Volumina besonders wichtig, nicht nur die algebraische Handhabung. Der sich beim stationären Zustand ergebende Zusammenhang $A^* : B^* = Q_2 : Q_1$ ist nicht verwunderlich und auch dann zu verstehen, wenn man gar nicht mehr an die Terme, sondern nur noch an die reale Situation denkt: Bei einem weiteren „Austauschschritt“ sind dann eben die ausgetauschten Volumina $Q_2 \cdot B^* = Q_1 \cdot A^*$ identisch (das ist das Charakteristische am stationären Zustand). Trotz der scheinbar sehr einfachen Verhältnisse ist hier vielleicht insgesamt etwas Unterstützung durch die Lehrkraft nötig und angebracht.

Begründungen und Beweise für die Konvergenz

In leistungsstärkeren und theoretisch interessierten Klassen kann man noch Konvergenzuntersuchungen anstellen, d. h. die Konvergenz auch beweisen und nicht nur erahnen. Genau genommen ist die obige Überlegung natürlich kein Konvergenzbeweis, wir haben ja nur gesagt: *Wenn* die Höhen konvergieren, dann müssen sie das zu einer Situation tun, in der $A^* : B^* = Q_2 : Q_1$ gilt, aber *ob* die Höhen immer konvergieren müssen, ist dadurch natürlich noch nicht belegt.

	A	B	C	D	E
1					
2				Höhe1	Höhe2
3	Grundfläche	1000		50	20
4				49,88	20,12
5	Querschnittfläche1	8		49,76264	20,23736
6	Querschnittfläche2	14		49,6478619	20,3521381
7	Anfangshöhe1	50		49,535609	20,464391
8	Anfangshöhe2	20		49,4258256	20,5741744
9				49,3184574	20,6815426
10				49,2134513	20,7865487
11				49,1107554	20,8892446
12	**Höhe 1 nach 1000 Schritten**	**44,5454545**		49,0103188	20,9896812
13	**Höhe 2 nach 1000 Schritten**	**25,4545455**		48,9120918	21,0879082

Tab. 1: Der Versuch wird mit Tabellenkalkulation simuliert

	A	B	C	D	E
1					
2				Höhe1	Höhe2
3	Grundfläche	1000		50	20
4				49,9	20,1
5	Querschnittfläche1	10		49,803	20,197
6	Querschnittfläche2	20		49,70891	20,29109
7	Anfangshöhe1	50		49,6176427	20,3823573
8	Anfangshöhe2	20		49,5291134	20,4708866
9				49,44324	20,55676
10				49,3599428	20,6400572
11				49,2791445	20,7208555
12	**Höhe 1 nach 1000 Schritten**	**46,6666667**		49,2007702	20,7992298
13	**Höhe 2 nach 1000 Schritten**	**23,3333333**		49,1247471	20,8752529

Tab. 2: Simulation mit $Q_1 : Q_2 = 1 : 2$

	A	B	C	D	E
1					
2				Höhe1	Höhe2
3	Grundfläche	1000		50	20
4				48,7	21,3
5	Querschnittfläche1	30		47,452	22,548
6	Querschnittfläche2	10		46,25392	23,74608
7	Anfangshöhe1	50		45,1037632	24,8962368
8	Anfangshöhe2	20		43,9996127	26,0003873
9				42,9396282	27,0603718
10				41,922043	28,077957
11				40,9451613	29,0548387
12	**Höhe 1 nach 1000 Schritten**	**17,5**		40,0073549	29,9926451
13	**Höhe 2 nach 1000 Schritten**	**52,5**		39,1070607	30,8929393

Tab. 3: Simulation mit $Q_1 : Q_2 = 3 : 1$

Hier zeigt sich ein anderes Gesicht der Mathematik: Waren die bisherigen Aktivitäten eher Teile der Grunderfahrungen G1 (Realitätsbezüge) und G3 (Heuristik), so ist die Absicherung durch einen geschlossenen Beweis der Grunderfahrung G2 (deduktiv geordnetes Theoriegebäude) zuzuordnen (G1 bis G3 nach Winter 2003).

Für einen Ausbau dieses Themas in Richtung Konvergenzbeweise gibt es mehrere Möglichkeiten. Schon durch die numerischen Ergebnisse mit TK wird man feststellen, dass die Werte der Höhen sich (streng) monoton verändern. Wenn man dies auch allgemein beweisen könnte, so wäre durch den bekannten Satz von der monotonen Konvergenz eine Begründung gegeben, denn die Beschränktheit der Werte ist klar (nach unten durch 0 und nach oben durch die „Gesamthöhe" H). Wenn die Konvergenz gesichert ist, dann muss für die Grenzwerte A^* und B^* gelten: $A^* : B^* = Q_2 : Q_1$

Kasten 2 beschreibt kurz mehrere Möglichkeiten, die Konvergenz der Folgen (A_n) bzw. (B_n) zu zeigen.

Für die Experimente (mit Glasröhrchen und mit TK) und für die Konvergenzbeweise könnte man auch verschiedene Grundflächen G_1 und G_2 zulassen, die Betrachtungen würden dadurch kaum komplizierter und bieten sich für jene Schülerinnen und Schüler an, die bei der Bearbeitung der Aufgabe mit gleichen Grundflächen schneller fertig sind. Diese könnten dann an solchen Verallgemeinerungen arbeiten, während die anderen noch die Zeit brauchen für den Fall mit gleichen Grundflächen.

Was ändert sich durch verschiedene Grundflächen G_1 und G_2? Die Situation bleibt prinzipiell dieselbe, die „Gesamthöhe" (= Summe der beiden Wasserhöhen in den Gefäßen) ist dann zwar nicht mehr konstant, aber das Einpendeln bei $A^* : B^* = Q_2 : Q_1$ bleibt erhalten. Hier mag auf den ersten Blick erstaunen, dass dieses Verhältnis gar nicht von den Grundflächen G_1 und G_2 abhängt, ein zweiter Blick liefert die Erklärung: die Volumenänderung (im Zähler bei $A_{n+1} = A_n + \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}$) ist im stationären Zustand durch den Term $Q_2 \cdot B^* - Q_1 \cdot A^*$ gegeben, diese muss klarerweise 0 sein und ist unabhängig von den Gefäßgrundflächen.

Fachdidaktische Einordnung

Die hier vorgestellte Lernumgebung erfüllt die Voraussetzungen einer „substanziellen Lernumgebung" (Wittmann 1995 und 2001), denn sie

- thematisiert zentrale Ziele, Inhalte, Prinzipien des Unterrichts auf einer bestimmten Stufe (*hier: eigenständiges, aktiv-entdeckendes Lernen; ausgehend von einem bestimmten Phänomen prozessorientiert substanzielle Mathematik betreiben*),
- ist bezogen auf mathematische Inhalte und Verfahren, die unter dieser Stufe liegen (*hier: Iteration, Grenzwerte, Volumenformeln von Zylindern*) und bietet die Möglichkeit zu selbstständigen mathematischen Aktivitäten,
- ist flexibel und kann an spezielle Unterrichtsbedingungen angepasst werden.

Drei Wege, um die Konvergenz zu zeigen

1. Weg
Wir verwenden die ursprünglichen Iterationsformeln für die Höhen A_n bzw. B_n („gekoppeltes System von Differenzengleichungen")

$$A_{n+1} = A_n + \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G},$$
$$B\cancel{A}_{n+1} = B_n - \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G} \qquad (1)$$

und wenden ein induktives Argument an: Wir haben das streng monotone Fallen von (A_n) gezeigt, wenn $A_1 < A_0$ gilt, und wir die „Erblichkeit" dieser Kleinerbeziehung zeigen können: $A_{n+1} < A_n \Rightarrow A_{n+2} < A_{n+1}$ (2)
[Analog könnte es sich um ein streng monotones Wachsen handeln:
$A_1 > A_0$ und $A_{n+1} > A_n \Rightarrow A_{n+2} > A_{n+1}$.]

Zunächst gilt $A_{n+1} < A_n \Leftrightarrow Q_2 \cdot B_n < Q_1 \cdot A_n \Leftrightarrow \frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_n}{B_n}$.

Für (2) haben wir also zu zeigen:
$\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_n}{B_n} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$.

In die zu beweisende Ungleichung $\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ setzen wir für A_{n+1} bzw. B_{n+1} die Iterationsformeln ein:

$$\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_n + \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}}{B\cancel{A}_n - \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent (wenige Umformungen) zu
$B_n Q_2(G - (Q_1 + Q_2)) < A_n Q_1(G - (Q_1 + Q_2))$.
Unter der realistischen Annahme $G > Q_1 + Q_2$ ist diese Ungleichung äquivalent zu $\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_n}{B_n}$, was ja laut Voraussetzung gilt.

Für den einzig realistischen Fall, dass die Gefäßgrundfläche größer als die Summe der beiden Glasröhrchenquerschnittsflächen ist (man wird kaum so kleine Gefäße bzw. so große Röhrchen haben, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist), haben wir somit die (streng monotone) Konvergenz auch bewiesen.

Der andere Fall ($G \leq Q_1 + Q_2$) ist in der Realität nicht relevant und braucht in einem möglichen Unterricht nicht beachtet zu werden (es ergäbe sich hier nicht monotone, sondern oszillierende Konvergenz). Im Bedarfsfall sind mit den Möglichkeiten 2. und 3. (siehe unten) auch Wege zur Begründung der Konvergenz gegeben, die unabhängig von dieser Einschränkung sind und auch für den Fall $G \leq Q_1 + Q_2$ gelten.

2. Weg
Die gekoppelten Iterationsformeln (1) lassen sich auch leicht „trennen" und man kann einen Bezug zu „Linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten" herstellen:
Aus der ersten kann man wegen $B_n = H - A_n$ (mit H:= „Gesamthöhe") B_n eliminieren (durch A_n ausdrücken) und es ergibt sich:

$$A_{n+1} = A_n + \frac{Q_2 H - (Q_1 + Q_2) \cdot A_n}{G}, \qquad (3)$$

also eine Differenzengleichung der Form $A_{n+1} = c \cdot A_n + d$. In bekannter Art und Weise ergeben sich dafür Konvergenzkriterien und Grenzwerte, wenn man „Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten" kennt.

3. Weg
Auch wenn man nicht über das Wissen bei „Linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten" $A_{n+1} = c \cdot A_n + d$ verfügt, kann man in der „entkoppelten" Form (3) argumentieren, dass (A_n) konvergiert. Dies können Schüler/innen natürlich nicht alleine in selbständiger Arbeit leisten, sondern das bedarf der Unterstützung durch die Lehrkraft! Der einzig mögliche Grenzwert ist aus (3) leicht abzulesen:
$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{Q_2 H}{Q_1 + Q_2} =: A^*$. Mit $C_n := A_n - A^*$
ergibt sich nach wenigen Schritten, dass die Folge (C_n) eine geometrische Folge ist:

$$C_{n+1} = \underbrace{\left(1 - \frac{Q_1 + Q_2}{G}\right)}_{=:q} \cdot C_n.$$

Wegen $0 < Q_1 + Q_2 < 2G$ ist $|q| < 1$ garantiert und (C_n) damit eine Nullfolge. Daraus folgt unmittelbar $\lim_{n\to\infty} A_n = A^*$.

Das Thema kann differenzierend im Unterricht eingesetzt werden. Manche Schülerinnen und Schüler bleiben vielleicht ganz auf der Probierebene oder arbeiten nur mit speziellen Zahlenwerten, andere arbeiten auch allgemein, nutzen die Tabellenkalkulation, einige spüren vielleicht sogar das Beweisbedürfnis und vollziehen die Beweisideen nach.

Literatur

Winter, H. (2003): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. – In: Henn, H.-W./Maaß, K.: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, ISTRON-Schriftenreihe, Band 8, Franzbecker Verlag, S. 6–15.
Wittmann, E. Ch. (1995): Mathematics Education as a Design Science. – In: Educational Studies in Mathematics 29, S. 355–374.
Wittmann, E. Ch. (2001): Developing Mathematics Education in a systemic process. – In: Educational Studies in Mathematics 48, S.1–20.