Erwartungswerte und Gewinnwahrscheinlichkeiten bei einem Würfelbudenspiel

– ein neuer Beitrag zu einem alten Thema

Hans Humenberger

1 Einleitung

Beispiel: Bei einer Würfelbude wird folgendes Spiel angeboten: Der Würfelbudenbesitzer würfelt mit *sieben* Würfel und zählt sein *zweitbestes Resultat* (die zweithöchste der 7 geworfenen Augenzahlen). Der Kunde erhält *drei* Würfel und darf das *beste Resultat* (*höchste Augenzahl*) werten. Die Differenz dieser beiden Werte wird dem Sieger (jenem mit der höheren Augenzahl) in € bezahlt. Hat der Würfelbudenbesitzer z. B. die Augenzahlen (bereits der Größe nach geordnet) 4, **4**, 4, 3, 3, 2, 1 gewürfelt und der Kunde die Augenzahlen **5**, 2, 2, so hätte der Spieler (= Kunde) wegen 5 – 4 = 1 einen Gewinn von 1 € zu verzeichnen. Ist es ratsam, sich auf dieses Spiel einzulassen?

Zur Beantwortung solcher (und ähnlicher) Fragen wird bekanntlich der Erwartungswert des Gewinnes berechnet. Da der Gewinn gleich der Differenz der beiden Werte ist, müssen wir die einzelnen Erwartungswerte

E_1 = Erwartungswert der höchsten Augenzahl bei 3 Würfen

E_2 = Erwartungswert der zweithöchsten Augenzahl bei 7 Würfen

zunächst bestimmen; je nachdem, ob

(i) $E_1 > E_2$, (ii) $E_1 = E_2$ oder (iii) $E_1 < E_2$ ist, wird man potentiellen Spielern (i) zu diesem Spiel raten, (ii) es als *fair* bezeichnen, so dass weder eine positive noch eine negative Empfehlung ausgesprochen werden kann bzw. (iii) von diesem Spiel abraten.

Die Beantwortung dieser Frage wollen wir etwas aufschieben und uns zunächst Gedanken darüber machen, wie man allgemein den Erwartungswert der j-höchsten Augenzahl von n Würfen ($1 \le j \le n$) und den Erwartungswert der j-niedrigsten Augenzahl von n Würfen ($1 \le j \le n$) berechnen kann. Wir definieren

$X_j(n)$:= „die Zufallsvariable (*ZV*) der j-höchsten Augenzahl bei n Würfen" und

$Y_j(n)$:= „die *ZV* der j-niedrigsten Augenzahl bei n Würfen".

Wenn der Würfel bei n Würfen der Reihe nach die Augenzahlen $W_1(n), W_2(n), \ldots, W_n(n)$ liefert (die Zufallsvariable $W_k(n)$ bezeichne die Augenzahl des k-ten von n Würfen), so können wir diese Serie auch der Größe nach ordnen (von links nach rechts abfallend) und auf zwei Arten schreiben:

$$X_1(n), X_2(n), \ldots, X_{n-1}(n), X_n(n)$$

$$Y_n(n), Y_{n-1}(n), \ldots, Y_2(n), Y_1(n).$$

Im Folgenden sei unser Augenmerk auf die schrittweise Erarbeitung des Erwartungswertes $E[X_j(n)]$ bzw. $E[Y_j(n)]$ im allgemeinen Fall gerichtet (ausgehend vom einfachsten Fall $n = 2, j = 1$).

Bemerkungen: • Bei z. B. zehn Würfen entspricht dem zweitschlechtesten Resultat das „neuntbeste". Es ist also nicht notwendig, sondern nur bequemer für die Vorstellung, neben der *ZV* $X_j(n)$ noch die *ZV* $Y_j(n)$ einzuführen. Weiters werden damit auch viele Formulierungen und Formeln einfacher bzw. übersichtlicher. Man überlegt sich leicht, dass allgemein $Y_j(n) = X_{n-(j-1)}(n)$ gilt.

• Im folgenden Abschnitt („zwei Würfe bzw. zwei Würfel") lassen wir der Übersichtlichkeit halber bei $X_1(2)$, $Y_1(2)$, $W_1(2)$ die Anzahl der Würfe „(2)" jeweils weg und schreiben dafür X_1, Y_1, W_1. Erst bei n Würfen kehren wir zur vollständigen Schreibweise zurück.

2 Zwei Würfel werden geworfen

2.1. Das beste Resultat (die höchste Augenzahl) zweier Würfe

Aufgabe: Es wird ein Würfel zweimal geworfen (oder gleichwertig: zwei Würfel je einmal). Nur die größte der beiden Augenzahlen wird gewertet (wenn beide gleich sind, so kann eine beliebige gewertet werden). Mit welchem Wert kann man „im Mittel" für die größte Augenzahl rechnen?

Wenn also X_1 das Maximum der beiden Augenzahlen beschreibt, so haben wir den Erwartungswert $E[X_1]$ zu berechnen. Die möglichen Werte, die X_1 annehmen kann, sind $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Aber mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der beste zweier Würfe diese Werte i? Wenn wir dies beantwortet haben, so können wir den interessierenden Erwartungswert nach

$$E[X_1] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(X_1 = i) \text{ berechnen.}$$

Beim Werfen zweier Würfel gibt es insgesamt $6^2 = 36$ mögliche „Fälle" (geordnete Paare von Augenzahlen (W_1, W_2)). In wie vielen Fällen davon ist i ($i = 1, \ldots, 6$) die höchste der beiden Augenzahlen? Diese Häufigkeit $H(X_1 = i)$ wollen wir bestimmen! Beide Augenzahlen müssen dafür wohl $\le i$ sein (da es bei *einem* Wurf i Möglichkeiten gibt, eine Augenzahl $\le i$ zu erhalten, gibt es für „beide $\le i$" i^2 Möglichkeiten); davon müssen wir allerdings die Anzahl jener Möglichkeiten subtrahieren, bei denen beide wirklich $< i$ sind, es also gar kein i gibt – $(i-1)^2$ Möglichkeiten; insgesamt also

$$H(X_1 = i) = i^2 - (i-1)^2 = 2i - 1 \text{ Möglichkeiten.}$$

Jede Augenzahl i ist also in $2i - 1$ von 36 Fällen die höchste der beiden gewürfelten (die dargestellte Denkweise ist auch leicht verallgemeinerbar – siehe unten). Für den interessierenden Erwartungswert erhalten wir

$$E[X_1] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{2i-1}{36} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} i \cdot (2i-1) = \frac{161}{36} \approx 4{,}472,$$

ein Wert, der fast um 1 größer ist als der Erwartungswert 3,5 eines normalen Einzelwurfes.

2.2. Das schlechteste Resultat (niedrigste Augenzahl) zweier Würfe

Für die niedrigste Augenzahl zweier Würfe haben wir Y_1 geschrieben. Wir interessieren uns für $E[Y_1]$ und berechnen diesen Erwartungswert nach

$$E[Y_1] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(Y_1 = i) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{H(Y_1 = i)}{36}.$$

Für $P(Y_1 = i) = H(Y_1 = i)/36$ berechnen wir wieder zunächst die Anzahl, wie oft in den 36 möglichen Fällen i das schlechteste Resultat ist: $H(Y_1 = i)$. Diese Fälle können wir analog zu oben zählen: i ist genau dann das schlechteste Resultat, wenn beide Augenzahlen $\geq i$ sind [1]) abzüglich jener Fälle, in denen beide wirklich $>$ i sind [in denen also gar kein i geworfen wurde, $(6 - i)^2$ Möglichkeiten]; insgesamt also

$$H(Y_1 = i) = (7 - i)^2 - (6 - i)^2 = 13 - 2i \text{ Möglichkeiten.}$$

Für den Erwartungswert $E[Y_1]$ ergibt sich somit

$$E[Y_1] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{13-2i}{36} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} i \cdot (13-2i) = \frac{91}{36} \approx 2{,}528.$$

Betrachtet man die Zahlenwerte von $E[X_1] \approx 4{,}472$ und $E[Y_1] \approx 2{,}528$, so fällt sofort auf, dass ihre Summe genau 7 ergibt. Dies kann a posteriori durch

$$E[X_1] + E[Y_1] = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} i \cdot [(2i-1) + (13-2i)] = \frac{12}{34}\sum_{i=1}^{6} i = 7$$

bestätigt werden oder a priori ganz elementar durch:

$$E[X_1] + E[Y_1] = E[X_1 + Y_1] = E[W_1 + W_2] = E[W_1] + E[W_2]$$
$$= 3{,}5 + 3{,}5 = 7. \text{ D. h.}$$

- Der Erwartungswert des besten Resultates zweier Würfe ist genau soviel höher als 3,5 (dies entspricht dem Erwartungswert eines gewöhnlichen Einzelwurfes) als der Erwartungswert des schlechtesten niedriger als 3,5 ist.

3 Es werden *n* Würfel geworfen

3.1. Das beste Resultat (die höchste Augenzahl) von *n* Würfen

Wie sieht die Lage aus, wenn wir nicht nur zwei Würfe machen und uns für die höchste Augenzahl X_1 interessieren, sondern 3, 4, …, n Würfe? – Ab nun schreiben wir wieder $X_1(n)$ bzw. $E[X_1(n)]$.

Es werden n Würfe ausgeführt, so dass es klarerweise 6^n Möglichkeiten für eine solche Serie $W_1(n), \ldots, W_n(n)$ aus n Augenzahlen gibt (mit Beachtung der Reihenfolge). Wir interessieren uns wiederum für den Erwartungswert des besten Wurfresultates

$$E[X_1(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(X_1(n) = i) \text{ mit } P(X_1(n) = i) = \frac{H(X_1(n) = i)}{6^n}.$$

Die Anzahl von Möglichkeiten $H(X_1(n) = i)$ wollen wir kürzer mit $B_1(i, n)$ bezeichnen (dies soll an „1.-bestes Resultat" erinnern [1]))
Für den interessierenden Erwartungswert $E[X_1(n)]$ gilt in dieser Notation

$$E[X_1(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{B_1(i,n)}{6^n},$$

so dass sich die Berechnung von $E[X_1(n)]$ reduziert auf die Berechnung der Werte $B_1(i, n)$: in wie vielen Fällen (von den 6^n möglichen) ist i die höchste Augenzahl?

Wie oben für $n = 2$ schon gesehen: alle Augenzahlen müssen $\leq i$ sein (i^n Möglichkeiten); davon müssen wir allerdings jene Möglichkeiten subtrahieren, bei denen alle wirklich $< i$ sind, also gar kein i geworfen wird – $(i - 1)^n$ Möglichkeiten; insgesamt also $B_1(i, n) = i^n - (i - 1)^n$ Möglichkeiten.

Für den in Rede stehenden Erwartungswert erhalten wir (die Formel stimmt auch für $n = 1$):

$$E[X_1(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{B_1(i,n)}{6^n} = \frac{1}{6^n}\sum_{i=1}^{6} i \cdot [i^n - (i-1)^n]$$

Bemerkung: Die Darstellung für $E[X_1(n)]$ könnte noch etwas vereinfacht werden zu

$$(1) \quad E[X_1(n)] = 6 - \frac{1}{6^n}\sum_{i=1}^{5} i^n = 6 - \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{i}{6}\right)^n.$$

Dies wäre insbesondere dann von Vorteil, wenn einige solche Erwartungswerte (für verschiedene n) mit nur einem Taschenrechner, also ohne ein CAS, berechnet werden sollten.

Es ist schon a priori klar, dass sich der Erwartungswert $E[X_1(n)]$ mit wachsendem n immer mehr dem Wert 6 nähert (→ Kontrollmöglichkeit, selbstständige Begründung durch die Schüler: je mehr Würfe man tätigt, desto wahrscheinlicher ist es – sogar Konvergenz gegen 1 –, dass mindestens eine 6 dabei ist, so dass dem Wert 6 für den Erwartungswert der höchsten Augenzahl immer mehr „Gewicht" zukommt); diese Entwicklung ist auch Tab. 1 zu entnehmen. Sollte diese Konvergenz gegen den Wert 6 nicht a priori klar sein, so kann der Computer durchaus diese „vor Augen führen" (relativ große Werte für n einsetzen) und erst Anlass zu Vermutungen bzw. Begründungen geben (in (1) ist auch $\lim_{n\to\infty} E[X_1(n)] = 6$ leicht zu sehen).

Die Werte solcher (und noch folgender) Tabellen können und sollen von Schülern selbstständig mit einem CAS berechnet werden, wobei das geeignete *Definieren von Funktionen* [2]) und deren *Auswertung* für verschiedene Werte von n im Vordergrund steht (mit Hilfe von Befehlen wie „Tabelle, Liste, Vector, Matrix, …", die genaue Syntax der einzelnen CAS sei hier nicht im Vordergrund).

[1]) es gibt, wie man sich z. B. anhand konkreter Werte von i leicht überlegt, $7 - i$ Augenzahlen, die $\geq i$ sind; also $(7 - i)^2$ Möglichkeiten für „beide $\geq i$"

[1]) Der Index (hier 1) gewinnt erst später an Bedeutung, wenn wir von der Häufigkeit $B_j(i, n)$ reden: in wie vielen von den 6^n möglichen Fällen die Augenzahl i das j-beste Resultat von n Würfen ist.

[2]) Hier z. B. $B_1(i, n) := i^n - (i - 1)^n$ und $E[X_1(n)] := \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i \cdot B_1(i,n)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50
$E[X_1(n)]$	3,5	4,472	4,958	5,245	5,431	5,561	5,654	5,724	5,778	5,820	5,9999

Tabelle 1: Die Erwartungswerte $E[X_1(n)]$ der höchsten Augenzahl bei n = 1, …, 10, 50 Würfen

3.2. Das schlechteste Resultat (niedrigste Augenzahl) von *n* Würfen

Da n Würfe ausgeführt werden, gibt es klarerweise wieder 6^n Möglichkeiten für eine solche Serie aus n Würfen. Wir interessieren uns nun für den Erwartungswert $E[Y_1(n)]$ des *schlechtesten* Wurfresultates.

$$E[Y_1(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(Y_1(n) = i) \text{ mit } P(Y_1(n) = i) = \frac{H(Y_1(n) = i)}{6^n}.$$

Die Anzahl von Möglichkeiten $H(Y_1(n) = i)$ wollen wir $S_1(i, n)$ nennen (diese Bezeichnungsweise soll an „**1.**-schlechtestes Resultat" erinnern). Für den interessierenden Erwartungswert $E[Y_1(n)]$ gilt in dieser Notation

$$E[Y_1(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{S_1(i,n)}{6^n},$$

so dass sich die Berechnung von $E[Y_1(n)]$ reduziert auf die Berechnung der Werte $S_1(i, n)$: in wie vielen Fällen (von den 6^n möglichen) ist i die niedrigste Augenzahl?

Alle n Augenzahlen müssen $\geq i$ sein ($(7 - i)^n$ Möglichkeiten); davon müssen wir allerdings jene Möglichkeiten subtrahieren, bei denen alle wirklich $> i$ sind, also gar kein i geworfen wird – $(6 - i)^n$ Möglichkeiten; insgesamt also $S_1(i, n) = (7 - i)^n - (6 - i)^n$ Möglichkeiten. Für den in Rede stehenden Erwartungswert erhalten wir (die Formel stimmt auch für $n = 1$):

$$(2)\quad E[Y_1(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{S_1(i,n)}{6^n} = \frac{1}{6^n} \sum_{i=1}^{6} i \cdot [(7-i)^n - (6-i)^n]$$

Analog zu oben soll a priori klar sein, dass der Erwartungswert $E[Y_1(n)]$ mit wachsendem n sich immer mehr dem Wert 1 nähert (→ Kontrollmöglichkeit, selbstständige Begründung durch die Schüler: je mehr Würfe man tätigt, desto wahrscheinlicher ist es – sogar Konvergenz gegen 1 –, dass mindestens eine 1 dabei ist.) Durch eine ähnliche Tabelle wie Tab. 2 (mit einem Computer berechnete Werte) könnte dies eventuell auch erst ins Auge springen. In Tab. 2 sind auch nochmals die Erwartungswerte $E[X_1(n)]$ aufgelistet, wobei natürlich sofort auffällt, dass $E[X_1(n)] + E[Y_1(n)] = 7$ zu sein scheint (für $n = 1$ ist dies klar und für $n = 2$ haben wir dies bereits bestätigt).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50
$E[Y_1(n)]$	3,5	2,528	2,042	1,755	1,569	1,440	1,346	1,276	1,222	1,180	1,0000
$E[X_1(n)]$	3,5	4,472	4,958	5,245	5,431	5,561	5,654	5,724	5,778	5,820	5,9999

Tabelle 2: Die Erwartungswerte $E[Y_1(n)]$ des schlechtesten Resultates und $E[X_1(n)]$ des besten von n Würfen (n = 1, …, 10, 50)

Bemerkung: Obige Darstellung (2) für $E[Y_1(n)]$ kann wieder vereinfacht werden, z. B. zu

$$E[Y_1(n)] = 1 + \frac{1}{6^n} \sum_{i=1}^{6} i^n = 1 + \sum_{i=1}^{6} (\tfrac{1}{6})^n,$$

wobei dann einerseits $\lim_{n\to\infty} E[Y_1(n)] = 1$ leicht zu sehen und andererseits mit Hilfe von (1) sofort klar ist, dass $E[X_1(n)] + E[Y_1(n)] = 7$ ist. D. h.: Der Erwartungswert des besten Resultates und der Erwartungswert des schlechtesten Resultates von n Würfen ergänzen einander immer auf 7. Oder: Der Erwartungswert des besten Resultates von n Würfen ist genau so viel niedriger als 6, als der Erwartungswert des schlechtesten höher als 1 ist.

Vergleicht man $B_1(i, n)$ (jene Anzahl der 6^n Fälle, in denen die Augenzahl i das beste Resultat ist) mit $S_1(i, n)$ (Anzahl der 6^n Fälle, in denen i das schlechteste Resultat ist)

$$B_1(i, n) = i^n - (i - 1)^n \text{ bzw. } S_1(i, n) = (7 - i)^n - (6 - i)^n,$$

so sieht man für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ unmittelbar folgende *Symmetriebeziehung*:

$$B_1(i, n) = S_1(7 - i, n) \text{ bzw. } S_1(i, n) = B_1(7 - i, n).$$

D. h. es gibt genau so viele Fälle (von 6^n möglichen), bei denen die Augenzahl i (6, 5, 4, 3, 2, 1) das *beste* Resultat ist, wie Fälle, bei denen die jeweilige „Gegenzahl" $7 - i$ (1, 2, 3, 4, 5, 6) das *schlechteste* Resultat ist [die völlig analoge Aussage gilt selbstverständlich auch für *Wahrscheinlichkeiten* statt Häufigkeiten].

Man sieht in den obigen Ausführungen auch *sprachlich* sehr deutlich, dass die Fälle „bestes Resultat" und „schlechtestes Resultat" völlig **symmetrisch** liegen.

In den Formulierungen entsprechen einander

„kleiner als i" ($i - 1$ Möglichkeiten)
↔ „größer als i" ($6 - i$ Möglichkeiten),

„kleiner oder gleich i" (i Möglichkeiten)
↔ „größer oder gleich i" ($7 - i$ Möglichkeiten).

3.3. Eine wichtige Verallgemeinerung dieser Symmetriebeziehung

Auch ohne die obigen konkreten Darstellungen von $B_1(i, n)$ bzw. $S_1(i, n)$ kann die genannte **Symmetriebeziehung** a priori plausibel begründet werden:

Schreibt man auf die Fläche jeder Augenzahl i der n Würfel *auch* ihre jeweilige Gegenzahl $7 - i$ (am besten mit einer anderen Farbe: ursprüngliche Augenzahlen schwarz und Gegenzahlen rot, so dass auf jeder Würfelfläche zwei Werte stehen), so ergibt sich dadurch wie von selbst $B_1(i, n) = S_1(7 - i, n)$, indem man einmal die ursprünglichen schwarzen Augenzahlen (1, 2, 3, 4, 5, 6) und ein anderes Mal die zugehörigen roten (6, 5, 4, 3, 2, 1) als Würfelresultate betrachtet: immer wenn eine schwarze Augenzahl i (z. B. 5) die höchste unter den n schwarzen ist, ist die zugehörige rote Augenzahl $7 - i$ (z. B. 2, auf derselben Würfelfläche!) die niedrigste unter den n roten!

Mehr noch, es wird dadurch auch sofort die **Verallgemeinerung dieser Symmetrie** bzgl. *j-bestes – j-schlechtestes* Resultat klar: Mit $B_j(i, n)$ bzw. $S_j(i, n)$ sei die Anzahl jener (von den 6^n möglichen) Wurfserien bezeichnet, in denen die Augenzahl i das j-höchste (bzw. j-niedrigste) Wurfresultat darstellt.

Ohne zunächst genaue Darstellungen für die in Rede stehenden Werte $B_j(i, n)$ bzw. $S_j(i, n)$ zu kennen, ist analog zu oben sofort klar:

(3) $B_j(i, n) = S_j(7 - i, n)$ bzw. $S_j(i, n) = B_j(7 - i, n)$:

d. h. es gibt genau so viele Fälle, bei denen i (6, 5, 4, 3, 2, 1) das *j-beste* Resultat ist, wie Fälle, bei denen die jeweilige „Gegenzahl" $7 - i$ (1, 2, 3, 4, 5, 6) das *j-schlechteste* ist.

Die Begründung verläuft ganz analog zu oben: n Würfel werden geworfen, so dass n Augenzahlen (schwarze bzw. rote) vor einem liegen; immer wenn eine schwarze Augenzahl i (z. B. 5) die j-höchste unter den n schwarzen ist, ist die zugehörige rote Augenzahl $7 - i$ (z. B. 2, auf derselben Würfelfläche!) klarerweise die j-niedrigste unter den n roten!

Ohne Kenntnis der konkreten Werte von $B_j(i, n)$ bzw. $S_j(i, n)$ erhalten wir:

Satz: Für alle $1 \le j \le n$ gilt: $E[X_j(n)] + E[Y_j(n)] = 7$.

D. h. der Erwartungswert des j-besten Resultates und der Erwartungswert des j-schlechtesten Resultates von n Würfen ergänzen einander immer auf 7.

Beweis: Mit

$P(i) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{B_j(i,n)}{6^n}$ ... Wahrscheinlichkeit, dass i das j-höchste Resultat von n Würfen ist

$\overline{P}(i) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{S_j(i,n)}{6^n}$ ... Wahrscheinlichkeit, dass i das j-niedrigste Resultat von n Würfen ist

lautet unsere Symmetriebeziehung $\overline{P}(i) = P(7 - i)$. Damit ergibt sich:

$$E[X_j(n)] + E[Y_j(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(i) + \sum_{i=1}^{6} i \cdot \overline{P}(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(i) + \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(7-i) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(i) + \sum_{i=1}^{6} (7-i) \cdot P(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{6} (i+7-i) \cdot P(i) = 7 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{6} i \cdot P(i)}_{=1} = 7$$

Für *konkrete Werte* von $B_j(i, n)$ hilft uns allerdings diese Symmetrie nicht, so dass wir dafür weitere Überlegungen anzustellen haben. Sobald wir allerdings über eine konkrete Darstellung für $B_j(i, n)$ verfügen, haben wir mittels dieser verallgemeinerten Symmetriebeziehung auch eine für $S_j(i, n)$, nämlich $S_j(i, n) = B_j(7 - i, n)$.

3.4. Das zweitbeste Resultat (die zweithöchste Augenzahl) von n Würfen – das zweitschlechteste Resultat

Wir werfen einen Würfel n-mal und interessieren uns für die zweithöchste Augenzahl $X_2(n)$ in dieser Serie bzw. für ihren Erwartungswert $E[X_2(n)]$:

$$E[X_2(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{B_2(i,n)}{6^n} = \frac{1}{6^n} \sum_{i=1}^{6} i \cdot B_2(i,n)$$

Für die Berechnung der Werte $B_2(i, n)$ müssen wir zählen, wie oft i das zweitbeste Resultat von n Würfen ist.

Wenn zwei oder mehr Augenzahlen $> i$ sind, so kann klarerweise i auf keinen Fall die zweithöchste sein. Die Anzahl der Augenzahlen $> i$ kann also nur (a) 1 oder (b) 0 betragen:

(a) Genau eine Augenzahl ist größer als i und alle anderen $n - 1$ Augenzahlen sind $\le i$, aber nicht alle wirklich kleiner als i (es muss mindestens ein Resultat i existieren).

$$\underbrace{\bullet}_{>i}\;\underbrace{\overbrace{i\,|\,\bullet\ldots\bullet}^{n-1\text{ viele}}}_{\le i}$$

Es gibt n Möglichkeiten, *welche* der n Augenzahlen $W_1(n), \ldots, W_n(n)$ jene $> i$ ist; diese kann auf $6 - i$ Arten größer als i sein; schließlich beträgt die Anzahl der Möglichkeiten, dass alle anderen $n - 1$ Augenzahlen $\le i$, aber nicht alle wirklich kleiner als i sind, analog zu Abschnitt **3.1.** (nur $n - 1$ statt n): $i^{n-1} - (i - 1)^{n-1}$. Im Fall (a) ergeben sich also $n \cdot (6 - i) \cdot [i^{n-1} - (i - 1)^{n-1}]$ Möglichkeiten.

(b) Kein Resultat ist größer als i (anders formuliert: alle sind $\le i$) **und es gibt mindestens zwei Wurfergebnisse i.**

$$\underbrace{\overbrace{i\,i\,|\,\bullet\ldots\bullet}^{n\text{ viele}}}_{\le i}$$

Um diese Anzahl von Fällen möglichst einfach zu zählen, ziehen wir von der Anzahl jener Möglichkeiten, bei denen alle n Resultate $\le i$ sind (i^n Möglichkeiten) die Anzahl jener Fälle ab, in denen es gar kein oder nur ein i gibt; dies sind $(i - 1)^n$ bzw. $n \cdot (i - 1)^{n-1}$ Möglichkeiten. Für den Fall (b) ergeben sich also $i^n - (i - 1)^n - n \cdot (i - 1)^{n-1}$ Möglichkeiten.

Für die Gesamtanzahl $B_2(i, n)$ haben wir diese Anzahlen der Fälle (a) und (b) zu addieren, so dass wir schließlich $B_2(i, n) = n \cdot (6 - i) \cdot [i^{n-1} - (i - 1)^{n-1}] + i^n - (i - 1)^n - n \cdot (i - 1)^{n-1}$ bzw. nach kurzer Vereinfachung folgendes erhalten:

(4) $B_2(i, n) = i^n - (i - 1)^n + n \cdot (6 - i) \cdot i^{n-1} - n \cdot (7 - i) \cdot (i - 1)^{n-1}$.

Mit Hilfe dieser Werte $B_2(i, n)$ kann der interessierende Erwartungswert berechnet werden:

(5) $E[X_2(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \dfrac{B_2(i,n)}{6^n}$

In Tab. 3 sind wieder einige solche Erwartungswerte aufgelistet, wobei zu sehen und auch von vornherein klar ist, dass sich der zugehörige Erwartungswert mit wachsendem n dem Wert 6 nähert (Kontrollmöglichkeit bzw. Anlass für Vermutung und Begründung).

n	2	3	4	5	6	7	8
$E[X_2(n)]$	2,528	3,5	4,100	4,499	4,784	4,997	5,162

n	9	10	50
$E[X_2(n)]$	5,294	5,400	5,9988

Tabelle 3: Die Erwartungswerte $E[X_2(n)]$ der zweithöchsten Augenzahl bei $n = 2, \ldots, 10, 50$ Würfen

Damit haben wir aber auch den dazu symmetrischen Fall (das zweitschlechteste Resultat von n Würfen) gelöst, denn $S_2(i, n) = B_2(7 - i, n)$:

(6) $S_2(i, n) = (7 - i)^n - (6 - i)^n + n \cdot (i - 1) \cdot (7 - i)^{n-1} - n \cdot i \cdot (6 - i)^{n-1}$.

Mit Hilfe dieser Werte $S_2(i, n)$ kann auch der Erwartungswert $E[Y_2(n)]$ der zweitniedrigsten Augenzahl bei n Würfen für verschiedene n berechnet werden:

$$(7)\quad E[Y_2(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{S_2(i,n)}{6^n}$$

In Tab. 4 sind wieder einige solche Erwartungswerte aufgelistet, wobei zu sehen ist (klar!), dass sich der zugehörige Erwartungswert mit wachsendem n dem Wert 1 nähert.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50
$E[Y_2(n)]$	4,472	3,5	2,900	2,501	2,216	2,003	1,838	1,706	1,600	1,0012
$E[X_2(n)]$	2,528	3,5	4,100	4,499	4,784	4,997	5,162	5,294	5,400	5,9988

Tabelle 4: Die Erwartungswerte $E[Y_2(n)]$ der zweitniedrigsten Augenzahl und $E[X_2(n)]$ der zweithöchsten Augenzahl bei $n = 2, \ldots, 10, 50$ Würfen

In Tab. 4 ist des Weiteren erneut zu erkennen, dass wieder $E[X_2(n)] + E[Y_2(n)] = 7$ ist (dies haben wir ja schon allgemein, nicht nur für $j = 2$ begründet).

4 Mit welchem durchschnittlichen Wert kann man bei *n* Würfen für das *j*-beste Resultat rechnen?

Der obige Abschnitt für das zweitbeste bzw. -schlechteste Resultat deutet den Weg für den allgemeinen Fall schon an. Zur Berechnung von $E[X_j(n)]$ nach

$$E[X_j(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{B_j(i,n)}{6^n} = \frac{1}{6^n}\sum_{i=1}^{6} i \cdot B_j(i,n)$$

($P(X_j(n = i) = \frac{B_j(i,n)}{6^n}$ brauchen wir analog die Anzahl $B_j(i, n)$ der möglichen Serien $W_1(n), \ldots, W_n(n)$, so dass die Augenzahl i die j-höchste Augenzahl bei n Würfen ist. [3])

Wir nehmen eine Fallunterscheidung nach der **Anzahl *a* der Augenzahlen > *i*** vor und wissen bereits: $0 \le a \le j - 1$.

Für alle Werte a mit $0 \le a \le j - 1$ gilt:

Die Augenzahl *i* ist genau dann das *j*-beste Resultat, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. es gibt genau *a* viele Augenzahlen > *i* [es gibt $\binom{n}{a}$ Möglichkeiten, *welche* der n Resultate $W_1(n), \ldots, W_n(n)$ dies sind; jedes Resultat kann auf $6 - i$ Arten größer als i sein, so dass es bei a vielen solchen Resultaten $(6 - i)^a$ viele Möglichkeiten gibt; diese erste Teilbedingung ist also auf

$$(8)\quad \binom{n}{a}\cdot(6-i)^a \qquad \underbrace{X_1(n)\ldots\ldots X_a(n)}_{a \text{ Augenzahlen, alle } > i} \;\Big|\; \overbrace{\underbrace{i}_{X_{a+1}} \;\ldots\; \underbrace{i}_{X_j}}^{j-a \text{ viele } i} \;\underbrace{\ldots\ldots}_{\le i}$$

viele Arten erfüllbar; eine der Größe nach geordnete mögliche Serie ist dargestellt]

2. und alle anderen *n* – *a* Augenzahlen sind ≤ *i* und unter diesen gibt es mindestens *j* – *a* viele Augenzahlen = *i* (die restlichen sind dann klarerweise < i). Wir berechnen diese Anzahl von Möglichkeiten (analog zum Fall $j = 2$) folgendermaßen: Von der Anzahl i^{n-a} der Möglichkeiten, dass alle anderen $n - a$ Augenzahlen $\le i$ sind, subtrahieren wir die Anzahl der Möglichkeiten, dass höchstens $j - a - 1$ viele Augenzahlen $= i$ sind:

$$(9)\quad \underbrace{i^{n-a}}_{\text{alle } n-a \text{ Augenzahlen } \le i} - \underbrace{\sum_{t=0}^{j-a-1} \overbrace{\binom{n-a}{t}}^{t \text{ von den } n-a \text{ Augenzahlen sind } = i} \cdot \overbrace{(i-1)^{n-a-t}}^{\text{die anderen } n-a-t \text{ Augenzahlen sind } < i}}_{\text{höchstens } j-a-1 \text{ viele Augenzahlen } = i,\text{ die anderen } < i}.$$

Da jede Möglichkeit in 1. mit jeder in 2. kombiniert werden kann, haben wir noch das Produkt aus (8) und (9) zu bilden: für jedes a mit $0 \le a \le j - 1$ gibt es insgesamt

$$\binom{n}{a}(6-i)^n\left[i^{n-a} - \sum_{t=0}^{j-a-1}\binom{n-a}{t}(i-1)^{n-a-t}\right]$$

Möglichkeiten, so dass die Augenzahl i das j-beste Resultat ist. Für die gesuchte Gesamtzahl $B_j(i, n)$ dieser Möglichkeiten haben wir noch die zugehörige Summe $\sum_{a=0}^{j-1}$ zu bilden und es ergibt sich

$$(10)\quad B_j(i, n) = \sum_{a=0}^{j-1}\binom{n}{a}(6-i)^a\left[i^{n-a} - \sum_{t=0}^{j-a-1}\binom{n-a}{t}(i-1)^{n-a-t}\right]$$

Mit Hilfe dieser Werte kann nun der interessierende Erwartungswert nach

$$(11)\quad E[X_j(n)] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{B_j(i,n)}{6^n} = \frac{1}{6^n}\sum_{i=1}^{6} i \cdot B_j(i,n)$$

für verschiedene konkrete Werte von n bzw. j berechnet werden. In Tab. 5 sind stellvertretend die (gerundeten) Erwartungswerte $E[X_j(9)]$ angegeben.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$E[X_j(9)]$	5,778	5,294	4,703	4,100	3,5	2,900	2,297	1,706	1,222

Tabelle 5: Die Erwartungswerte $E[X_j(9)]$ des j-besten Resultates von 9 Würfen ($j = 1, \ldots, 9$)

Wir sehen in Tab. 5 und wissen dies bereits: summiert man die äußeren Werte ($j = 1, j = 9$), so ergibt sich 7; dies gilt auch bei allen weiter „innen" liegenden Paarungen. Es fällt auch sofort auf, dass der Erwartungswert des 5-besten Resultats von 9 Würfen (des „mittleren") genau 3,5 ist.

Es gilt ja allgemein für $n \ge 1$ und $1 \le j \le n$:

$$E[X_j(n)] + E[Y_j(n)] = 7.$$

Daraus ergibt sich für ungerade n – dann gibt es in der Liste 1, n ein **mittleres** Element $m = (n + 1)/2$ – die Tatsache, dass $E[X_m(n)] = 3{,}5$ ist (denn $X_m(n) = Y_m(n)$): das „mittelbeste" Resultat hat denselben Erwartungswert 3,5 wie ein einziger neutraler Wurf; so haben z. B. der zweitbeste von drei Würfen oder der drittbeste von fünf Würfen etc. den Erwartungswert 3,5.

[3]) Die Berechnung dieser Werte $B_j(i, n)$ stellt nun den mathematisch schwierigsten Teil; sie ist zwar nicht ganz leicht, sollte aber insbesondere nach der Behandlung des Falles $j = 2$ nicht allzu große Schwierigkeiten machen (natürlich nicht mehr für einen Grundkurs geeignet).

Betrachtet man Formel (10) für $B_j(i, n)$, so stellt man fest:

1) Konkrete Werte sind ohne Computer nur sehr mühsam berechenbar. Mit Computer ist allerdings durch die Eingabe obiger Formel die ganze Arbeit erledigt.

2) Wenn n und j relativ groß sind (z. B. $B_{98}(i, 100)$, ... Anzahl der Möglichkeiten, dass die Augenzahl i die 98-höchste von 100 Würfen ist), so sieht man in (10), dass dafür erstens sehr *viele* und zweitens sehr *komplizierte* Binomialkoeffizienten zu berechnen sind und der Computer dafür auch schon einige Zeit zur Berechnung braucht:

$$B_{98}(i,100)=\sum_{a=0}^{97}\binom{100}{a}(6-i)^a\left[i^{100-a}-\sum_{t=0}^{97-a}\binom{100-a}{t}(i-1)^{100-a-t}\right].$$

Doch $X_{98}(100) = Y_3(100)$ und $B_{98}(i, 100) = S_3(i, 100)$, so dass wir günstigerweise auch im allgemeinen Fall Überlegungen für $Y_j(n)$ bzw. $S_j(i, n)$ anstellen, wofür wir nur die schon mehrfach angesprochene **Symmetrie** $S_j(i, n) = B_j(7 - i, n)$ zu verwenden haben (man erhält $S_j(i, n)$ aus $B_j(i, n)$, indem $7 - i \leftrightarrow i$ bzw. $6 - i \leftrightarrow i - 1$ „vertauscht" werden):

$$(12)\quad S_j(i,n)=\sum_{a=0}^{j-1}\binom{n}{a}(i-1)^a\left[(7-i)^{n-a}-\sum_{t=1}^{j-a-1}\binom{n-a}{t}(6-i)^{n-a-t}\right]\quad\text{bzw.}$$

$$(13)\quad E[Y_j(n)]=\sum_{i=1}^{6}i\cdot\frac{S_j(i,n)}{6^n}=\frac{1}{6^n}\sum_{i=0}^{6}i\cdot S_j(i,n)$$

Damit ist auch $E[Y_j(n)]$, der Erwartungswert des j-schlechtesten Resultates von n Würfen, (für relativ kleine Werte von j) mit relativ *kurzen* Summen und relativ *einfachen* Binomialkoeffizienten in $S_j(i, n)$ berechenbar. Zum Vergleich beim obigen *Beispiel*:

$$B_{98}(i, 100) = S_3(i, 100) =$$

$$=\sum_{a=0}^{2}\binom{100}{a}(i-1)^a\left[(7-i)^{100-a}\right]-\sum_{t=0}^{2-a}\binom{100-a}{t}(6-i)^{100-a-t}$$

Die Symmetrie wird in Tab. 6 stellvertretend für $n = 8$ mit den konkreten Werten $B_j(i, 8)$ veranschaulicht. Die Spaltensummen bei jedem j ergeben jeweils $6^8 = 1\,679\,616$ und die Zeilensummen bei jedem i jeweils $8 \cdot 6^7 = 2\,239\,488$. Allgemein gilt:

$$(14)\quad \sum_{i=1}^{6}B_j(i,n)=6^n\quad\text{und}\quad\sum_{j=1}^{n}B_j(i,n)=n\cdot 6^{n-1}.$$

denn die „Spaltensummen" $\sum_{i=1}^{6}B_j(i,n)$ geben an, in wie vielen Fällen das j-beste Resultat 1 oder 2 ... oder 6 beträgt und dies sind klarerweise 6^n (Anzahl *aller* möglichen Fälle); die „Zeilensummen" $\sum_{j=1}^{n}B_j(i,n)$ ergeben offenbar jeweils die Anzahl, wie oft i insgesamt als „Stelle" in allen 6^n möglichen und jeweils n Stellen langen Wurfserien $W_1(n), \ldots, W_n(n)$ vorkommt (insgesamt daher $n \cdot 6^n$ Stellen); da je zwei Augenzahlen insgesamt in all diesen möglichen Wurfserien natürlich gleich oft vorkommen müssen (aus Symmetriegründen kann keine bevorzugt sein), kommt jede der sechs möglichen Augenzahlen i insgesamt $\frac{n\cdot 6^n}{6} = n \cdot 6^{n-1}$ mal vor.

$B_j(i, 8)$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=6$	1 288 991	663 991	226 491	51 491	7 741	741
$i=5$	325 089	687 945	666 693	382 941	139 971	32 283
$i=4$	58 975	268 631	543 675	635 011	462 461	209 733
$i=3$	6 305	54 697	209 733	462 461	635 011	543 675
$i=2$	255	4 311	32 283	139 971	382 941	666 693
$i=1$	1	41	741	7 741	51 491	226 491

$B_j(i, 8)$	$j=7$	$j=8$
$i=6$	41	1
$i=5$	4 311	255
$i=4$	54 697	6 305
$i=3$	268 631	58 975
$i=2$	687 945	325 089
$i=1$	663 991	1 288 991

Tabelle 6: Die Anzahl der Möglichkeiten $B_j(i, 8)$, dass i das j-beste Resultat bei 8 Würfen ist, für $i = 6, 5, 4, 3, 2, 1$ und $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

5 Eine Überraschung in Bezug auf Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten

Bevor wir uns der in diesem Abschnitt angekündigten Überraschung widmen, geben wir zunächst die **Antwort auf die ursprünglich gestellte Frage (Spielbude):**

Wegen $E[X_1(3)] \approx 4{,}958$ und $E[X_2(7)] \approx 4{,}997$ gewinnt der Spielbudenbesitzer auf lange Sicht („durchschnittlich") ca. 0,039 € pro Spiel (man könnte die „Einheit" auch bei 10 € oder gar 100 € ansetzen, so dass der Spielbudenbesitzer einen durchschnittlichen Gewinn von ca. 0,39 € bzw. 3,90 € pro Spiel machte). Es ist also für Kunden *nicht* ratsam, sich an diesem Spiel zu beteiligen. Ein Spiel allerdings, bei dem der Spielbudenbesitzer auf lange Sicht verliert (also der Kunde auf lange Sicht gewinnt), würde jedoch ohnehin von keinem Spielbudenbesitzer angeboten!

Der Kunde könnte nun über eine leichte Modifizierung des Spiels nachdenken und folgenden Vorschlag machen:

Der Würfelbudenbesitzer wirft weiterhin **sieben** Würfel und zählt sein **zweitbestes Resultat**. Auch der Kunde wirft weiterhin drei Würfel und darf das **beste Resultat** werten. Nur: jetzt soll **nicht** die **Differenz** dieser beiden Werte dem Sieger (jenem mit der höheren Augenzahl) in € bezahlt werden, sondern ein **fixer Betrag (Einsatz)** – unabhängig davon, um wie viel seine Augenzahl höher ist (bei gleicher Augenzahl: Wiederholung)!

Für diese Spielregel sind nun nicht mehr die Erwartungswerte $E[X_2(7)]$ und $E[X_1(3)]$ entscheidend, sondern der Vergleich der beiden Wahrscheinlichkeiten $P[X_2(7) > X_1(3)]$ und $P[X_1(3) > X_2(7)]$ (der Wert von $P[X_2(7) = X_1(3)]$ ist für unsere Betrachtungen eigentlich uninteressant, da das Spiel bei Gleichstand wiederholt werden soll).

Man könnte nun vorschnell (intuitiv) folgender Meinung sein: diese Modifizierung kann nicht all zu viel ändern, denn wenn $X_2(7)$ *im Durchschnitt* (etwas) höher ist als $X_1(3)$, so wird wohl auch die Siegeswahrscheinlichkeit für den Spielbudenbesitzer $P[X_2(7) > X_1(3)]$ (etwas) größer sein als die Siegeswahrscheinlichkeit für den Spieler $P[X_1(3) > X_2(7)]$. Dies entspräche der Haltung: da es in der zweithöchsten von sieben Augenzahlen offenbar „leichter" ist, ein gutes Resultat zu haben, als in der höchsten von drei Augenzahlen (siehe Erwartungswert), so wird wohl $X_2(7)$ *häufiger* größer als $X_1(3)$ sein als umgekehrt und der Spielbudenbesitzer wird auch bei dieser neuen Spielregel einen (leichten) Vorteil haben!

Aber: wenn X und Y zwei Zufallsvariable sind, so gilt **nicht** notwendig:

a) $E[X] > E[Y] \Rightarrow P[X > Y] > P[X < Y]$

b) $E[X] > E[Y] \Leftarrow P[X > Y] > P[X < Y]$.

Anders formuliert: Bei zwei Zufallsvariablen X und Y kann durchaus $E[X] > E[Y]$ sein, obwohl häufiger $X < Y$ als $X > Y$ ist, z. B. bei folgender Situation: Y ist zwar in den meisten Fällen (nur wenig) größer als X, aber wenn in einigen Fällen $X > Y$ ist, dann ist der Unterschied so groß, dass trotzdem der „Durchschnittswert von X" größer als der „Durchschnittswert von Y" ist (d. h. Erwartungswerte, man bedenke die „Empfindlichkeit des arithmetischen Mittels gegenüber Ausreißern").

Mit Hilfe der in (10) definierten Werte für $B_j(i, n)$ (Häufigkeit, in wie vielen der 6^n möglichen Fälle i die j-höchste Augenzahl von n Würfen ist) können wir nun leicht die zugehörigen *Wahrscheinlichkeiten* anschreiben und (mit einem Computer) berechnen:

$$P[X_j(n) = i] = \frac{B_j(i,n)}{6^n}.$$

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeiten $P[X_2(7) > X_1(3)]$ und $P[X_1(3) > X_2(7)]$ berechnen, indem wir gleich allgemeine Überlegungen zu Wahrscheinlichkeiten der Art $P[X_j(n) > X_k(m)]$ anstellen.

Das Ereignis $X_j(n) > X_k(m)$ tritt genau dann ein, wenn $X_k(m) = i$ und $X_j(n) > i$ ist (i = 1, 2, 3, 4, 5). Wegen der Unabhängigkeit dieser beiden Ereignisse erhalten wir $P[X_j(n) > X_k(m)] = \sum_{i=1}^{5} P[X_k(m) = i] \cdot P[X_j(n) > i]$ oder in anderer Schreibweise

$$(15)\quad P[X_j(n) > X_k(m)] = \sum_{i=1}^{5} P[X_k(m) = i] \cdot \underbrace{\sum_{l=i+1}^{6} P[Xj(n) = l]}_{= P[X_j(n) > i]}$$

Für den Vergleich unserer beiden in Rede stehenden Zufallsvariablen $X_2(7)$ und $X_1(3)$ erhalten wir mit (15) und einem Computer

$$P[X_2(7) > X_1(3)] \approx 0{,}339 \quad < \quad 0{,}368 \approx P[X_1(3) > X_2(7)],$$
$$\text{obwohl } E[X_2(7)] \approx 4{,}997 \quad > \quad 4{,}958 \approx E[X_1(3)].$$

D. h. die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, ist hier bei den neuen Spielregeln tatsächlich (etwas) größer als die Wahrscheinlichkeit, dass der Spielbudenbesitzer gewinnt (die Wahrscheinlichkeit für $X_2(7) = X_1(3)$, so dass das Spiel wiederholt werden muss, liegt hier ungefähr bei $1 - 0{,}339 - 0{,}368 = 0{,}293$).

Durch den kleinen Modifikationsvorschlag des Spielers würde der leichte Vorteil für den Spielbudenbesitzer in einen leichten Vorteil für den Spieler umgewandelt werden!

Dieses für viele doch überraschende Ergebnis, dass die Spielregeln nach *Erwartungswert* (ursprüngliche Regel: Differenz der Augenzahlen muss bezahlt werden) und *Wahrscheinlichkeit* (neue Regel: fixer Betrag als Einsatz) den jeweils anderen Spielbeteiligten „bevorzugen" können, tritt nicht nur bei $X_2(7)$ und $X_1(3)$ auf; im Bereich von höchstens zehn Würfeln für jeden Spielbeteiligten gibt es diese Situation noch weitere dreimal:

$$P[X_2(9) > X_1(4)] \approx 0{,}307 \quad < \quad 0{,}324 \approx P[X_1(4) > X_2(9)],$$
$$\text{obwohl } E[X_2(9)] \approx 5{,}294 \quad > \quad 5{,}245 \approx E[X_1(4)];$$

$$P[X_4(9) > X_2(4)] \approx 0{,}368 \quad < \quad 0{,}385 \approx P[X_2(4) > X_4(9)],$$
$$\text{obwohl } E[X_4(9)] \approx 4{,}1002 \quad > \quad 4{,}0995 \approx E[X_2(4)];$$

$$P[X_3(8) > X_2(5)] \approx 0{,}358 \quad < \quad 0{,}373 \approx P[X_2(5) > X_3(8)],$$
$$\text{obwohl } E[X_3(8)] \approx 4{,}502 \quad > \quad 4{,}499 \approx E[X_2(5)].$$

Klarerweise stehen die dazu symmetrischen vier Fälle (Y statt X) in einer analogen Beziehung:

1') $Y_2(7)$ und $Y_1(3)$ 2') $Y_2(9)$ und $Y_1(4)$

3') $Y_4(9)$ und $Y_2(4)$ 4') $Y_3(8)$ und $Y_2(5)$.

Anschrift des Verfassers:

Hans Humenberger, IEEM, FB Mathematik, Universität Dortmund, D-44221 Dortmund

E-Mail: hans.humenberger@math.uni-dortmund.de

Übung zum Erwartungswert

Carsten Rathgeber

1 Prolog

Im Zuge der zunehmenden Verkomplizierung der modernen Technik werden verfeinerte mathematische Modelle und Methoden zur Beschreibung der technischen Gegebenheiten benötigt; eine auch in den Bereichen der Wirtschafts- und Naturwissenschaften erkennbare Entwicklung. Eine besondere Bedeutung gewinnen hierbei Überlegungen aus den Bereichen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Stochastische Überlegungen können beim Lernenden und Anwender zu lebhaften Nachfragen und vielfältigen Irritationen führen. Dies begründet sich u. a. dadurch, dass stochastische Beschreibungen nur zu einem geringen Teil schematisch vorgenommen werden können: die „materialen" Gegebenheiten müssen besonders beachtet werden.

Dies kann dem Schüler an einem einfachen Beispiel zur Ermittlung „des" Erwartungswertes gezeigt werden.