HANS HUMENBERGER

Das Quadrat als optimales Rechteck

Optimieren als fundamentale Idee erfahren

LERNGRUPPE:	7.–10. Schuljahr
IDEE:	Optimierungsaufgaben mit elementaren geometrischen Methoden in der Mittelstufe behandeln
WEITERES MATERIAL:	Weitere Beispiele und Beweise finden Sie unter www.mathematik-lehren.de, Heft 159 auswählen

Das Thema Optimieren ist in der Schule leider meist beschränkt auf die klassischen Extremwertaufgaben in Klasse 11 mit der „*Methode* $f'(x_0) = 0$“. Durch das sehr späte erstmalige Suchen nach Extremstellen bzw. -werten können Schülerinnen und Schüler das Optimieren nicht als eine fundamentale Idee und Leitlinie im Unterricht erfahren. Dabei liegt hier eine didaktische (Motivations-)Chance: Immer wenn die Rede von Superlativen ist, wenn optimale Lösungen oder Situationen gesucht sind, scheint das Interesse der Lernenden verstärkt.

Optimierungsaufgaben können schon mit elementaren Methoden vor der Differenzialrechnung bearbeitet werden. Die im Folgenden vorgestellte elementargeometrische Optimierungsmethode könnte sich wegen ihrer Einfachheit und Universalität wie ein roter Faden durch das SI-Curriculum ziehen. An mehreren Curriculumstellen kann unabhängig voneinander auf diese Methode eingegangen (und diese begründet) werden: Optimieren als eine Leitlinie im Mathematikunterricht (Schupp 1992, Danckwerts/Vogel 2001).

Es soll nicht darum gehen, der Differenzialrechnung bei Extremwertaufgaben „das Wasser abzugraben“, sie ist und bleibt eine wichtige Methode, aber eben nicht die einzige und vor allem nicht die erste.

Zwei wichtige elementargeometrische Erkenntnisse

Unter allen umfanggleichen Rechtecken hat das Quadrat maximalen Flächeninhalt. Unter allen flächengleichen Rechtecken hat das Quadrat minimalen Umfang. Diese beiden Sätze können ohne Rückgriff auf Algebra, sogar ohne die Flächen- bzw. Umfangformeln für Rechteck bzw. Quadrat, thematisiert und begründet werden (s. **Kasten 1**). Sie stellen eine mögliche (geometrische) Grundlage für viele Optimierungsprobleme dar und sind auch für sich genommen sehr bedeutend.

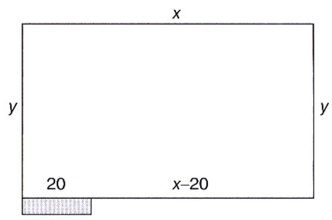
Diese Sätze und Erkenntnisse wären in der rein geometrischen Version schon sehr früh (ab Klasse 5) vermittelbar; aber die algebraische Formulierung und vor allem die weiteren Anwendungen natürlich erst deutlich später (evtl. ab Klasse 8), wenn das funktionale Denken thematisiert wird. Die Schülerinnen und Schüler müssen ja in der Lage sein, eine Größe als abhängig von anderen sehen zu können. Eine Größe verändert sich mit anderen, und es geht um den größten/kleinsten Wert.

Einfache Beispiele für entsprechende Optimierungsaufgaben in Klasse 8 wären die folgenden beiden.

Beispiel 1

An eine 20 m lange Hausmauer soll mit 200 m Zaun ein *möglichst großer* rechteckiger Platz eingezäunt werden.
Wie sind Länge und Breite dafür zu wählen?

Lösungsskizze:

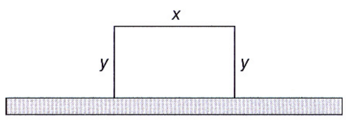


Es gilt: $x + 2y + (x - 20) = 200$;
$y = 110 - x$
Die Fläche $x \cdot y = x(110 - x)$ soll maximal werden unter der Bedingung $x + y = 110$ [konstante Summe].
Dafür muss $x_0 = y_0 = \frac{110}{2} = 55$ gelten.
Der gesuchte Platz ist ein Quadrat mit 55 m Seitenlänge.

Beispiel 2

Mit *möglichst wenig* Zaun soll ein rechteckiger Platz der Fläche $A = 200\,\text{m}^2$ an eine „hinreichend lange“ Gartenmauer (d. h. die Mauerlänge reicht für eine Seite) eingezäunt werden. Wie sind Länge und Breite dafür zu wählen?

Lösungsskizze:



Aus $x \cdot y = 200$ folgt $y = \frac{200}{x}$.
Der Umfang $x + 2y = x + \frac{400}{x}$ soll nun minimal werden, wobei die Summanden das konstante Produkt $x \cdot \frac{400}{x} = 400$ haben.
Daher muss $x_0 = \frac{400}{x_0}$ $(= 2y_0)$ und somit $x_0 = \sqrt{400} = 20$ sein.
Für das Rechteck gilt:
$x_0 = 20\,\text{m}$, $y_0 = 10\,\text{m}$ $(x_0 : y_0 = 2 : 1)$.

Manipulationen an Funktionstermen

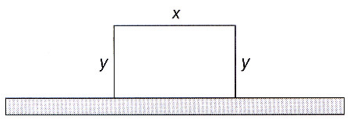
Nun kommt ein sehr wichtiger Schritt, die Loslösung von der reinen Rechteck-Quadrat- bzw. Flächeninhalt-Umfang-Vorstellung, denn es ergibt sich nicht immer so schön eine der beiden Standardsituationen. Viele andere Optimierungsprobleme können gelöst werden, indem sie auf eine der beiden Standardformen „gebracht“ werden:

1. *Maximales Produkt bei konstanter Summe.*
2. *Minimale Summe bei konstantem Produkt.*

In diesem Zusammenhang spricht man von erlaubten Umformungen der zu maximierenden bzw. minimierenden Zielfunktion.

Beispiel 3
An eine „hinreichend lange“ Gartenmauer soll mit 8 m Zaun ein *möglichst großes* rechteckiges Kaninchengehege eingezäunt werden. Wie sind Länge und Breite dafür zu wählen?

Lösungsskizze:



Aus $x + 2y = 8$ folgt $x = 8 - 2y$.
$x \cdot y \rightarrow \text{Max}$
Für x einsetzen liefert
$F(y) = y \cdot (8 - 2y) \rightarrow \text{Max}$
Hier ist leider die Summe der beteiligten zwei Faktoren nicht konstant.

Aber: Statt die Maximalstelle der Funktion $F(y)$ zu suchen, kann man auch die Maximalstelle der Funktion $2F(y)$ suchen: Eine vertikale Streckung des Graphen mit einem positiven Faktor verändert die Stelle des Maximums nicht. Wir dürfen also zum Zweck des Suchens der Maximumstelle mit 2 multiplizieren:
$\overline{F}(y) = (2y) \cdot (8 - 2y) \rightarrow \text{Max}$
Dies ist Standard: $y_0 = 2$ und $x_0 = 4$.

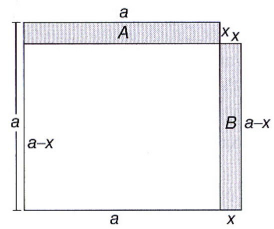
Erlaubte Umformungen bzw. Vereinfachungen von Zielfunktionen
Die Extremstelle einer Funktion ändert sich nicht, wenn man die folgen-

❶ WISSENSWERT

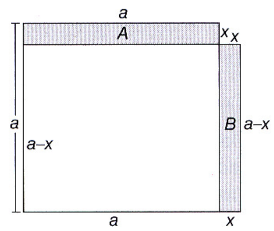
Zwei wichtige elementargeometrische Erkenntnisse

Satz 1: Unter allen **umfanggleichen Rechtecken** hat das **Quadrat maximalen Flächeninhalt**.

Begründung: Ausgehend vom Quadrat zeigen wir: *Jedes andere zu dem Quadrat umfanggleiche Rechteck hat einen kleineren Flächeninhalt.*
Das Quadrat $Q(a)$ wird zu einem umfanggleichen Rechteck verformt, indem eine Seite um x verkürzt und die andere um x verlängert wird.
Wir erhalten das Rechteck $RE(a - x, a + x)$.
Zu zeigen ist: Die Fläche des Rechtecks ist kleiner als die des Quadrats.



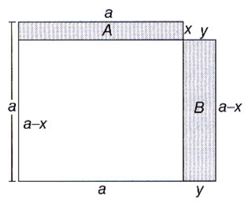
1. Weg: Rein geometrisch (Diese Idee hatte bereits Euklid um ca. 300 v. Chr.)
Beim Übergang von Quadrat zum umfanggleichen Rechteck wird die Fläche A weggenommen und die Fläche B kommt hinzu. A und B sind gleichbreite Streifen mit der Breite x. Aber A hat die volle Länge a, während B die verkürzte Länge $a - x$ hat. Ohne Formeln (z. B. durch gedachtes Übereinanderlegen der beiden Streifen) ist klar: $A > B$. Somit ist flächenmäßig mehr weg- als dazugekommen; der Flächeninhalt wurde insgesamt verkleinert.



2. Weg: Rechnerisch-algebraisch
Die Flächeninhalte von Quadrat und Rechteck werden berechnet und verglichen:
Für $x \neq 0$ ist $(a - x) \cdot (a + x) = \underbrace{a^2 - x^2}_{\text{RE-Inh.}} < \underbrace{a^2}_{\text{QU-Inh.}}$

Satz 2: Unter allen **flächengleichen Rechtecken** hat das **Quadrat minimalen Umfang**.

Begründung: Wir zeigen analog zu Satz 1:
Jedes andere flächengleiche Konkurrenzrechteck hat einen größeren Umfang als das Quadrat.
Ein Quadrat mit Seitenlänge a werde zu einem flächengleichen Rechteck mit den Seitenlängen $a - x$ und $a + y$ verformt. Die Änderungen des Umfangs betragen $-2x$ und $+2y$.
Wir haben also zu zeigen: $-2x + 2y > 0$ bzw. $y > x$.



Der Streifen B ist wegen $a - x < a$ sicher kürzer als A, daher muss B zum Ausgleich (Flächengleichheit) *breiter* sein: $y > x$.

Zwei neue Sätze
Damit haben wir also in rein geometrischem Kontext über variable, nichtnegative Faktoren (Summanden) $x \geq 0$ bzw. $y \geq 0$ bewiesen (x bzw. y entsprechen der Länge bzw. Breite des Rechtecks):

Satz 1: Es sei $x + y = c$ (dem entspricht ein konstanter, halber Rechteckumfang)
Dann gilt: $x \cdot y \rightarrow \text{Max} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \frac{c}{2}$ [Max. Flächeninhalt ⇔ QUADRAT]

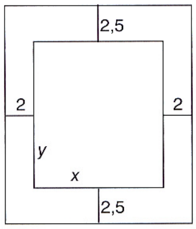
Satz 2: Es sei $x \cdot y = c$ (dem entspricht ein konstanter Rechteckflächeninhalt)
Dann gilt: $x + y \rightarrow \text{Min} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \sqrt{c}$ [Min. (Halb-)Umfang ⇔ QUADRAT]

Aufgaben für die Klasse 9

Buchdruck

Beim Druck eines kleinformatigen Buches soll auf jeder Seite 180 cm² für den Text zur Verfügung stehen. Aus optischen Gründen soll der Abstand des Gedruckten von den Rändern links bzw. rechts jeweils 2 cm und oben bzw. unten jeweils 2,5 cm betragen. Wie ist das Papierformat (Länge, Breite) der Buchseiten zu wählen, damit der Papierverbrauch minimal ist?

Lösungsskizze:



$(x + 4)\cdot(y + 5) \to \text{Min}$

$x\cdot y = 180$, also $y = \frac{180}{x}$.

$(x + 4)\cdot(180/x + 5) = 180 + 20 + 5x + \frac{720}{x} \to \text{Min}$

und nach Subtraktion von 200

$5x + \frac{720}{x} \to \text{Min}$ [konstantes Produkt $5\cdot 720 = 3600$]

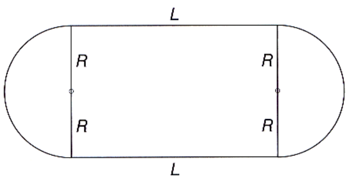
$5x_0 = \frac{720}{x_0} \Rightarrow x_0 = 12 \Rightarrow y_0 = 15$

Optimales Textformat: $x_0 : y_0 = 12 : 15 = 4 : 5$,
wie bei den Rändern: $2 : 2{,}5 = 4 : 5$.
Optimales Buch- bzw. Papierformat (+ 4 cm, + 5 cm): 16 cm × 20 cm, Verhältnis 4 : 5.

Laufbahn-Länge

Die Laufbahn in einem (Leichtathletik-)Stadion soll bekanntlich auf der Innenbahn eine Länge von $U = 400$ m haben. Die Laufbahn-Innenfläche habe die Form eines Rechtecks (Länge L, Breite $2R$: meist als Rasenfläche für andere Disziplinen gestaltet) mit – etwas vereinfacht angenommen – zwei aufgesetzten Halbkreisen (Radius R).
Wie sollen L und R gewählt werden, sodass der rechteckige Teil der Innenfläche möglichst groß wird (wichtig zum Ausnutzen des Platzes für andere Leichtathletikdisziplinen oder als Fußballfeld)?

Lösungsskizze:



Zielfunktion: $L\cdot 2R \to \text{Max} \quad |:2$

$L\cdot R \to \text{Max}$

Skizze: $2\pi R + 2L = 400 \to L = 200 - \pi R$

Dies für L in die Zielfunktion einsetzen:

$(200 - \pi R)\cdot R \to \text{Max}$

[keine konstante Summe]

Es gibt zwei Wege, die Zielfunktion zu verändern:

(1) Multiplikation mit π oder (2) Division durch π

(1) $(200 - \pi R)\cdot(\pi R) \to \text{Max}$ [konst. Summe] $\Rightarrow 200 - \pi R_0 = \pi R_0$

(2) $\left(\frac{200}{\pi} - R\right)\cdot R \to \text{Max}$ [konst. Summe] $\Rightarrow \frac{200}{\pi} - R_0 = R_0$

Wir erhalten $R_0 = \frac{100}{\pi} \approx 31{,}8$ m, $L_0 = 100$ m.

In beiden Fällen ergibt sich:
Die Gerade der 400-m-Rundlaufbahn soll also genau 100 m lang sein – ideal für Sprintwettbewerbe! Das rechteckige Innenfeld hätte die Maße 100 m × 63,66 m – und wäre sehr gut auch als Fußballfeld zu gebrauchen.
Übrigens ist bei dieser Konstellation die 400 m Rundstrecke durch die zwei Längen und die beiden Halbkreisbögen genau geviertelt – je 100 m.

den Manipulationen an der Funktion durchführt:

- Addition einer Konstanten,
- Multiplikation mit positiven Konstanten,
- Potenzieren (Wurzelziehen) bei nichtnegativen Funktionen,
- Logarithmieren,
- Exponieren etc.

All diese Manipulationen sind erlaubt, denn sie „stören die Größenverhältnisse bei den Funktionswerten nicht".

Solche Vereinfachungen der Zielfunktion nimmt man auch bei den Extremwertaufgaben mit Differenzialrechnung vor. Zu ihrer Begründung bedarf es ihrer aber nicht; eine geeignete Sichtweise von Funktionen und ihre Graphen genügt.

Geometrisch-arithmetische Mittelungleichung

Satz 1 und Satz 2 sind äquivalent zur geometrisch-arithmetischen Mittelungleichung für $x, y \geq 0$:

$$\sqrt{x\cdot y} \leq \frac{x + y}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\cdot y \leq \frac{x + y}{2}\cdot\frac{x + y}{2}$$

(Gleichheit nur für $x = y$).

Deshalb steht oft auch diese Mittelungleichung im Vordergrund. Aber die Version mit der konstanten Summe bzw. mit dem konstanten Produkt scheint mir anschaulicher und für den Unterricht besser geeignet zu sein, vgl. auch die Beispiele in **Kasten 2**.

Verallgemeinerung auf mehrere Variablen

Zu Satz 1 ($x + y = c$, $xy \to \text{Max}$) ist auch folgende Sichtweise möglich: Bei der Suche nach dem Maximum von $cx - x^2$ sucht man eigentlich einen Parabelscheitel. Daher wäre auch durch die Scheitelformel (Klasse 9, Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat) die Differenzialrechnung vermeidbar. Damit wird ebenfalls ein früher Einsatz von diesbezüglichen Optimierungsaufgaben möglich. So manches Schulbuch (Klasse 9) nimmt diese Möglichkeit auch wahr und man sollte sie nutzen (entgegen dem Hintergedanken: „Das kommt ja ohnehin später bei der Differenzialrechnung").

Die Sichtweise von Satz 1 und Satz 2 hat einen entscheidenden Vorteil gegenüber der Parabel- und Scheitelformel-Sichtweise: Bei Funktionen höheren Grades gibt es keine so einfachen Scheitelformeln für Maxima bzw. Minima, aber die Sichtweise von Satz 1 und Satz 2 ist verallgemeinerbar und funktioniert auch bei vielen Funktionen höheren Grades (auch nicht bei allen; aber für den allgemeinen Fall gibt es dann ja Differenzialrechnung).

Satz 1 (allgemein)
$x_1 + \ldots + x_n = c$ [konstant]
(x_i, $c \geq 0$):
$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \to \text{Max} \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = \frac{c}{n}$

Zum Beweis brauchen wir:
$\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} > x_1 \cdot x_2$ für $x_1 \neq x_2$.
Dies ist klar nach Satz 1: Links und rechts stehen Produkte mit derselben Summe $x_1 + x_2$; links sind die Faktoren aber einander gleich und rechts nicht, also ist nach Satz 1 das linke Produkt größer als das rechte.

Der folgende Beweis ist deswegen so kurz, weil er die Existenz des Maximums voraussetzt. Es gibt zwar auch gar nicht allzu lange Beweise, die dies nicht tun, aber in der Schule kann man sich mit diesem kurzen durchaus begnügen, wenn man diese Lücke auch thematisiert. Wir zeigen: Wenn in einer gewissen Konstellation der x_i noch irgendwo eine Ungleichheit auftritt, so lässt sich der Produktwert (bei gleicher Summe) noch vergrößern. Somit kommt nur noch die Konstellation $x_1 = \ldots = x_n = \frac{c}{n}$ für das Produktmaximum in Frage. Wenn die Existenz des Maximums vorausgesetzt wird, ist damit alles gezeigt.

Beweis von Satz 1 (allgemein)
Annahme: Es gibt zwei verschiedene Werte, o. B. d. A. $x_1 \neq x_2$. Wir nehmen dann statt x_1 bzw. x_2 jeweils $\frac{x_1 + x_2}{2}$.
Dann bleibt der Summenwert c unverändert

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3 + \ldots + x_n = c$$

aber der Produktwert wird größer

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$$
$$> (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

weil laut oben $\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} > x_1 \cdot x_2$ für $x_1 \neq x_2$ ist.
Ganz analog gilt auch:

Satz 2 (allgemein)
$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = c$ [konstant] (x_i, $c \geq 0$):
$x_1 + \ldots + x_n \to \text{Min}$
$\Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{c}$

Weiterführung der Lösungsmethode

Mittels der oben erwähnten erlaubten Umformungen von Zielfunktionen gelingt es in vielen Fällen, eine Zielfunktion zu gewinnen, die

- ein Produkt aus Faktoren mit konstanter Summe
- eine Summe von Summanden mit konstantem Produkt

ist: und genau dafür gelten ja die allgemeinen Sätze. Dieses Vorgehen ermöglicht nicht nur das frühere Behandeln von Extremwertaufgaben, sie fördert und fordert auch wichtige algebraische Fähigkeiten:

- Erkennen von Termstrukturen (Produkt, Summe)
- Verständiges Umgehen mit Termen (algebraisches Hantieren): Ein Produkt wird multipliziert mit einer Zahl, indem ein Faktor multipliziert wird; eine Summe wird multipliziert mit einer Zahl, indem jeder Summand multipliziert wird; etc.
- Verbindungen erkennen zwischen Term und Funktionsgraph: Verschieben, Strecken etc.

Zunächst die ehrliche Botschaft: Die Lösung mithilfe Satz 1/Satz 2 funktioniert nicht immer, aber das muss sie auch gar nicht. Es ist nicht das Ansinnen dieses Beitrages, das gesamte Kapitel Extremwertaufgaben von Klasse 11 vorzuziehen, er sollte nur als Anregung verstanden werden, schon früher mit Optimierungsaufgaben im Curriculum zu beginnen, es bleiben der Methode mit Differenzialrechnung noch genügend Aufgaben übrig.

Beispiel 4
$2x^2 + \frac{1}{x^3} + x \to \text{Min}$ ($x > 0$)
Das konstante Produkt der Summanden ist 2.
Aus $2x_0^2 = x_0$ folgt $x_0 = \frac{1}{2}$,
aus $\frac{1}{x_0^3} = x_0$ folgt $x_0 = 1$,
d. h. $2x_0^2 = \frac{1}{x_0^3} = x_0$ ist NICHT möglich.

Unsere Methode ist hier also nicht anwendbar, in solchen Fällen verwendet man besser die Differenzialrechnung. Eine geschlossene Lösung ist oft auch damit nicht möglich, wie bei Beispiel 4: Die Nullstellen der 1. Ableitung

$f'(x) = 4x - \frac{3}{x^4} + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 4x^5 + x^4 - 3 = 0$

kann man nur näherungsweise finden.

Aber: Durch geeignete (erlaubte) Manipulationen am Funktionsterm könnten – einer vorsichtigen Schätzung nach – mindestens drei Viertel der Extremwertaufgaben behandelt werden, die sonst im Rahmen der Differenzialrechnung behandelt werden. Dies zeigen auch die folgenden Beispiele.

Beispiel 5
$x^2 + \frac{B}{x} \to \text{Min}$ (B, $x > 0$)
Hier ist das eine x im Nenner „zu schwach", um es multiplikativ mit x^2 aufzunehmen, deshalb schreiben wir $\frac{B}{x}$ mit seiner eigenen Hälfte zweimal an: $x^2 + \frac{B}{2x} + \frac{B}{2x} \to \text{Min}$.
Nun fällt x beim Produkt der drei Terme heraus, das konstante Produkt ist $\frac{B^2}{4}$.
Das Minimum liegt bei
$x_0^2 = \frac{B}{2x_0}$ bzw. $x_0 = \sqrt[3]{\frac{B}{2}}$.

Beispiel 6 (Anwendung)
Wie sind R und h bei einem Drehzylinder zu wählen, sodass bei vorgegebenem Volumen V die Oberfläche minimal ist?
Lösungsskizze:
$O = 2R\pi(R + h) \to \text{Min}$
Dividieren durch 2π ändert die Minimalstelle nicht:
$R^2 + Rh \to \text{Min}$
$V = R^2\pi h \Rightarrow h = \frac{V}{R^2\pi}$
$R^2 + \frac{V}{R\pi} \to \text{Min}$

$R^2 + \frac{V}{2R\pi} + \frac{V}{2R\pi} \to \text{Min}$

Das Produkt der Summanden ist konstant $\left(\frac{V^2}{4\pi^2}\right)$. Das Minimum liegt bei
$R_0^2 = \frac{V}{2R_0\pi}$ bzw. $R_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.
Einsetzen liefert

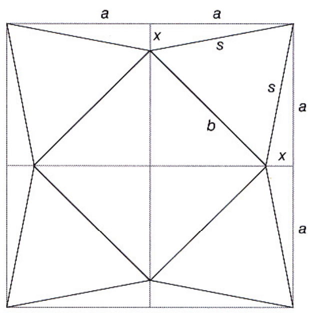
$h_0 = 2R_0$ [gleichseitiger Zylinder].

Diese Aufgabe wird oft auch in einem außermathematischen Kontext gestellt:

Weitere Aufgaben

Pyramidenschachtel

Aus einem quadratischen Stück Karton von Seitenlänge $2a$ sollen vier kongruente gleichschenklige Dreiecke (mit Höhe x und Basis $2a$) weggeschnitten werden, so dass das Netz einer quadratischen Pyramide (Grundkantenlänge b, Höhe h) mit maximalem Volumen entsteht.



Lösungsskizze

$V = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h \rightarrow \text{Max}$

$b^2 = 2(a - x)^2$

$s^2 = a^2 + x^2$

$h = \sqrt{s^2 - (a - x)^2} = \sqrt{2ax}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 2(a - x)^2 \sqrt{2ax} \rightarrow \text{Max} \mid :\frac{2}{3}, \mid^2$

$(a - x)^4 \cdot (2ax) \rightarrow \text{Max} \qquad \mid :2a$

$(x) \cdot (a - x) \cdot (a - x) \cdot (a - x) \cdot (a - x) \rightarrow \text{Max} \mid \cdot 4$

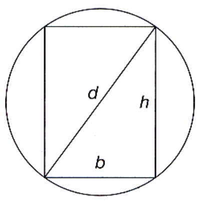
$(4x) \cdot (a - x) \cdot (a - x) \cdot (a - x) \cdot (a - x) \rightarrow \text{Max}$

[nun konstante Summe]

$4x_0 = a - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{a}{5}$

Tragkraft eines Baumstammes

Aus einem runden Baumstamm mit Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt (b; h) und maximaler Tragkraft T geschnitten werden. Wie sind b und h dafür zu wählen?



Lösungsskizze:

T ist direkt proportional zur Breite b und zu h^2: $T = k \cdot b \cdot h^2$

$T = k \cdot b \cdot h^2 \rightarrow \text{Max} \mid : k \qquad h^2 = d^2 - b^2$

$b \cdot (d^2 - b^2) \rightarrow \text{Max} \qquad \mid^2$

$b^2 \cdot (d^2 - b^2) \cdot (d^2 - b^2) \rightarrow \text{Max} \qquad \mid \cdot 2$

$(2b^2) \cdot (d^2 - b^2) \cdot (d^2 - b^2) \rightarrow \text{Max}$

[nun konstante Summe]

$2b_0^2 = d^2 - b_0^2 \quad \Rightarrow b_0 = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot d, h_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d$

Das optimale Seitenverhältnis ist $1 : \sqrt{2}$ – wie beim DIN-A-Format.

Übrigens:

Eine alte Zimmermannregel für dieses Problem sagt: AC sei ein beliebiger Durchmesser; teile diesen in 3 gleichlange Teile und errichte in den beiden Teilungspunkten eine Senkrechte (nicht beide auf dieselbe Seite); die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit dem Querschnittkreis ergeben die Punkte B und D des optimalen Rechtecks $ABCD$ (rechts in der Lösungsskizze). Diese Zimmermannregel ist sogar exakt!

Gesucht ist eine materialminimale Konservendose. Bei wirklichem Realitätsbezug müssten allerdings auch die Falze berücksichtigt werden.

Beispiel 7

Auch wenn x^2 im Nenner ist, funktioniert die Methode:

$x + \frac{B}{x^2} \rightarrow \text{Min } (B, x > 0)$

$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{B}{x^2} \rightarrow \text{Min}$

Das konstante Produkt ist $\frac{B}{4}$.

Das Minimum liegt bei

$\frac{x_0}{2} = \frac{B}{x_0^2}$ bzw. $x_0 = \sqrt[3]{2B}$.

Verallgemeinerung

Wie man sich leicht überzeugt, funktioniert die hier angewandte Methode auch viel allgemeiner bei Aufgaben wie

$Ax^m + \frac{B}{x^n} \rightarrow \text{Min}$,

$x^m(A - x) \rightarrow \text{Max}$, $x(A - x)^l \rightarrow \text{Max}$,

$x(A - x^n) \rightarrow \text{Max}$, $x^m(A - x)^l \rightarrow \text{Max}$,

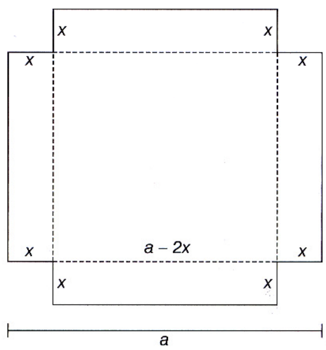
$x^m(A - x^n)^l \rightarrow \text{Max}$, etc.

Wie mögliche Aufgaben dazu aussehen können, zeigen die Beispiele in **Kasten 3** sowie der folgende Aufgabenklassiker, der oft als Einstieg für Extremwertaufgaben mit Differenzialrechnung genommen wird.

Beispiel 8

Wie viel muss man von einem quadratischen Stück Karton der Seitenlänge a an den Ecken wegschneiden (x), damit man das Netz einer volumenmaximalen oben offenen Schachtel erhält $\left(x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]\right)$?

Lösungsskizze:



$V = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot x \rightarrow \text{Max} \qquad \mid \cdot 4$

$\overline{V} = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot (4x) \rightarrow \text{Max}$

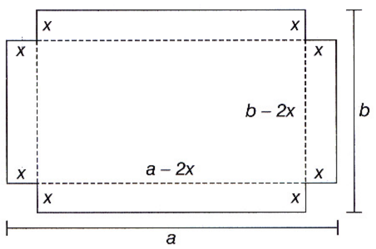
[konstante Summe $2a$]

$a - 2x_0 = 4x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{a}{6}$.

Beispiel 9

Aus einem Rechteck mit den Seitenlängen $a \neq b$ soll durch Ausschneiden von Quadraten (x) an den Ecken das Netz einer volumengrößten oben offenen Schachtel entstehen.

Lösungsskizze:



$V = (a - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x \to \text{Max} \quad | \cdot 4$

$\overline{V} = (a - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot (4x) \to \text{Max}$

[konstante Summe $a + b$]

$a - 2x_0 = b - 2x_0$ unmöglich für $a \neq b$.

Hier wendet man also besser die Differenzialrechnung an!

Mehrere Variablen in der Zielfunktion

Bei der „*Methode* $f'(x_0) = 0$" für Extremwertaufgaben ist man auf hinreichend viele Nebenbedingungen angewiesen, damit die Zielfunktion schlussendlich nur mehr eine Variable enthält (weil Differenzialrechnung in mehreren Variablen nicht Schulstoff ist).

Wendet man die Sätze über die Konstanz der Summe bzw. des Produktes an, ist die Angabe hinreichend vieler Nebenbedingungen und dadurch die Rückführung der Zielfunktion auf eine Variable nicht immer nötig. Dass es sich hier um Funktionen in mehreren Variablen handelt, fällt dabei sozusagen gar nicht auf. Wenn hinreichend viele Nebenbedingungen angegeben sind, kann man die Zielfunktion auf eine Variable reduzieren, muss es aber nicht. Dazu zunächst zwei kurze Beispiele in Stichworten zur Verdeutlichung; bei diesen sind keine einschränkenden Nebenbedingungen angegeben, sodass hier eine Reduktion auf eine Variable gar nicht möglich wäre. Mit Differenzialrechnung in einer Variable wäre hier also nichts zu machen, mit dieser Methode jedoch sehr wohl (und sogar sehr einfach):

Beispiel 10

Gesucht ist das flächengrößte Dreieck bei festem Umfang $2s$.

Lösungsskizze:

$a + b + c = 2s$

$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \to \text{Max}$

Quadrieren und durch s teilen liefert:

$(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \to \text{Max}.$

Die Summe ist konstant

$[3s - (a + b + c) = s]$.

Aus $s - a_0 = s - b_0 = s - c_0$ folgt

$a_0 = b_0 = c_0 \left(= \frac{2s}{3}\right)$.

Das gleichseitige Dreieck hat somit bei festem Umfang die größte Fläche.

Beispiel 11

Gesucht ist der volumengrößte Quader bei fester Kantenlängensumme $4s$.

Lösungsskizze:

$l + b + h = s$

$V = l \cdot b \cdot h \to \text{Max}$

Die Summe ist konstant s.

$l_0 = b_0 = h_0 \left(= \frac{s}{3}\right)$.

Der volumengrößte Quader ist der Würfel.

Analog dazu können weitere Fragen behandelt werden:

- Gesucht ist der Quader mit minimaler Kantenlängensumme bei festem Volumen V. [Lösung: Würfel]
- Gesucht ist der Quader mit minimaler Oberfläche bei festem Volumen V. [Lösung: Würfel]
- Dazu dual: Gesucht ist der volumengrößte Quader bei fester Oberfläche $2F$. [Lösung: Würfel]
- Gesucht ist ein materialminimaler Kanister (oben offener Quader) bei festem Volumen V. [Lösung: halber Würfel]
- Dazu dual: Gesucht ist ein volumenmaximaler Kanister (oben offener Quader) bei fester Oberfläche F. [Lösung: halber Würfel]

Realitätsbezogene Aufgaben

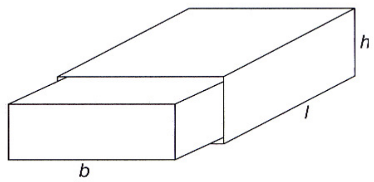
Die folgenden Beispiele stammen aus (Böer 1998) und zeigen, wie die Methode auch bei realitätsbezogenen Problemen angewandt werden kann.

Beispiel 12

Streichholzschachteln sind industriell hergestellte Massenware. Streichhölzer sollen 4,5 cm lang sein (Handlichkeit) und die Schachtel 0,5 cm länger. Damit 40 Hölzer Platz haben, muss das Schachtelvolumen rund 17,5 cm³ betragen. Welche Maße hat die materialminimale Streichholzschachtel?

Lösungsskizze:

Folgende Vereinfachungen werden vorgenommen: Innenteil und Hülle sollen dieselben Maße haben, Seiten- und Kantenverstärkungen sollen nicht beachtet werden.



$l = 5\,\text{cm},\ V = l \cdot b \cdot h$

$5 \cdot b \cdot h = 17{,}5 \Rightarrow h = \frac{17{,}5}{5b}$

$O = 2 \cdot bh + 3 \cdot lb + 4 \cdot lh \to \text{Min}$

$O(b) = \frac{70}{b} + 15b + 7 \to \text{Min}$

$\frac{70}{b} + 15b \to \text{Min}$ [konst. Produkt]

$\frac{70}{b_0} = 15b_0$

$b_0 \approx 2{,}2\,\text{cm},\ h_0 \approx 1{,}6\,\text{cm},\ O_{\text{min}} \approx 72\,\text{cm}^2$

Vergleich mit der Realität: Die Messungen von Heinz Böer ergaben für die Innenmaße der Schachtel

$l_R \approx 5\,\text{cm},\ b_R \approx 3{,}5\,\text{cm}$ und $h_R \approx 1\,\text{cm}$.

Damit ist $O_R \approx 80\,\text{cm}^2$.

Welche Gründe sind für die Abweichungen der realen Maße von jenen der obigen oberflächenminimalen Schachtel denkbar?

Durch die Vorgabe $l = 5\,\text{cm}$ wird das Problem auf eine Variable reduziert, was bei Behandlung mit Differenzialrechnung auch sein muss. Sie ist aus praktischen Gründen auch sinnvoll, aber der Verzicht auf diese Vorgabe stellt ein interessantes mathematisches Problem dar. Bei unserer Methode ist diese Vorgabe aber nicht zwingend nötig, wir können auch ohne sie die oberflächenminimale Streichholzschachtelform mit $V = 17; 5\,\text{cm}^3$ finden:

$O = 2bh + 3lb + 4lh \to \text{Min}$

konstantes Produkt:

$(2bh) \cdot (3lb) \cdot (4lh) = 24(lbh)^2$

$= 24 \cdot 17{,}5^2 = 7350$

Daraus folgt:
$2b_0h_0 = 3l_0b_0 = 4l_0h_0 \left(= \sqrt[3]{7350}\right)$
$l_0 \approx 1{,}8\,\text{cm}$, $b_0 \approx 3{,}6\,\text{cm}$, $h_0 \approx 2{,}7\,\text{cm}$.
Obwohl die Materialersparnis ($O_0 \approx 58\,\text{cm}^2$) doch beträchtlich wäre, hätte diese Schachtel doch entscheidende Nachteile. Welche?

Beispiel 13
Bei der Deutschen Post AG gab es Päckchen und sogenannte *sperrige Postpakete*. Die Höchstmaße für sperrige Postpakete waren: Länge 200 cm; Länge plus größter nicht in Längsrichtung gemessenem Umfang zusammen maximal 450 cm.
Lösungsskizze:
Wenn man auf eine Variable reduzieren muss, so kann man sich schrittweise an die Lösung herantasten: Wähle die Länge maximal ($l = 200$) und bestimme die Abmessungen des volumenmaximalen sperrigen Postpaketes in Quaderform (Ergebnis: $h = b$). Dann wählt man (angeleitet durch den vorherigen Schritt) $h = b$ und optimiert erneut. Als Ergebnis erhält man $l_0 = 150\,\text{cm}$, $b_0 = h_0 = 75\,\text{cm}$ und $V_0 \approx 844\,\text{dm}^3$.

Die erhaltene Lösung ist zwar das Maximum aller quaderförmigen sperrigen Postpakete, aber die zugehörige Begründung fehlt, es können Zweifel bleiben: Könnte man ohne solche zusätzliche Annahmen wie die hier getroffenen vielleicht ein noch größeres Volumen erreichen?

Mit unserer Methode braucht man gar keine Zusatzbedingungen und man bekommt leicht das Maximum aller quaderförmigen sperrigen Postpakete (dies entspricht der obigen Lösung):
$l + 2b + 2h = 450$
$V = l \cdot b \cdot h \rightarrow \text{Max} \qquad | \cdot 4$
$l \cdot (2b) \cdot (2h) \rightarrow \text{Max}$ [konst. Summe]
$l_0 = 2b_0 = 2h_0 = \frac{450}{3} = 150.$
Daraus folgt:
$b_0 = 75\,\text{cm} = h_0$, $l_0 = 150\,\text{cm}$,
$V_0 = 844\,\text{dm}^3$

Zusammenfassung

Die Differenzialrechnung sollte nicht das Lösungsmonopol für Optimierungsaufgaben von uns Lehrkräften verliehen bekommen, wie die hier vorgestellten Beispiele anschaulich und überzeugend zeigen sollten. Im Folgenden noch einmal kurz zusammengefasst die Gründe für diesen Standpunkt:

1. Optimieren kann bei Beschränkung auf die „Methode $f'(x_0) = 0$" nicht die ihm zustehende Stellung einer *Leitlinie* im Mathematikunterricht bzw. einer *fundamentalen Idee* der Mathematik einnehmen, weil Differenzialrechnung erst ab Klasse 11 zur Verfügung steht. Die „Methode $f'(x_0) = 0$" kann dann auch nicht als Krönung für prinzipiell bereits bekannte Aufgabentypen gesehen werden (Spiralprinzip), sondern ist eine isolierte Einzelmethode. Viele Aufgaben passen (subjektives Argument) einfach besser zu anderen Bereichen als zur Differenzialrechnung, ihre „mathematische Heimat" liegt woanders. (Zum Beispiel gehört das *isoperimetrische Problem für Rechtecke* eher in die Elementargeometrie als in die Differenzialrechnung – vgl. die Begründungen von Satz 1 und 2 in **Kasten 1** ohne Formeln).

2. Meistens stecken die *Schülerschwierigkeiten* bei Extremwertaufgaben *nicht* beim Ableiten der Zielfunktion, sondern beim Finden eines Modells bzw. einer geeigneten Zielfunktion (Nebenbedingungen, Reduzieren auf eine Variable): Die dazu meist benötigten Themen (Strahlensatz, Ähnlichkeit, Satzgruppe von Pythagoras, Winkelfunktionen etc.) liegen gegen Ende der Differenzialrechnung zeitlich doch schon relativ weit zurück. Diese Schwierigkeiten könnten durch früheres und immer wieder kehrendes Optimieren sicher reduziert werden.

3. Durch die sehr späte Einsatzmöglichkeit der Differenzialrechnung wird jahrelang vorhandenes Motivationspotenzial, das dem Optimieren bzw. Superlativen auf natürliche Weise innewohnt, nicht genutzt.

4. Der eigentlich hinter der „Methode $f'(x_0) = 0$" steckende mathematische Kern ist (zugegebenermaßen) für die Schüler kein wirklich einfacher. So kommt es nicht selten vor, dass die Lösung ausschließlich algorithmisch (rezeptartig) abläuft und die dahinter steckenden Begründungsaspekte von vielen Schülern wenig oder gar nicht verinnerlicht werden. Wie viele Schüler haben ein echtes Verständnis (angemessene Vorstellungen) der zugrunde liegenden Prinzipien? Wie viele könnten diese auch angemessen beschreiben oder gar begründen? Sollte diese (vielfach gar nicht so bis ins Letzte durchschaute) Methode alles sein, was wir den Schülern in Sachen Extremwerte, Optimieren mitgeben?

5. Die hier beschriebene Methode ist oft sogar mächtiger als Differenzialrechnung (in einer Variable), weil sie nicht notwendig die Reduktion auf eine Variable in der Zielfunktion voraussetzt. Sie bereitet dadurch (ganz nebenbei) den Boden für Funktionen in mehreren Variablen, was besonders im Hinblick auf funktionales Denken an Bedeutung gewinnt.

Literatur

Böer, H.: Realistische Extremwertprobleme. – In: *mathematik lehren* Heft 89, Friedrich Verlag, Velber 1998, S. 58–61.
Danckwerts, R./D. Vogel (Hrsg.): Der Themenkreis Extremwertprobleme – Wege der Öffnung. – Themenheft *Der Mathematikunterricht*, Heft 47 4.2001, Friedrich Verlag, Velber 2001.
Schupp, H.: Optimieren: Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. Bibliographisches Institut, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich 1992.
Schupp, H. (Hrsg.): Optimieren. – Themenheft *mathematik lehren Heft 81*, Friedrich Verlag, Velber 1997.