Hans Humenberger

# „Modellbilden“ und „Optimieren“ bei einer Aufgabe über einen Strohhalm in einer Tasse

In diesem Aufsatz wird eine Aufgabe vorgestellt und ausführlich durchgearbeitet, die uns durchaus geeignet erscheint, einer *Anwendungsorientierung* des Mathematikunterrichts zuträglich zu sein. Wir behaupten nicht, daß das Beispiel enorme praktische Relevanz hätte, daß also diese Fragestellung im Alltag, im Berufsleben (in der sogenannten *Realität*) oft auftreten würde oder in irgendeiner Weise besonders wichtig wäre, aber man kann u. E. gut sehen bzw. erleben (und zwar durch großteils *selbständige* Arbeit), wie man Mathematik anwenden kann, wie die Mathematik bei der Lösung eines Problems helfen kann. Insbesondere der erste Fall, bei dem der Strohhalm wirklich aus der Tasse herausragen muß ($L > 2R$), scheint uns auch für den Pflichtunterricht bzw. für „Grundkurse“ geeignet zu sein.

## 1. Einleitung

„Wozu lernen bzw. lehren wir Mathematik?“ – eine provokante Eingangsfrage! Wir muten uns nicht zu, darüber eine Abhandlung zu schreiben bzw. überhaupt schreiben zu können und diese Frage dadurch in irgendeiner Weise allgemein zu beantworten. Ein Extremstandpunkt meint, die Mathematik sei die „Königin der Wissenschaften“, ihre Stellung als Unterrichtsfach und ihr allgemeiner Bildungswert bedürfe *an sich* keiner Begründung durch irgendwelche „Brauchbarkeitsargumente“ o. ä.; das andere Extrem wäre, der Mathematik ausschließlich aufgrund ihrer Nützlichkeit bzw. Anwendbarkeit ein Existenzrecht im Unterrichtskanon zu verleihen. Wir vertreten hier einen relativ ausgewogenen Standpunkt und daher – um es gleich vorwegzunehmen – eine *gemäßigte Anwendungsorientierung* im Unterricht, wobei wir eben der Mathematik selbst (als formaler Wissenschaft) und ihrer Nützlichkeit annähernd gleiche Bedeutung beimessen[1]. Diese Gleichberechtigung scheint uns jedoch im Unterricht i. a. (noch) nicht verwirklicht zu sein (die *formale* Wissenschaft Mathematik steht dabei fast durchwegs eklatant im Vordergrund – zumindest was den durchschnittlichen österreichischen und nach Kaiser-Messmer/Blum [3] aber auch den durchschnittlichen deutschen Mathematikunterricht betrifft), wodurch wir uns aufgerufen fühlen, einer gemäßigten Anwendungsorientierung des Unterrichts das Wort zu reden (vgl. auch die Bemerkung auf Seite 153).

Wir sind jedoch weit davon entfernt, zu behaupten, daß in der Anwendungsorientierung das allein selig machende Unterrichtsprinzip liege, daß sie den Unterricht von allen seinen Schwierigkeiten und Problemen befreien würde und die Schüler allein dadurch – und zwar mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit – befähigt würden, das Gelernte auch später noch selbständig anzuwenden. Wir meinen aber, daß ein wenig mehr an Anwendungsorientierung dem durchschnittlichen Unterricht sicher positive Impulse gäbe, und dadurch nicht zuletzt die allgemeine Motivation der Schüler im Fach Mathematik eine gewisse – u. E. nötige – Steigerung bekommen könnte.

1 Natürlich wird es im Unterricht Phasen geben, bei denen einmal dieser und einmal jener Aspekt im Vordergrund steht. Der Begriff „ausgewogener Standpunkt“ soll sich nur auf längere Zeiträume bzw. auf das „durchschnittliche Unterrichtsprinzip“ beziehen.

Für die konkrete Umsetzung eines anwendungsorientierten Unterrichts bedarf es selbstverständlich gewisser Leitlinien, sogenannter *Fundamentaler Ideen*, anhand derer der Unterricht dem *Spiralprinzip* folgend strukturiert werden könnte (vgl. Humenberger/Reichel [2]). Zwei Vertreter dieser Fundamentalen Ideen der Angewandten Mathematik sind z. B. *Optimierung* und *Modellbilden*, um die bzw. um deren mögliche Verbindung es im folgenden gehen soll.

Ebenhöh [1, S. 6] zeichnet z. B. sein sehr positives Bild von *Modellen*, wenn er schreibt: „Um etwas zu verstehen, machen wir uns ein Bild von diesem Etwas im Rahmen unserer bisherigen Erfahrungen. Dieses Bild ist ein Modell. Das zu verstehende Etwas ist als Teil der uns umgebenden Welt unendlich kompliziert, und es ist gerade die *Tugend* des Modells, ein *vereinfachtes* Bild von diesem Etwas zu erzeugen. Weit verbreitet, besonders bei Biologen, ist die Ansicht, daß jedes Modell die *Schwäche* hat, ein System nicht perfekt zu reproduzieren. Ganz im Gegenteil! Es ist die Stärke der Modelle, die unendlich komplizierte Wirklichkeit auf den Komplexitätsgrad zu reduzieren, der entsprechend unseres augenblicklichen Wissensstandes gerade noch beherrschbar ist. Und so spiegelt eine Erweiterung unseres Modells auch eine Erweiterung unseres Wissensstandes wider." Wir glauben auch, daß im Vereinfachen keine prinzipielle Schwäche liegt, sondern daß dadurch vieles erst möglich wird – dies soll jedoch keinesfalls als Freibrief für *beliebige* Vereinfachungen, Trivialisierungen und Schlampereien aufgefaßt werden. Der Unterricht allgemein und speziell der Unterricht in (mit) Modellbildungsprozessen ist u. E. aber ein Bereich, der kontrollierte Vereinfachungen nötig hat und eigentlich sogar davon lebt!

## 2. Ein Strohhalm in einer Tasse

Anhand des folgenden Beispiels kann die gleichzeitige Beachtung bzw. Repräsentation zweier *Fundamentaler Ideen der Angewandten Mathematik*, nämlich *Modellbildung* und *Optimieren* deutlich gemacht werden. Wir meinen, daß dies sogar in einer sehr klaren und elementaren Weise möglich ist, worin u. E. eine besondere Stärke dieses Beispiels liegt.

*Beispiel 2.1:* Aus einer halbkugelförmigen Tasse ragt ein Strohhalm heraus. Die Tasse habe den Radius R und der Strohhalm habe die Länge L, wobei (zunächst) angenommen werden soll, daß $L > 2R$ gilt (siehe Fig. 1).

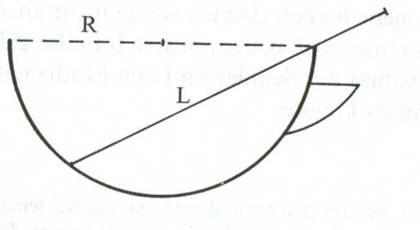



Fig. 1 Strohhalm in der Tasse – erste Skizze



1. Was ist durch die Bedingung $L > 2R$ garantiert?
2. Was kann über den Winkel $\varphi$ ausgesagt werden, den der Halm in seinem *Gleichgewichtszustand*[1] mit der Ebene des „Basiskreises"[2] der Halbkugel (Tasse) einschließt?
3. Ist so eine Gleichgewichtslage für alle $L > 2R$ möglich?

In dieser Form handelt es sich u. E. um eine noch nicht so klar vorstrukturierte Aufgabe, die zunächst zum Anfertigen einer Skizze – wahrscheinlich von der Art von Figur 1 –, zum Überlegen, zum Analysieren, zum Aufstellen von Vermutungen, zum Entdecken bzw. zum „Forschen im kleinen" einlädt. Es ist zwar schon an dieser Stelle deutlich, daß *Modellbilden* hier eine Rolle spielen wird (erste Schritte sind ja bereits die idealisierten Darstellungen des Strohhalmes als Strecke und der Tasse als Halbkugel bzw. Halbkreis), daß aber diese Aufgabe etwas mit *Optimieren* zu tun hat, ist den Schülern zu diesem Zeitpunkt i. a. wahrscheinlich nocht nicht klar.

Bei der ersten Fragestellung sollte es für die Schüler keiner besonderen Anstrengung bedürfen, zu erkennen, daß durch die Bedingung $L > 2R$ das *Herausragen* des Strohhalmes garantiert wird, daß es also nicht möglich ist, daß der Strohhalm ganz in der Tasse verschwindet bzw. eintaucht.

Nun gleich zur dritten Frage, ob die beschriebene Situation (Gleichgewichtslage) wirklich für alle L mit $L > 2R$ möglich ist? Für einige Schüler ist hier vielleicht die Erfahrung trügerisch, daß Strohhalme in *Gläsern* – und dort finden sie ja im Gegensatz zu Tassen meist Verwendung –, auch wenn sie ziemlich lang sind, stabil lehnen können. Bei einer halbkugelförmigen Tasse gibt es aber keine „Kante" am Tassenboden, die auch einem sehr langen Strohhalm Halt verleihen würde, sondern allenfalls nur einen geringen Reibungswiderstand, den wir in unserem idealisierenden *Modell* der Situation jedoch vernachlässigen wollen.

Wenn man hier erkennt, daß der Tassenrand der einzige Auflagepunkt ist und daß der längere Teil des Strohhalmes sich im Inneren der Tasse befinden muß (wenn er stabil lehnen soll), dann ist der Schritt zur Erkenntnis nicht mehr weit, daß die Länge L des Halmes höchstens der doppelte Tassendurchmesser (4R) sein darf, weil mehr als 2R der Strohhalmlänge in der Tasse ja nicht Platz hat und der Strohhalm daher bei $L > 4R$ nach außen überkippen würde: Der Teil des Strohhalmes außerhalb des Auflagepunktes (Tassenrand) wäre länger als der Teil innerhalb und daher läge der Schwerpunkt *außerhalb* der Tasse! Als Beziehung zwischen R und L ergibt sich daher insgesamt

$$2R < L \leqq 4R .$$

*Bemerkung:* Einige Lehrer bzw. Didaktiker werden dieser Aufgabe aus Gründen, daß es z. B. in der Realität kaum halbkugelförmige Tassen gibt, daß noch seltener Strohhalme in solchen eine Bedeutung haben, die Anwendungsorientierung völlig absprechen und sie als typisch „eingekleidete Aufgabe" oder sogar abwertend als „Scheinanwendung" bezeichnen. In der Tat, die Anwendungsorientierung dieser Aufgabe besteht auch für uns nicht darin, daß es ein Problem ist, das für irgend jemanden im Alltag oder im Beruf oder sonstwo eine Bedeutung hätte. Es wäre u. E. nicht nur falsch, sondern sogar schädlich, als Lehrer im Unterricht so zu tun, als ob solche Beispiele wichtige Aspekte

1 Dies ist ja mit dem obigen „Bild" gemeint, daß ein Strohhalm ruhig aus einer Tasse herausragt.
2 Gemeint ist hier der obere kreisförmige Rand der Tasse.

bzw. Teile der Angewandten Mathematik schlechthin bedeuteten und daher in einem gewissen Sinn das Existenzrecht der Mathematik untermauern würden[1], denn in der Praxis interessiert sich wahrscheinlich kaum jemand für den in Rede stehenden Winkel, und wenn, dann würde er ihn ganz einfach messen! Es kann hier jedoch ein *grundlegendes Prinzip* bzw. das *Wesen* des Anwendens von Mathematik geübt bzw. gelernt werden: Das Bilden von Modellen, das Herantasten an eine Lösung eines ungewohnt scheinenden Problems, das schon erwähnte „Forschen im kleinen". Nicht beim Ergebnis soll hier der Schwerpunkt liegen (der Wert des Winkels bzw. der Term für ihn ist hier u. E. tatsächlich zweitrangig), sondern eindeutig beim Weg dorthin! Es ist ein Beispiel, an dem nachvollziehbar sein sollte, wie Mathematik (prinzipiell) bei der Lösung außermathematischer Probleme helfen kann, es soll *nicht* ein Gebiet repräsentieren, wo die Mathematik zu einem außerordentlich wichtigen Problem (vielleicht sogar im Sinne des Problems der Momentangeschwindigkeit bei Newton) Entscheidendes beitragen kann! Daß hier der Kontext als „eingekleidete Aufgabe" formuliert wurde, ist zwar für manche trotzdem „ganz nett", motivierend und entspricht übrigens einer sehr verwurzelten und Jahrtausende alten Tradition des Betreibens von Mathematik, die wir für gut und fruchtbar halten (gleichsam einem Spiel oder – moderner formuliert – einer Sportart ähnelnd), hat aber mit der Anwendungsorientierung dieses Beispiels nur wenig zu tun!

Nun zur zweiten Frage bzgl. des Winkels $\varphi$, den der Strohhalm in seiner Gleichgewichtslage mit der Ebene des Tassenrandes einschließt. Was bedeutet *Gleichgewichtslage* denn eigentlich? Wann wird so ein Strohhalm in Ruhe (stabil) lehnen? Wie kann der Begriff „Gleichgewichtslage" in unserem Modell mathematisiert werden? Hier wird eine Erkenntnis aus dem frühen Physikunterricht benötigt. Jeder Körper trachtet aufgrund der Schwerkraft danach, möglichst viel an „potentieller Energie" zu verlieren (möglichst nahe dem Erdmittelpunkt zu sein). Wenn ein Körper (Strohhalm) durch vorhandene Beschränkungen (Tasse) daran gehindert wird, wirklich näher zum Erdmittelpunkt zu gelangen (i. e. weiter zu fallen), so wird er zumindest danach trachten, seine Lage unter den durch die Beschränkung ermöglichten Lagen so zu wählen, daß sein *Schwerpunkt* möglichst tief liegt!

Der Schwerpunkt eines zu einer Strecke idealisierten Strohhalmes (Modell!) ist sicher auch kein Geheimnis der höheren Physik bzw. Mathematik, sondern ist wohl auch schon Schülern des 6. Jahrganges als Mittelpunkt der Strecke bekannt ($M = S$). In Figur 2 ist der Abstand (nach unten) des Schwer- bzw. Mittelpunktes von der Tassenrandebene als y bezeichnet[2]; dieser soll offenbar möglichst groß werden, damit der Schwerpunkt – seinem „inneren Drang" entsprechend – möglichst tief liegt. Nun, da wir (in unserem Modell) den Begriff „stabile Lage" in die Sprache der Mathematik übersetzt haben, ist der Charakter einer *Optimierungsaufgabe* schon erkennbar.

Der Weg bis hierher ist für Schüler in der 11. Schulstufe zwar ohne weiteres nachvollziehbar, aber der Lehrer würde die Schüler einer guten Gelegenheit berauben, mit viel Eigenaktivitäten (was nicht völliger Alleingang bedeutet) selbst „etwas" zu erreichen und somit wieder mehr Vertrauen ins eigene Können und u. U. Motivation fürs Weitere zu tanken, wenn er diese Aufgabe selbst an der Tafel vorrechnete und dabei alle zu machenden Annahmen und zu verwendenden Prinzipien angäbe.

1 Es würde u. E. ein falsches Bild von Mathematik und insbesondere des Anwendens von Mathematik entstehen und weiters wäre damit der Motivation kein guter Dienst erwiesen, nach dem gängigen Schülermotto: „Und *dafür* sollen wir Mathematik lernen?!"
2 Ein negatives y würde also bedeuten, daß der Schwerpunkt sich *über* der Tassenrandebene befindet.



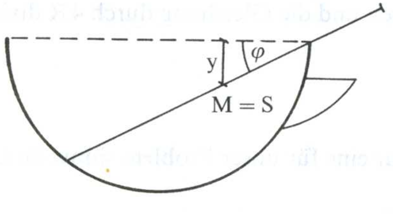



Fig. 2 Schwerpunkt möglichst tief bedeutet: y möglichst groß

Nun kommt die eigentliche Mathematik ins Spiel. Es muß nun das Ziel sein (im Sinne des „Funktionalen Denkens"), den Vertikalabstand y des Schwerpunktes als Funktion von $\varphi$ darzustellen, um durch Nullsetzen der ersten Ableitung $\left(\frac{dy}{d\varphi} = 0\right)$ den Winkel $\varphi_{opt}$ zu bestimmen. Auch hier wäre es u. E. nicht richtig, den Schülern eine Skizze mit allen relevanten Eintragungen (z. B. die Länge x der Strecke vom Mittelpunkt bis zum Tassenrand oder den rechten Winkel im „Thaleskreis" – siehe Figur 3) gleichsam „in den Mund zu legen". Die dahintersteckende Mathematik ist hier wirklich nicht kompliziert und soll daher unbedingt eine Chance bekommen, von den Schülern weitgehend selbständig (wieder-)entdeckt zu werden.

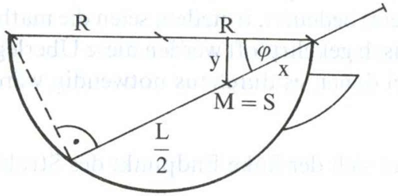



Fig. 3 Die vollständig mathematisierte Situation

Für die Länge jenes Strohhalmstücks, das sich im Tasseninneren befindet, erhält man leicht $2R \cdot \cos\varphi$ und daher für das mit x bezeichnete Stück $x = 2R \cdot \cos\varphi - \frac{L}{2}$. Für die eigentlich interessierende Größe $y = x \cdot \sin\varphi$ ergibt sich daher

$$y = \left(2R \cdot \cos\varphi - \frac{L}{2}\right) \cdot \sin\varphi = 2R \sin\varphi \cos\varphi - \frac{L}{2} \sin\varphi = R \sin(2\varphi) - \frac{L}{2} \sin\varphi,$$

womit das Ziel, y als Funktion von $\varphi$ darzustellen, erreicht wäre. Einsetzen in $\frac{dy}{d\varphi} = 0$ liefert $2R\cos(2\varphi) - \frac{L}{2}\cos\varphi = 0$ bzw.

$$2R \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \frac{L}{2}\cos\varphi = 0\,^1,$$

1 Diese Gleichung kann auch durch Anwenden der Produktregel auf $y = \left(2R \cdot \cos\varphi - \frac{L}{2}\right) \cdot \sin\varphi$ erhalten werden.

oder, wenn wir $\sin^2 \varphi$ durch $1 - \cos^2 \varphi$ ersetzen und die Gleichung durch 4R dividieren,

$$\cos^2 \varphi - \frac{L}{8R} \cos \varphi - \frac{1}{2} = 0 .$$

Diese quadratische Gleichung in $\cos \varphi$ hat nur eine für unser Problem sinnvolle Lösung, nämlich

$$\cos \varphi = \cos \varphi_{\text{opt}} = \frac{L + \sqrt{L^2 + 128 R^2}}{16R} .$$

Für den Winkel $\varphi = \varphi_{\text{opt}}$ erhalten wir daher

$$\varphi = \varphi_{\text{opt}} = \arccos \left( \frac{L + \sqrt{L^2 + 128 R^2}}{16R} \right) = \arccos \left[ \frac{1}{16} \cdot \left( \frac{L}{R} + \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 128} \right) \right] .$$

Für $L = 3R$ bedeutet dies z. B., daß der Winkel $\varphi$ ca. 23,2° beträgt, für $L = \frac{7}{3}R$ ergibt sich $\varphi \approx 29{,}8°$.

*Bemerkung:* In obiger Formel sieht man auch rechnerisch, daß für $L > 4R$ („Überkippen") keine Lösung mehr existierte, da dann der Term für $\cos \varphi$ einen Wert größer als 1 hätte.

Es ist zwar aus physikalischen Gründen klar, daß der gefundene Wert für $\varphi$ wirklich ein *globales Maximum* für y (die Schwerpunktstiefe) bedeutet, trotzdem seien die mathematischen Untersuchungen hier nicht unter den Tisch gekehrt (oft werden diese Überlegungen aber auch bei Situationen nicht gemacht, bei denen es durchaus notwendig wäre).

Da $\varphi$ Werte zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ annimmt, wenn sich der linke Endpunkt des Strohhalmes (der das Tasseninnere berührt) entlang des in Figur 3 dargestellten Halbkreises bewegt, ergibt sich für die „Randwerte" $y(0) = 0$ bzw. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{L}{2}$, die beide kleiner sind als der positive (wie man in den Abbildungen sieht) Wert von y bei $\varphi_{\text{opt}}$. Der „Randpunkt" $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist hierbei ein besonders *künstlicher* (hierbei würde der Strohhalm senkrecht am (rechten) Tassenrand stehen und sein Mittel- bzw. Schwerpunkt daher um $\frac{L}{2}$ *über* der Ebene des Tassenrandes liegen – negatives Vorzeichen), aber auch schon für Werte von $\varphi$, die knapp unter $\frac{\pi}{2}$ liegen, ist ja nur mehr ein kleines Stück des Strohhalmes innerhalb der Tasse, so daß es vernünftiger erscheint, jenen Wert für $\varphi$ als rechten Randpunkt zu betrachten, bei dem sich noch mindestens die Hälfte des Strohhalmes im Inneren der Tasse befindet. Dies ist offenbar bei $2R \cos \varphi = \frac{L}{2}$ bzw. bei $\varphi = \varphi_1 = \arccos \frac{L}{4R}$ der Fall. Bei diesem Wert für $\varphi$ liegt der Schwer- bzw. Mittelpunkt des Strohhalmes genau im Auflagepunkt am Tassenrand, was $y(\varphi_1) = 0$ bedeutet (siehe Fig. 4).

Wir haben oben geschrieben, daß man aus den Abbildungen bzw. aus der Definition von y ersehen kann, daß $y(\varphi_{\text{opt}}) > 0$ ist, daß also dort der Schwerpunkt sich wirklich unterhalb



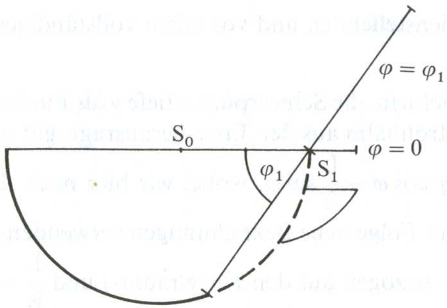



Fig. 4 Vernünftige Randlagen des Strohhalmes

der Tassenrandebene befindet. Auch rechnerisch kann leicht bestätigt werden, daß $y(\varphi) > 0$ ist, wenn $0 < \varphi < \arccos \frac{L}{4R}$ $(= \varphi_1)$ ist. Aus $\varphi < \arccos \frac{L}{4R}$ folgt ja zunächst, daß $\cos \varphi > \frac{L}{4R}$ bzw. $2R \cos \varphi - \frac{L}{2} > 0$ ist und nach Multiplikation mit $\sin \varphi$ $(> 0)$ ergibt sich $y = 2R \sin \varphi \cos \varphi - \frac{L}{2} \sin \varphi > 0$. Auch direktes Einsetzen des einzelnen Wertes $\cos \varphi_{\text{opt}}$ in $y(\varphi) = \sin \varphi \left( 2R \cos \varphi - \frac{L}{2} \right)$ bestätigt, daß $y(\varphi_{\text{opt}}) > 0$ ist (es gilt ja $\sin \varphi_{\text{opt}} > 0$ und $2R \cos \varphi_{\text{opt}} - \frac{L}{2} > 0$ für $L < 4R$).

Um diese Betrachtungen nun wirklich abzuschließen, weisen wir auch noch nach, daß die zweite Ableitung $\frac{d^2y}{d\varphi^2}$ an der Stelle $\varphi_{\text{opt}}$ kleiner als Null ist, womit (mathematisch gesehen) das *Maximum* erst garantiert ist. Es ist also nachzuweisen, daß

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} (\varphi_{\text{opt}}) = -8R \sin \varphi_{\text{opt}} \cos \varphi_{\text{opt}} + \frac{L}{2} \sin \varphi_{\text{opt}} < 0$$

ist. Dies ist ($\sin \varphi_{\text{opt}}$ ist ja positiv!) offenbar genau dann erfüllt, wenn $L < 16R \cdot \cos \varphi_{\text{opt}}$ gilt, was wiederum durch $0 < \sqrt{L^2 + 128 R^2}$ garantiert ist.

Eine zusätzliche Aufgabe für Schüler (insbesondere für eine allfällige Hausübung) könnte darin bestehen, für verschiedene Verhältnisse von L zu R [1] den Winkel $\varphi$ zu bestimmen und manche solche (ausgewählte) Gleichgewichtssituationen graphisch darzustellen.

### Der Fall $L \leqq 2R$

Wir schicken gleich anfangs voraus: Dieser Fall ist etwas komplizierter handzuhaben, er wird wahrscheinlich nur für gute bis sehr gute Schüler (d. h. insbesondere in Leistungskur-

1 Es kommt ja – wie wir in obiger Formel für $\varphi_{\text{opt}}$ gesehen haben – in Wirklichkeit nicht auf die absoluten Werte von L und R, sondern nur auf das Verhältnis $\frac{L}{R}$ an.

sen mit hohem Niveau) in einer zufriedenstellenden und vor allem vollständigen Form behandelt werden können.

Zunächst muß es natürlich wieder das Ziel sein, die Schwerpunktstiefe y als Funktion von $\varphi$ darzustellen. Für den Fall, daß der Strohhalm aus der Tasse herausragt, gilt die oben erarbeitete Darstellung $y(\varphi) = 2R \sin\varphi \cos\varphi - \frac{L}{2}\sin\varphi$, wobei wir hier noch durch R dividieren und zur Abkürzung in weiterer Folge neue Bezeichnungen verwenden wollen: $\frac{y}{R} = \bar{y}$ (die relative Schwerpunktstiefe – bezogen auf den Kugelradius) und $\frac{L}{R} = A$ (die relative Strohhalmlänge). Unser hier in Rede stehender Fall ($0 < L \leqq 2R$) wird in dieser Schreibweise zu $0 < A \leqq 2$. Wir erhalten damit für den Fall des Herausragens des Strohhalmes

$$\bar{y}(\varphi) = \sin\varphi\left(2\cos\varphi - \frac{A}{2}\right).$$

Man überlegt sich auch leicht, für welche $\varphi$ der Strohhalm aus der Tasse herausragt. In Figur 5 sieht man unmittelbar, daß dies für alle Winkel der Fall ist, die *größer* als jener in der dargestellten Grenzlage sind, also für $\varphi > \arccos\frac{L}{2R} = \arccos\frac{A}{2} =: \varphi_2$.

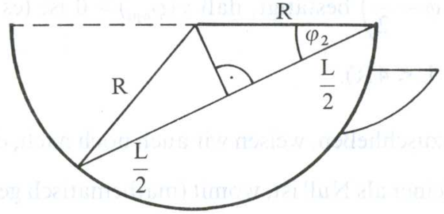



Fig. 5 Grenzlage bzgl. des Herausragens

Nun brauchen wir noch eine Darstellung von $y(\varphi)$ für $\varphi \leqq \arccos\frac{A}{2} = \varphi_2$, wenn also der Strohhalm sich ganz in der Tasse befindet. Dazu betrachten wir Figur 6. Auch dies ist nicht so schwer, als daß Schüler nicht auch (weitgehend) *selbständig* auf eine solche Darstellung kommen könnten; es ist u.E. daher nicht sinnvoll, den Schülern sofort eine Skizze wie Figur 6 auf der Tafel oder auf Overheadfolie zu präsentieren.

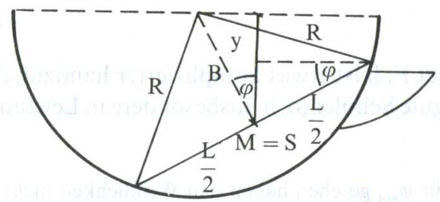



Fig. 6 Die Schwerpunktstiefe $y(\varphi)$ für einen nicht herausragenden Strohhalm



Da die Streckensymmetrale einer Kreissehne („Strohhalm") durch den Kreismittelpunkt geht, tritt der Winkel $\varphi$ bei $S = M$ noch einmal auf („Normalwinkel"). Laut dem Satz von Pythagoras gilt für die mit B bezeichnete Strecke $B = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$, und wir erhalten für $y(\varphi)$

$$y(\varphi) = B\cos\varphi = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}\cos\varphi,$$

bzw.

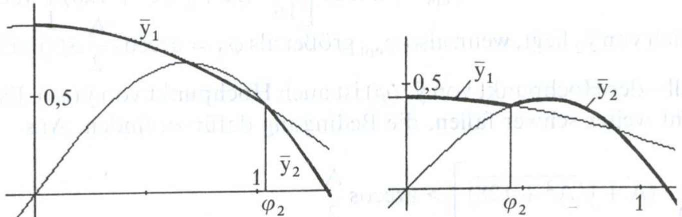
$$\bar{y}(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{A^2}{4}}\cos\varphi.$$

Insgesamt haben wir also im Fall $L \leqq 2R$ keine einheitliche Darstellung für y bzw. $\bar{y}$, sondern eine „getrennte" (jedoch stetige):

$$\bar{y}(\varphi) = \begin{cases} \bar{y}_1 = \sqrt{1 - \frac{A^2}{4}}\cos\varphi & \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \arccos\frac{A}{2} = \varphi_2, \\ \bar{y}_2 = \sin\varphi\left(2\cos\varphi - \frac{A}{2}\right) & \text{für} \quad \varphi_2 = \arccos\frac{A}{2} \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die angegebene Funktion *stetig* ist, daß also beide Terme bei $\varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}$ denselben Wert haben (wodurch die Hinzunahme von $\varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}$ zu *beiden* Fällen erst gerechtfertigt ist); dieser Wert beträgt einerseits $\frac{A}{2}\sqrt{1 - \frac{A^2}{4}}$ und andererseits $\frac{A}{2}\sin\left(\arccos\frac{A}{2}\right)$, was wegen $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ offenbar dasselbe ist.

Die Funktion $\bar{y}(\varphi)$ ist bei $\varphi = \varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}$ zwar stetig, jedoch i.a. nicht differenzierbar (sie hat dort eine „Ecke") – siehe Figur 7.




a) A = 1 b) A = 1,8

Fig. 7 „Ecke" bei $\varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}$

Der links- und der rechtsseitige Grenzwert der Ableitungen stimmen an dieser „kritischen" Stelle nur für einen einzigen Wert von A überein. Um diesen Wert zu finden, brauchen wir nur die beiden „Einzelableitungen" (der Teilfunktionen)

$$\frac{d\bar{y}_1}{d\varphi} = -\sqrt{1 - \frac{A^2}{4}}\sin\varphi \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\bar{y}_2}{d\varphi} = 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \frac{A}{2}\cos\varphi$$

an der Stelle $\varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}$ gleichzusetzen (die beiden Teilfunktionen $\bar{y}_1(\varphi)$ und $\bar{y}_2(\varphi)$ sind für sich genommen ja sehr wohl bei $\varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}$ differenzierbar). Aus der Gleichung $\frac{d\bar{y}_1}{d\varphi}\left(\arccos\frac{A}{2}\right) = \frac{d\bar{y}_2}{d\varphi}\left(\arccos\frac{A}{2}\right)$ erhalten wir nach kurzer Rechnung $A = \sqrt{2}$, d.h. nur bei $L = \sqrt{2}R$ ist das Eintauchen des Strohhalmes in die Tasse (so daß er sich ganz in ihr befindet) ein *glatter* Vorgang bzgl. der Schwerpunktstiefe y (in Figur 8 sieht man, daß für $A = \sqrt{2}$ die beiden Funktionsgraphen von $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$ bei $\varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}$ $= \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}78$ einander berühren).

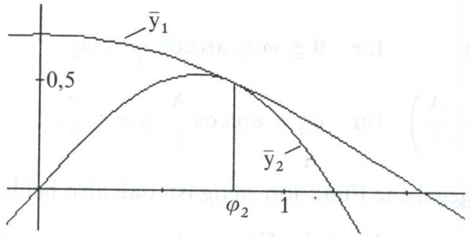



Fig. 8 Glatter Übergang zwischen $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$ bei $\varphi_2$

In weiterer Folge muß es nun darum gehen, die Funktion $\bar{y}$ im Intervall $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ auf lokale und globale Maxima hin zu untersuchen. Das bereits oben (für den Fall des Herausragens und $L > 2R$) erarbeitete Maximum[1] von y bei $\varphi_{opt}$ hat auch hier (zumindest lokale) Gültigkeit, wenn dieser Wert $\varphi_{opt} = \arccos\left[\frac{1}{16}\cdot(A + \sqrt{A^2+128})\right]$ überhaupt im Definitionsbereich von $\bar{y}_2$ liegt, wenn also $\varphi_{opt}$ größer als $\varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}$ ist (in Figur 7b ist dies z. B. der Fall – der Hochpunkt von $\bar{y}_2(\varphi)$ ist auch Hochpunkt von $\bar{y}(\varphi)$). Es dürfte auch Schülern nicht weiter schwer fallen, die Bedingung dafür zu finden. Aus

$$\arccos\left[\frac{1}{16}\cdot(A + \sqrt{A^2+128})\right] > \arccos\frac{A}{2}$$

folgt zunächst

$$\frac{1}{16}\cdot(A + \sqrt{A^2+128}) < \frac{A}{2},$$

weil die Arcuskosinusfunktion $\left(\text{und auch die Kosinusfunktion im Intervall } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

1 Dort war dies ein *lokales* und *globales* Maximum.



streng monoton fallend ist, und daraus nach kurzer Rechnung

$$A > \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1{,}633\,.$$

Für $L > 1{,}633\,R$ haben wir also durch dieselbe Lösung $\varphi_{opt}$ wie im obigen Fall ($L > 2R$) *einen* stabilen Gleichgewichtswinkel gefunden. Es gibt hier aber noch eine zweite stabile Gleichgewichtslage, nämlich diejenige, die für $L \leqq 2R$ allgemein Stabilität bedeutet (also auch für $L < 1{,}633\,R$): die waagerechte Lage, d.h. $\varphi = 0$. Für $0 \leqq \varphi \leqq \arccos\frac{A}{2}$ wird die Funktion $\bar{y}(\varphi)$ durch $\bar{y}_1(\varphi)$ dargestellt, die von der Form $C\cdot\cos\varphi$ ist, woraus wir unmittelbar erkennen, daß sich in diesem Bereich das Maximum bei $\varphi = 0$ befindet – die Kosinusfunktion ist dort ja streng monoton fallend (siehe auch Figur 7b).

Welche Gleichgewichtslage der Strohhalm ($L > 1{,}633\,R$) jeweils annimmt, hängt von seiner Ausgangslage ab. Wird der Strohhalm z. B. so in die Tasse gelegt, daß er sich ganz in ihr befindet $\left(\varphi < \varphi_2 = \arccos\frac{A}{2}\right)$, so wird er die waagrechte („innere") Gleichgewichtslage ($\varphi = 0$) einnehmen. Ist seine Ausgangslage hingegen relativ knapp bei seiner zweiten stabilen Lage $\varphi_{opt}$, bei der ein Teil des Strohhalmes aus der Tasse ragt (z. B. $\arccos\frac{A}{2} < \varphi < \varphi_{opt} + \varepsilon$), so wird er diese „äußere" Gleichgewichtslage bei $\varphi_{opt}$ schließlich auch einnahmen[1]. Er darf jedoch in seiner Ausgangslage nicht zu weit herausragen, da er sonst durch seine Fallenergie die äußere Gleichgewichtslage überwinden und schließlich ganz in die Tasse fallen würde; dann würde er die „innere" Gleichgewichtslage (ganz in der Tasse bzw. $\varphi = 0$) einnehmen. Ab welcher Ausgangslage dies der Fall wäre, soll jedoch hier nicht genauer untersucht werden.

Im Fall $A < \sqrt{\frac{8}{3}}$ (also $L < 1{,}633\,R$) gibt es nur die waagrechte Gleichgewichtslage $\varphi = 0$, was ja auch durchaus der Vorstellung entspricht: Bei einem kurzen Strohhalmstück (z. B. $L = R$) würden wir auch nicht erwarten, daß der Halm irgendwie stabil in der Tasse lehnen könnte. In Figur 7a sieht man auch deutlich, daß der Hochpunkt von $\bar{y}_2(\varphi)$ für $\bar{y}(\varphi)$ keiner ist, da an dieser Stelle $\bar{y}(\varphi)$ durch $\bar{y}_1(\varphi)$ dargestellt wird. Ein kurzer Strohhalm rutscht eben über den Tassenrand hinweg ganz in die Tasse hinein und nimmt dort seine waagrechte Gleichgewichtslage ein.

**Zusammenfassung:**

Wir erhalten abhängig von der Länge des Strohhalmes in bezug auf den Kugelradius folgende Lösungen (stabile Gleichgewichtslagen):

1. Für $0 < L \leqq \sqrt{\frac{8}{3}}\,R$ gibt es nur eine Gleichgewichtslage, nämlich die waagrechte innerhalb der Tasse bei $\varphi = 0$.

1 Genauere Untersuchungen über das $\varepsilon$ wollen wir hier nicht anstellen.

2. Wenn $\sqrt{\frac{8}{3}}\,R < L \leqq 2R$ gilt, so gibt es *zwei* verschiedene Gleichgewichtslagen, die innere (waagrechte) bei $\varphi = 0$ und die äußere bei

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{opt}} = \arccos\left[\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{L}{R} + \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + 128}\right)\right].$$

3. Für $2R < L \leqq 4R$ muß der Strohhalm wirklich herausragen und es gibt nur eine Gleichgewichtslage, die äußere bei $\varphi_{\mathrm{opt}}$.

4. Für $L > 4R$ gibt es überhaupt keine Gleichgewichtslage, da der Strohhalm nach außen überkippen würde.

*Bemerkungen:*

(1) Diese Ergebnisse beziehen sich nur auf unser Modell (Idealisierungen, Vernachlässigung von Reibungskräften etc.) und sind nicht als unumstößliche Prinzipien der Realität aufzufassen. Dies sollte gegebenenfalls auch im Unterricht betont werden.

(2) Man könnte die Aufgabe von vornherein allgemeiner formulieren (ohne die zunächst angegebene Bedingung $L > 2R$), also z. B. „Ein Strohhalm in einer halbkugelförmigen Tasse – was kann passieren in bezug auf seine Gleichgewichtslagen?"; wir meinen jedoch, daß dies insbesondere im Hinblick auf eine wirklich *selbständige* Beschäftigung der Schüler leichter eine Überforderung darstellen könnte.

Anschrift des Verfassers: Dr. Hans Humenberger, Institut für Mathematik und Angewandte Statistik, Universität für Bodenkultur, Gregor-Mendel-Straße 33, A-1180 Wien

Eingangsdatum: 17.9.1994

**Literatur**

[1] Ebenhöh, W. (1990): Mathematische Modellierung – Grundgedanken und Beispiele. In: MU 36, H. 4, S. 5–15

[2] Humenberger, H. u. H.-C. Reichel (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Verlag, Mannheim–Wien–Zürich

[3] Kaiser-Messmer, G. u. W. Blum (1993): Einige Ergebnisse von vergleichenden Untersuchungen in England und Deutschland zum Lehren und Lernen von Mathematik in Realitätsbezügen. In: JMD 14, H. 3/4, S. 269–305