HANS HUMENBERGER

Gleichmäßige Flächenaufteilung durch einen inneren Punkt bei Drei- und Vierecken

1 Einleitung

In diesem Aufsatz geht es um ein Thema, das einerseits sehr nahe am Curriculum ist, andererseits aber auch weiterführendes Potenzial hat, weil ein interessantes und eher wenig verbreitetes Phänomen näher beleuchtet wird. Lernende können einerseits selbstständig mit Dynamischer Geometrie Software (DGS) experimentieren und dadurch zu Vermutungen kommen, andererseits aber auch die Erfahrung machen, dass letztlich auch Begründungen eine entscheidende Rolle spielen in der Mathematik, speziell in der Elementargeometrie. Dieses Teilgebiet wird im deutschsprachigen Raum seit vielen Jahren immer weiter reduziert und degeneriert geradezu zu einem rein rechnerischen Arbeiten mit geometrischen Formeln (Längen, Flächeninhalte, Volumina). Selbst der Lehrsatz von PYTHAGORAS (ein Flächensatz) wird in vielen Unterrichtsrealitäten (manchmal sogar in Schulbüchern und Lehrplänen) einzig und alleine darauf reduziert, mit seiner Hilfe fehlende Längen auszurechnen.

Im Regelunterricht (Mathematik) spielt das Begründen leider noch immer nicht die Rolle, die es haben sollte. Natürlich gibt es viele Lehrkräfte, die die Bedeutung der prozessbezogenen Kompetenz „Argumentieren“ erkannt haben und auch dementsprechend unterrichten – auch viele Unterrichtsmaterialien wie Schulbücher setzen da in letzter Zeit viele positive Akzente. Aber oft wird weiterhin (insbesondere in nicht gymnasialen Formen der Sekundarstufe 1) um das Begründen eher ein Bogen gemacht, man hört dann sinngemäß (von Schüler/-innen und so manchen Lehrenden): „Begründungen sind ja sowieso zu schwierig, das ist kaum zumutbar, Hauptsache man weiß, wie es geht!“ Lernende (und manche Lehrende) verspüren oft von sich aus kaum ein Beweisbedürfnis („Das steht so im Buch, und ich glaube es ohnehin“), aber die Frage nach dem Warum sollte eigentlich eine der wichtigsten Fragen des Mathematikunterrichts sein [MEYER/PREDIGER 2009], die auch eine typische Haltung repräsentiert: Man möchte nicht nur wissen, DASS/OB „es so ist“, sondern vielmehr WARUM?. Die Frage, ob etwas der Fall ist, kann theoretisch einer Autorität (Schulbuch, Lehrkraft, Internetquelle etc.) überlassen werden, aber die Frage nach dem *Warum* appelliert an das eigene Verständnis, und in diese Frage sollen bzw. müssen auch Lernende involviert werden. Neben diesen beiden Funktionen des Begründens bzw. Beweisens (Verifikation (DASS), Erklärung (WARUM)) gibt es noch einige andere, die hier nicht näher genannt werden, wir verweisen hierfür auf DE VILLIERS [1999].

Die Elementargeometrie ist für erste Erfahrungen beim Begründen besonders geeignet, weil sie eine anschauliche Disziplin ist, viele Schüler/-innen haben deswegen Geometrie etwas lieber als Arithmetik. Und auch die (wichtige!) Unterscheidung zwischen einem Satz und seiner Umkehrung ist in der Geometrie vielleicht etwas leichter vor Augen zu führen. Auch dieser Unterscheidungsaspekt wird im Folgenden eine entscheidende Rolle spielen.

2 Gleichmäßige Flächenaufteilung durch einen inneren Punkt bei Dreiecken

Problem 1: Wenn man in einem gleichseitigen Dreieck die Eckpunkte mit dem „Mittelpunkt“ verbindet, sind die drei entstehenden Teildreiecke natürlich gleich groß (sogar kongruent, aus Symmetriegründen). Wie ist das bei nicht gleichseitigen Dreiecken? Gibt es da auch immer so einen inneren Punkt P, der – verbunden mit den drei Eckpunkten – das Dreieck in drei gleich große Dreiecke teilt? Wenn ja, welcher Punkt ist das? Ist er eindeutig? Wenn nein, warum nicht? **(Abb. 1)**

Wenn man das Problem so wie eben formuliert stellt, ist man eindeutig im Bereich des Problemlösens. Auf der rein experimentellen Ebene kann man mittels DGS (z. B. GeoGebra) erste Erfahrungen sammeln: Mithilfe eines beweglichen Punktes P im Dreieck zeichnet man zunächst die drei Teildreiecke, deren Flächeninhalt leicht angezeigt werden kann. Dann kann man eine Lage von P suchen, sodass die drei Teildreiecke gleich groß sind, diese Lage wird beim Schwerpunkt S sein und man hat dadurch schon eine Vermutung, die dann auch experimentell bestätigt und erhärtet werden kann: Der Schwerpunkt (und nur dieser!) hat die in Rede stehende Eigenschaft. Oberflächlich betrachtet ist damit vielleicht die Frage nach dem „DASS“ geklärt („GeoGebra zeigt das ja!“), obwohl mit diesem Experiment natürlich noch nichts bewiesen ist (nicht einmal die Frage, ob es wirklich für *alle* Dreiecke so ist). Aber jedenfalls ist die Frage nach dem WARUM durch so ein DGS-Experiment naturgemäß noch nicht berührt, das kann kein Computer leisten! Und das ist aus didaktischer Sicht das viel wichtigere Argument, weswegen noch nach einer Begründung Ausschau gehalten werden soll.

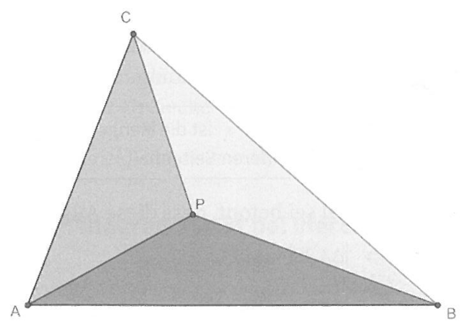

Abb. 1 Punkt im Inneren des Dreiecks, Teildreiecke

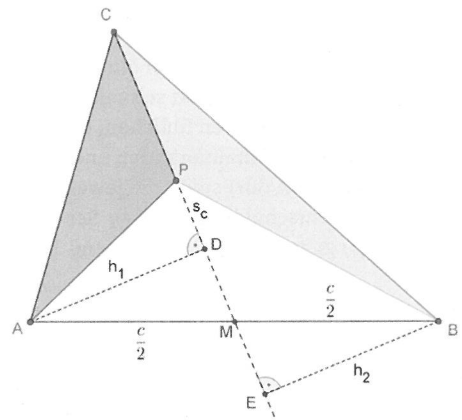

Abb. 2 $P \in s_c \Leftrightarrow |\Delta APC| = |\Delta BPC|$

Wenn nicht so sehr das (selbstständige) Problemlösen im Vordergrund stehen soll, dann kann hierfür auch eine schrittweise Anleitung im Unterricht erfolgen, z. B. wie folgt: Man kann den Fokus zunächst einmal auf zwei Teildreiecke richten, z. B. auf PAC und PBC, und fragen: Wo muss P liegen, dass diese beiden denselben Flächeninhalt haben? Hier liegt die Antwort (Vermutung) sehr nahe: Auf der Seitenhalbierenden s_c. Auch die Begründung (Beweis) ist relativ einfach (**Abb. 2**): Wenn M der Mittelpunkt der Seite AB ist, dann sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke AMD und BME nach WSW kongruent, daher gilt auch $h_1 = h_2$, damit haben aber die beiden Dreiecke PAC und PBC nicht nur dieselbe Grundlinie (PC), sondern auch gleiche Höhe und damit gleichen Flächeninhalt.

Nun weiß man zwar, dass und warum Punkte $P \in s_c$ zu gleich großen Teildreiecken führen, aber man weiß noch nicht, ob es auch andere solche Punkte P geben könnte (mögliche DGS-Experimente sprechen dagegen, aber wieder: WARUM?).

Es gilt auch umgekehrt: Wenn die beiden Teildreiecke PAC und PBC gleich groß sind, dann muss $P \in s_c$ gelten (man kann hier ganz analog vorgehen, dazu sei jetzt M der Schnittpunkt von CP mit AB): $|\Delta APC| = |\Delta BPC| \Rightarrow h_1 = h_2 \overset{\text{WSW}}{\Rightarrow} |AM| = \frac{c}{2} = |BM|$, d. h., M ist der Mittelpunkt der Seite AB und damit muss P auf der Seitenhalbierenden liegen. Mindestens genauso wichtig wie die Begründung dieser Umkehrung ist, dass Lernende erkennen, dass es da noch was zu begründen gibt, dass also mit der ersten Schlussrichtung das Ortslinienproblem noch nicht gelöst ist, das ist für viele Lernende keine Selbstverständlichkeit!

Mit beiden Schlussrichtungen hat man das folgende Ortslinienproblem gelöst:

> Die Seitenhalbierende s_c ist die Menge aller Punkte P mit $|\Delta APC| = |\Delta BPC|$ (*)
> (analog mit den anderen Seitenhalbierenden)

Noch einmal sei betont, dass diese Aussage zwei Richtungen hat:

$$P \in s_c \Rightarrow |\Delta APC| = |\Delta BPC| \qquad (1)$$

$$P \in s_c \Leftarrow |\Delta APC| = |\Delta BPC|. \qquad (2)$$

Diese Erkenntnis kann nun weiterverwendet werden zu zwei Zwecken:

- Einerseits ist damit klar: Der Schwerpunkt, und nur dieser, hat die gewünschte Eigenschaft der Flächengleichheit aller drei Teildreiecke!
- Andererseits ist damit auch ein alternativer Beweis möglich, dass die Seitenhalbierenden einander in einem Punkt schneiden (Schwerpunkt S). Dieser Beweis hat den eindeutigen Vorteil gegenüber den üblichen, dass er dieselbe Struktur hat wie der Beweis der Kopunktalität der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechten (beim Inkreis- und Umkreismittelpunkt; auch dort spielt die jeweilige Ortslinieneigenschaft, d. h. jeweils beide Richtungen, die entscheidende Rolle): Sei S definiert als der Schnittpunkt $s_a \cap s_c$, dann muss nach (1) gelten: $|\Delta ASC| = |\Delta BSC|$ und $|\Delta ASC| = |\Delta ASB|$, daher auch $|\Delta BSC| = |\Delta ASB|$ und mit (2) muss S daher auch auf s_b liegen (vgl. MEYER 1997).

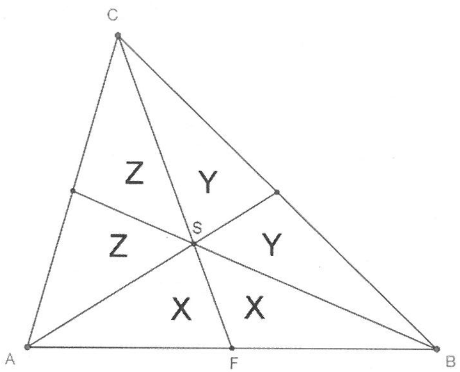

Abb. 3 Sechs gleich große Teildreiecke

Wenn bei der Einführung des Schwerpunktes (Kopunktalität der Seitenhalbierenden) schon in dieser Weise argumentiert wird, ist das obige Problem natürlich sofort gelöst.

Bei Dreiecken ist also der Punkt der gleichmäßigen Flächenaufteilung der Schwerpunkt der Figur (der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist bei Dreiecken gleichzeitig Ecken- und Flächenschwerpunkt).

Ein bekanntes, damit zusammenhängendes Phänomen ist: Die drei Seitenhalbierenden teilen jedes Dreieck in 6 paarweise gleich große Teildreiecke (**Abb. 3**).

Dafür haben Lernende mehrere Begründungsmöglichkeiten. Zunächst ist klar, dass die Teildreiecke, die mit gleichem Buchstaben bezeichnet sind, gleich groß sind. Nicht a priori klar ist, warum $X = Y = Z$ gelten soll. Dafür gibt es eben mehrere Möglichkeiten:

(1) Arbeiten mit der Flächenformel: $X = \frac{\frac{c}{2} \cdot \frac{h_c}{3}}{2} = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\frac{c \cdot h_c}{2}}_{\text{Gesamtdreiecksflächeninhalt}}$, analog bei den anderen.

(2) Wegen $|\Delta AFC| = |\Delta BFC|$ und $|\Delta AFS| = |\Delta BFS|$ folgt durch Differenzbildung sofort $2Z = 2Y$ und damit $Z = Y$, analog bei den anderen.

(3) Durch das obige Resultat, dass die Eckverbindungen von S das Dreieck in drei gleich große Teildreiecke teilen, erhält man unmittelbar $2X = 2Y = 2Z$ und damit $X = Y = Z$.

Durch dieses Wissen ist auch klar, dass der Schwerpunkt S die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 teilt, denn (siehe **Abb. 3**) die Flächeninhalte der Dreiecke SBC und SFB verhalten sich (bei gleicher Höhe) auch wie 2 : 1.

3 Gleichmäßige Flächenaufteilung durch einen inneren Punkt bei Vierecken

Nun kommt eine sehr naheliegende Verallgemeinerung von Problem 1 auf Vierecke. Es wird sich herausstellen, dass das zugrunde liegende Phänomen zwar sehr einfach zu behandeln ist (insbesondere wenn man sich vorher mit dem Problem für Dreiecke auseinandergesetzt hat), gleichwohl scheint es wenig bekannt zu sein. Es ist jedenfalls ein reichhaltiges Problem und eine gute Gelegenheit, das in der Mathematik so wichtige Prinzip der Verallgemeinerung bzw. Variation zu thematisieren, Fragen der Art zu stellen „Was ist, wenn …?" (hier: wenn man Dreieck durch Viereck ersetzt?)

Problem 2: Wenn man in einem Quadrat die Eckpunkte mit dem „Mittelpunkt" verbindet, sind die vier entstehenden Teildreiecke natürlich gleich groß (sogar kongruent, aus Symmetriegründen). Wie ist das bei anderen (konvexen[1]) Vierecken? Gibt es da auch immer so einen inneren Punkt P, der – verbunden mit den vier Eckpunkten – das Viereck in vier gleich große Dreiecke teilt? Wenn ja, in welchen Fällen? Ist er eindeutig? Wenn nein, warum nicht? (**Abb. 4**)

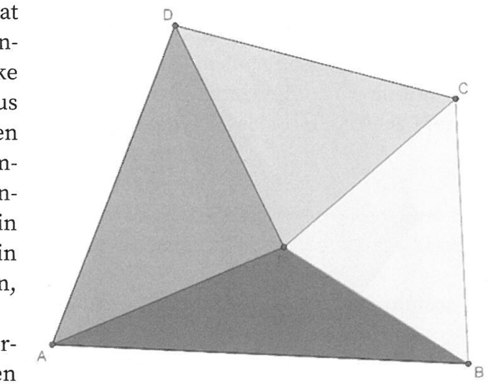

Abb. 4 Punkt im Inneren des Vierecks, Teildreiecke

Bei dieser Frage kann man wieder einerseits zunächst rein experimentell herangehen (DGS-Experimente) oder andererseits auch durch theoretisches Überlegen. Schnell wird klar sein, dass es auch bei Rechtecken und sogar bei Parallelogrammen so einen Punkt geben wird (Diagonalenschnittpunkt = Mittelpunkt), denn da sind die entstehenden Dreiecke ja sogar wieder kongruent. Eine direkt anschließende Frage wäre (leicht zu beantworten): Warum gibt es im Fall eines Parallelogramms neben dem Diagonalenschnittpunkt keinen weiteren solchen Punkt (Eindeutigkeit)?

[1] In weiterer Folge wird immer „konvex" vorausgesetzt, ohne das jedes Mal dazuzuschreiben.

Es bleibt allerdings die nicht mehr ganz so leicht zu beantwortende, aber interessante Frage, ob es außer den Parallelogrammen weitere Vierecktypen gibt mit der Eigenschaft: Das Viereck hat einen inneren Punkt, der durch die Verbindung mit den vier Eckpunkten zu einer gleichmäßigen Flächenaufteilung führt.

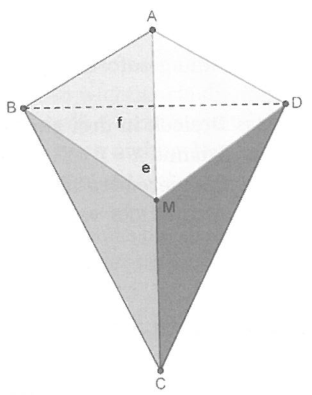

Abb. 5 Drachen, vier gleich große Teildreiecke genau bei $P = M$

An dieser Stelle wird man vielleicht DGS-Experimente durchführen und weitere Vierecktypen probieren, z. B. Trapeze bzw. Drachen. Bei Trapezen ($\neq$ Parallelogrammen) wird man nicht fündig werden, aber bei Drachen schon: Der Mittelpunkt M der Symmetriediagonale e hat diese Eigenschaft (**Abb. 5**; und nur dieser Punkt: warum genau?).

Die zugehörige Begründung beim Drachen sollte nicht schwerfallen. Gibt es weitere Vierecktypen mit dieser Eigenschaft? Hier werden Lernende vermutlich experimentell nicht weiterkommen, an dieser Stelle muss wahrscheinlich ein Hinweis durch die Lehrperson kommen. Der rechte Winkel zwischen e und f geht in die Begründung ja gar nicht ein, wesentlich scheint nur zu sein, dass f durch e halbiert wird. Wenn man auf die Bedingung $e \perp f$ verzichtet, erhält man einen sogenannten Schrägdrachen bzw. schiefen Drachen, ein Vierecktyp, der kaum im Repertoire der Schulgeometrie liegt (**Abb. 6a**).

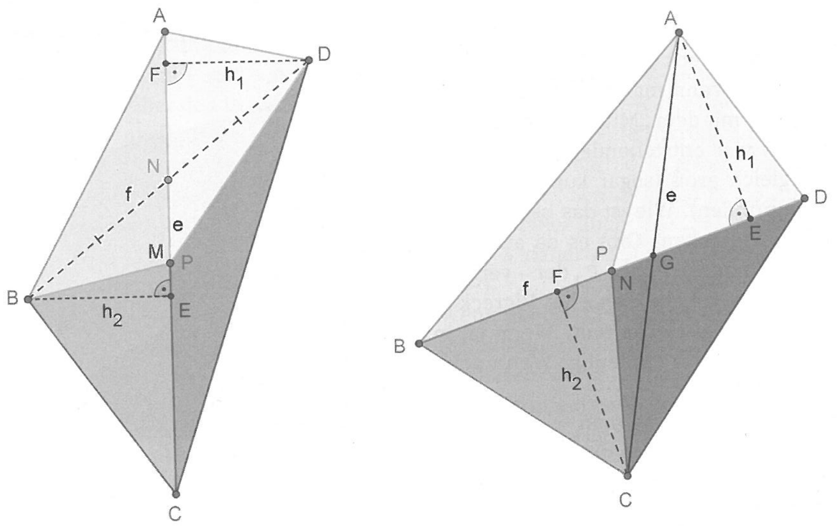

Abb. 6 (a) Schrägdrachen, vier gleich große Teildreiecke genau bei $P = M$ (b) Nur Schrägdrachen kommen infrage

Bei $P = M$ sind klarerweise die linken beiden und die rechten beiden Teildreiecke (**Abb. 6a**) jeweils gleich groß. Wegen der Kongruenz der Dreiecke BEN und DFN (N ist der Mittelpunkt von BD) gilt auch $h_1 = h_2$, woraus sich die Flächengleichheit aller vier Teildreiecke ergibt. Warum gibt es keinen anderen Punkt im Schrägdrachen mit dieser Eigenschaft?

Und erneut stellt sich die Frage: Gibt es noch andere Vierecktypen mit dieser Eigenschaft? Nein, und die zugehörige Begründung ist vermutlich deutlich schwieriger zu finden, wenn man sich nicht vorher mit Dreiecken auseinandergesetzt hat, hier wird insbesondere (*) wichtig werden!

Für das eben genannte Nein ist zu begründen: Wenn in einem Viereck ein innerer Punkt P zu einer gleichmäßigen Flächenaufteilung führt, dann muss das Viereck ein Schrägdrachen sein, d. h., es muss eine Diagonale geben, die die andere halbiert.

Sei also P so ein Punkt in einem Viereck mit gleichmäßiger Flächenaufteilung und N der Mittelpunkt der Diagonale BD. Dann muss P wegen (*) auf den beiden Geraden AN und CN liegen. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) Diese beiden Geraden fallen zusammen. Dann sind die Punkte A, N, P, C kollinear und die Diagonale $e = AC$ halbiert $f = BD$ (**Abb. 6a**).

(2) Diese beiden Geraden fallen nicht zusammen. Dann folgt daraus sofort $P = N$ (Schnittpunkt der beiden Geraden, **Abb. 6b**), und wegen der Flächengleichheit $|\Delta ABN| = |\Delta BCN|$ gilt zunächst $h_1 = h_2$ und die Diagonale $f = BD$ halbiert in weiterer Folge $e = AC$ (wegen der Kongruenz der Dreiecke FCG und EAG, dabei ist G der Diagonalenschnittpunkt).

Selbst wenn man im Regelunterricht zu einer Begründung dieses Nein nicht mehr kommt (das ist nicht schlimm), hat man schon ein gutes Stück geschafft, man hat Mathematik als Prozess betrieben, und das ist auch sehr wichtig! Aber alle zugehörigen Begründungen sind von ganz elementarer Natur, es sind keine besonderen Tricks nötig, Lernende haben hier in Gruppenarbeit gute Chancen, auch selbstständig erfolgreich zu arbeiten.

Es gibt für dieses Phänomen auch noch andere Beweise, z. B. einen analytischen von H. Walser (https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/V/Viereck-Viertelung2/Viereck-Viertelung2.htm), bei dem affine Invarianz und Determinanten eine tragende Rolle spielen. Daher wird dieser Beweis für den Schulunterricht eher nicht favorisiert werden. Auf einen anderen, leicht nachvollziehbaren elementargeometrischen [Pillay/Pillay 2010] wurde ich von M. de Villiers (Südafrika) aufmerksam gemacht. Dort werden auch noch weitere zugehörige Literaturstellen angegeben und zunächst das folgende nützliche Lemma bewiesen:

Lemma: Eine Diagonale eines (nicht notwendig konvexen) Vierecks halbiert das Viereck flächenmäßig genau dann, wenn sie die andere Diagonale halbiert.

Mit diesem lässt sich dann relativ leicht folgender Satz beweisen:

Satz: Ein Viereck hat genau dann einen inneren Punkt, der zu einer gleichmäßigen Flächenaufteilung führt, wenn es eine Diagonale gibt, die die andere halbiert (d. h., das Viereck ist ein Schrägdrachen).

Auch das ist für den Unterricht ein gut gangbarer Weg, um zu dieser Erkenntnis zu kommen.

Wenn aber im Unterricht der oben skizzierte Weg eingeschlagen wurde (z. B. gemeinsam im Klassenverband), wäre der Beweis dieses Lemmas und damit dann des erwähnten Satzes eine gute Gelegenheit, die Lernenden in selbstständiger Arbeit (Gruppenarbeit) an Begründungen arbeiten zu lassen (denn die Beweisführung ist sehr eng mit dem oben skizzierten Weg verbunden).

Eine weitere mögliche anschließende, nun leicht lösbare Aufgabe für Lernende wäre

Problem 3: Zeige, dass ein Trapez genau dann einen inneren Punkt P mit gleichmäßiger Flächenaufteilung hat, wenn es ein Parallelogramm ist.

Bemerkungen:

- Insgesamt hängt dieses Thema mit jenem Phänomen zusammen, das in HUMENBERGER/SCHUPPAR [2016] beschrieben wurde: Dort ging es um die Summengleichheit der Flächeninhalte gegenüberliegender Dreiecke, hier um die Flächengleichheit aller vier Teildreiecke in einem Viereck.
- Schon im Bereich der Vierecke sieht man, dass die notwendige Gleichheit zwischen Schwerpunkt und Punkt mit gleichmäßiger Flächenaufteilung ein Spezifikum von Dreiecken ist. Schon bei Schrägdrachen ($\neq$ Parallelogramm) ist der Punkt mit gleichmäßiger Flächenaufteilung weder der Ecken- noch der Flächenschwerpunkt. Ecken- und Flächenschwerpunkte existieren ja bei allen Vierecken, Punkte mit gleichmäßiger Flächenaufteilung jedoch nur bei Schrägdrachen.

Man muss einerseits zugeben, dass der Schrägdrachen nicht allzu oft vorkommt in der Elementargeometrie, aber mit diesem Phänomen tritt er andererseits prominent in Erscheinung, denn so einen Punkt zu haben, der mit den Eckverbindungen zu gleichmäßiger Flächenaufteilung führt, ist ja durchaus eine interessante und bemerkenswerte Eigenschaft, und diese charakterisiert offenbar den Schrägdrachen!

Ein weiterer Grund für die Behandlung des Schrägdrachens im Unterricht ist die durch ihn entstehende bessere Symmetrie des Hauses der Vierecke (in den unteren Etagen), von dem es ja viele Versionen gibt. In vielen dieser Häuser liegt in der ersten Etage über dem allgemeinen Viereck (sozusagen als erster Spezialfall) nur das Trapez, ganz allein, in der zweiten Etage dann in bekannter Weise Drachen, Parallelogramm und gleichschenkliges (achsensymmetrisches) Trapez, wobei aber nur Parallelogramm und gleichschenkliges Trapez eine Verbindung zum darunterliegenden Trapez haben, der Drachen eben nicht, hier ist also eindeutig eine unsymmetrische Stelle in diesem Haus (vgl. **Abb. 7**, wenn in der 1. Etage nur das Trapez wäre). Das lässt sich beheben, wenn man in der Etage des Trapezes zumindest den Schrägdrachen mit ins Boot holt. Man kann dort auch das Sehnenviereck und das Tangentenviereck aufzählen und erhält dann **Abb. 7**.

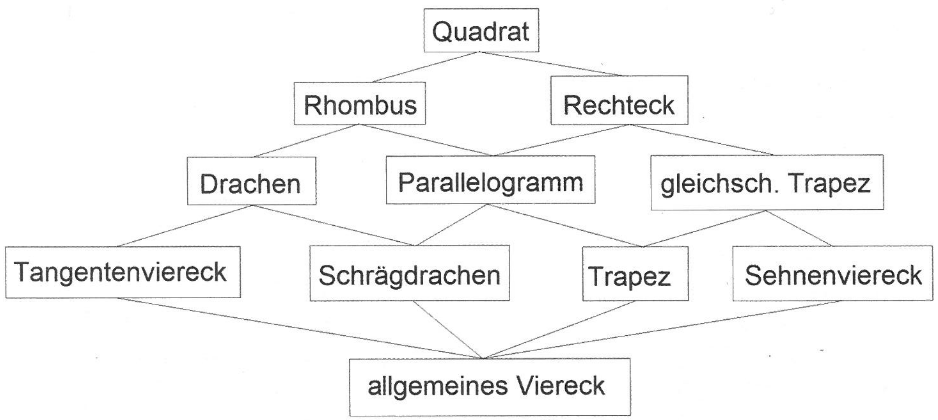

Abb. 7 Haus der Vierecke, inkl. Schrägdrachen, Tangenten- und Sehnenviereck

4 Verallgemeinerung auf Polygone

Mithilfe des obigen Lemmas lässt sich auch leicht eine notwendige und hinreichende Bedingung für allgemeine Polygone (n Ecken) angeben, dass ein innerer Punkt existiert, der zu einer gleichmäßigen Flächenaufteilung (n paarweise gleich große Dreiecke) führt. Diese Bedingung ist bei einem konkret vorgegebenen Polygon dann leicht zu überprüfen; nicht so leicht ist es, so ein (nicht regelmäßiges) Polygon zu konstruieren (**Abb. 9**).

Satz [vgl. PILLAY/PILLAY 2010, S. 19]: Sei $A_1A_2...A_n$ ein Polygon und für je drei aufeinanderfolgende Eckpunkte X,Y,Z des Polygons sei Y' der Mittelpunkt von XZ . Dann gilt:

Q ist ein innerer Punkt des Polygons $A_1A_2...A_n$ mit gleichmäßiger Flächenaufteilung $\Leftrightarrow$ die n Geraden PP' (P läuft dabei durch alle n Eckpunkte) gehen alle durch Q (**Abb. 8**).

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Der Punkt Q teile das Polygon gleichmäßig in Dreiecke auf (**Abb. 8**) und X,Y,Z seien aufeinanderfolgende Eckpunkte. Dann folgt mit obigem Lemma unmittelbar, dass Q auf allen solchen Geraden YY' liegt.

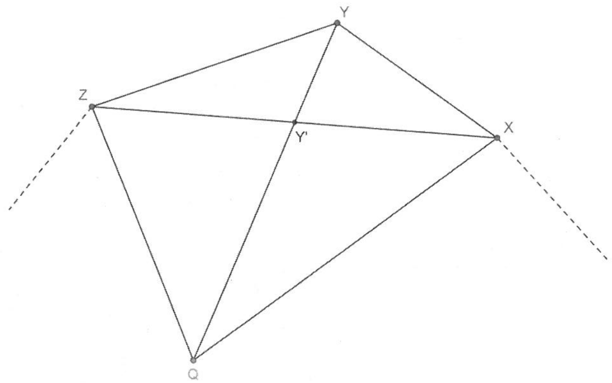

Abb. 8 Gleichmäßige Aufteilung bei Polygonen

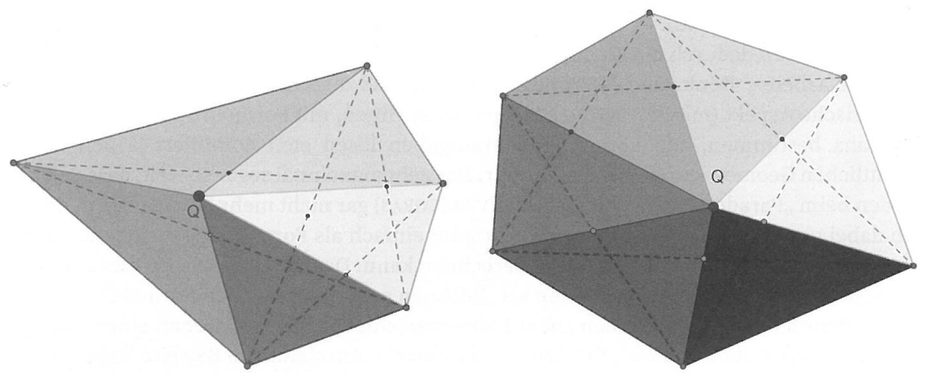

Abb. 9 Gleichmäßige Flächenaufteilung bei einem nicht regelmäßigen Fünf- und Sechseck

„$\Leftarrow$“: Wenn umgekehrt Q auf allen solchen Geraden YY' liegt, ist auch unmittelbar klar, dass die Dreiecke QXY und QYZ den gleichen Flächeninhalt haben (gleiche Grundlinie und Höhe). Wenn man dieses Argument „rundherum“ anwendet, folgt, dass Q eine gleichmäßige Flächenaufteilung ergibt.

Wenn man im Unterricht diese Verallgemeinerung auf Polygone macht, sollte man auch Rückschau halten; Lernende können dann selbstständig folgende Aussagen verifizieren:

1. Im Spezialfall Dreieck sind die drei genannten Geraden PP' einfach die Trägergeraden der Seitenhalbierenden, und da diese einander bekanntlich in genau einem Punkt schneiden (Schwerpunkt S), gilt bei allen Dreiecken $Q=S$.
2. Im Fall eines Vierecks ist die Kopunktalität der vier Geraden PP' äquivalent zur Aussage, dass eine Diagonale die andere halbiert, und dann ist Q der Mittelpunkt dieser halbierenden Diagonale.

5 Zusammenfassung und Gründe, die für dieses Thema sprechen

Dieses Thema vereinigt mehrere Vorzüge gleichzeitig, weshalb es sich für den Einsatz im Mathematikunterricht u. E. hervorragend eignet. Erstens kann damit mit den Lernenden ein gutes Stück Mathematik (Geometrie) wirklich betrieben werden (als „Prozess“), es beinhaltet eben nicht nur Aufgaben der Art „Man beweise, dass ...“, sondern Lernende können dabei selbst viel probieren, entdecken, vermuten ... und begründen, allesamt ganz wichtige mathematische Tätigkeiten!

Zweitens ist die zugrunde liegende Mathematik sehr nahe am Curriculum (Kongruenzen, Flächeninhalt von Dreiecken etc.) und die jeweiligen Begründungen sind wirklich elementar. So manche spannende Problemlöseaufgabe benötigt ja doch spezielle Tricks, was für den Einsatz im Regelunterricht nicht gerade förderlich ist. Hier sind keine Tricks nötig, weshalb Lernende (insbesondere bei Gruppenarbeiten) gute Chancen haben, viele Begründungen selbstständig zu finden.

Drittens wird mit der Erkenntnis, dass es bei Vierecken genau die Schrägdrachen sind, die durch einen inneren Punkt und dessen Verbindungen zu den Ecken gleichmäßig geteilt werden können, relativ wenig verbreitetes Wissen erreicht (was für den Unterricht keine Selbstverständlichkeit ist!).

Viertens wird dadurch die Elementargeometrie durchaus in ihrem Wesen etwas gestärkt, denn die Arbeits-, Denk- und Begründungsweisen sind allesamt genuin geometrisch. Der rechnerische Aspekt (mit PYTHAGORAS Längen ausrechnen, mit Formeln Flächeninhalte und Volumina bestimmen, zugehörige Umkehraufgaben lösen etc.) dominiert ja den durchschnittlichen Geometrieunterricht allzu sehr. Das geht manchmal sogar so weit, dass den Lernenden beim „Paradesatz der Geometrie“ (PYTHAGORAS) gar nicht mehr bewusst wird, dass es sich dabei um einen Flächensatz handelt, er wird einfach als Formel abgespeichert, mit der man Längen im rechtwinkligen Dreieck berechnen kann. Das ist schade, denn die Geometrie hat mehr und Interessanteres zu bieten als „Rechnen mit geometrischen Formeln“.

Fünftens kann man dabei auch gut auf die unterschiedlichen Funktionen eines Beweises eingehen (Verifikation – „dass“, Erklärung – „warum?“). Anschauliche Beweise haben oft das Potenzial, der Erklärung zu dienen, und dieser Aspekt der Erklärungsfunktion von Beweisen ist im Schulunterricht mindestens so wichtig wie der Aspekt der Verifikationsfunktion.

Sechstens wird an vielen Stellen deutlich, dass zwei Richtungen der Schlussweise nötig sind und eine entscheidende Rolle spielen, z. B. beim Thema Ortslinien: Wenn man weiß, dass die Punkte auf einer bestimmten Linie eine bestimmte Eigenschaft haben, weiß man noch nicht, ob es auch noch anderswo Punkte mit dieser Eigenschaft gibt. Oder: Wenn man nur weiß, dass Schrägdrachen eine bestimmte Eigenschaft haben, dann weiß man noch nicht, ob diese Eigenschaft nicht auch noch andere Vierecke haben. Da ist die Mathematik (Logik) eben genauer als unser Alltagsleben: Wenn jemand sagt: „Wenn das Wetter morgen schön ist, werde ich spazieren gehen“, dann ist ja streng logisch keine Aussage darüber getroffen, was passiert, wenn es morgen regnet, aber jede/-r von uns wird im Alltag so eine Aussage dahingehend interpretieren, dass damit auch gemeint ist: „Wenn das Wetter morgen NICHT schön ist, werde ich NICHT spazieren gehen“, anders formuliert: „NUR wenn das Wetter morgen schön ist, werde ich spazieren gehen.“ Aber bei den Schrägdrachen geht das eben nicht so einfach ...

Literatur

[1] HUMENBERGER, H. & SCHUPPAR, B. (2016): Flächenausgleich bei Weiß und Grau in Vierecken – der Satz von ANNÉ und sein Umfeld. In: Der Mathematikunterricht **62**(2016) 5, 26–36.

[2] MEYER, J. (1997): Zur Kopunktalität der Seitenhalbierenden. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **50**(1997)6, 339–340.

[3] MEYER, M., & PREDIGER, S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. In: Praxis der Mathematik in der Schule **51**(30), 1–7.

[4] PILLAY, S. & PILLAY, P. (2010): Equipartitioning and Balancing Points of Polygons. In: PYTHAGORAS, 71, 13–21 (Juli 2010). https://pythagoras.org.za/index.php/pythagoras/article/view/2/9

[5] DE VILLIERS, M. (1999): The Role and Function of Proof with Sketchpad. https://carma.newcastle.edu.au/jon/Preprints/Papers/JMB%20solo/ICMI%2019/Related/mdv%20proof.pdf