

# Bereicherung von Problemlöseprozessen durch GeoGebra bei einem Beweis ohne Worte als Ausgangspunkt

## 1 Ein schöner Beweis ohne Worte

Durch eine E-Mail von GRÉGOIRE NICOLLIER wurde ich erstens auf ein schönes elementar-geometrisches Problem aufmerksam, gleichzeitig kam auch eine wirklich schöne Lösung mit, ein Beweis ohne Worte [NICOLLIER 2015]. Dabei ist ein Kontext einer fairen Pizzateilung angesprochen: Man stelle sich eine Pizza in Form eines gleichseitigen Dreiecks vor; bei einer fairen Pizzateilung sollte jede Person gleich viel Fläche und gleich viel „Pizza-Rand“ bekommen, und das ist hier der Fall. Es gibt natürlich kaum solche Pizzen, und es ist auch nicht klar, wie man in Wirklichkeit die geforderten Teilungslinien realisieren sollte. Der Kontext des gerechten Pizzateilens ist in der Mathematik nichts Ungewöhnliches [vgl. auch HUMENBERGER 2015], gleichwohl sind die dahintersteckenden theoretischen Überlegungen und Begründungen wichtiger als der durch den Kontext suggerierte Realitätsbezug.

Die Problemstellung aus NICOLLIER [2015] lautet:

*If an equilateral triangular pizza is divided by six straight cuts going from an arbitrary pizza point to the vertices and to the sides at right angles, two persons share the pizza and the crust fairly by taking alternate slices.*

Und die zugehörige Abbildung (Abb. 1) macht „ohne Worte“ alles klar.

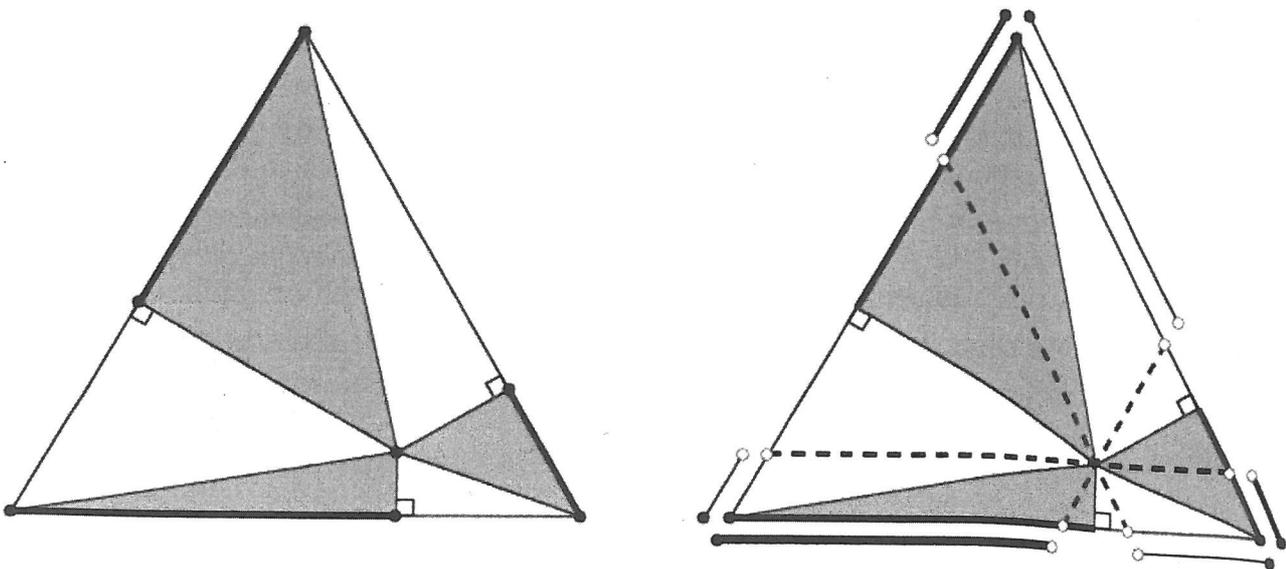


Abb. 1: Beweis ohne Worte [NICOLLIER 2015; Screenshot: geogebra.org]

Man kann solche Beweise ohne Worte auch im Unterricht nutzen, nämlich dazu die zugehörigen *Worte der Erklärung* zu finden. Das ist eine Form des Umgehens mit Beweisen, die

vielleicht allgemein mehr Beachtung finden sollte. Ähnlich einfache und trotzdem substanzielle Beweise zu finden ist eine ganz andere Sache, aber sie zu interpretieren sollte auch für Lernende gut machbar sein: Was sieht man in der Skizze? Was sagt das aus? Warum ist dadurch die Behauptung bewiesen? Hier wäre die Sachlage auch noch hinreichend einfach, dass man daraus auch eine Problemlöseaufgabe für Schüler/-innen bzw. Studierende machen kann (d. h. ohne vorgelegte „Beweisfigur“), aber einen vorhandenen Beweis ohne Worte mit Worten zu versehen ist sicher auch eine lohnende Aufgabe.

## 2 Wie ist das bei nicht gleichseitigen Dreiecken?

Vermutlich wird das in nicht gleichseitigen Dreiecken wohl nicht mehr gelten, dass sich alles so schön zusammenfügt, aber trotzdem liegt folgende Frage nahe.

Zunächst eine bequeme Sprachregelung:

- „Flächenhalbierungseigenschaft“: Die Gesamtgröße der Pizzastücke ist bei Grau und Weiß gleich.
- „Randhalbierungseigenschaft“: Die Gesamtlänge der Pizzaränder ist bei Grau und Weiß gleich.

### Frage

Gibt es bei *nicht gleichseitigen* dreieckigen Pizzen – mit oben angegebener Teilungsmethode – auch solche inneren Punkte mit der *Flächen- und Randhalbierungseigenschaft*? Wenn ja, wo liegen solche, wenn nein, warum nicht?

Diese Form der Frage- bzw. Problemstellung ist sicher interessanter, als die Ergebnisse schon vorwegzunehmen und nur mehr nach Begründungen zu fragen. Wir verlassen jetzt den Pizza-Kontext und widmen uns dem dahintersteckenden *geometrischen* Problem.

Auf obige Frage findet man wohl schnell eine Antwort, denn es ist ja nicht nach der Menge aller solcher Punkte gefragt: Bei *gleichschenkligen* Dreiecken funktioniert es für Punkte auf der *Symmetrieachse*. Im allgemeinen Dreieck ist der Inkreismittelpunkt  $I$  ein Punkt mit dieser Eigenschaft (auch der Umkreismittelpunkt  $U$  bei spitzwinkligen Dreiecken, der in diesem Fall ja im Dreiecksinneren liegt). Die (nicht leicht zu beantwortende) Frage, ob es noch andere solche Punkte gibt, war hier absichtlich nicht gestellt!

Eine andere interessante Form der Fragestellung ergibt sich, wenn man sich auf *eine* der beiden Halbierungseigenschaften beschränkt (dann werden wir wieder nach *allen* Punkten mit einer gewissen Eigenschaft fragen).

Im Falle der Flächenhalbierungseigenschaft ist die Sachlage deutlich komplizierter (zu kompliziert für Schüler/-innen, auch für Studierende), aber die Untersuchung der Randhalbierungseigenschaft ist ein auch für Lernende interessanter Fall.

### Problem 1

Gegeben ist ein allgemeines Dreieck  $ABC$ . Gibt es Punkte  $P$  im Inneren des Dreiecks, die die „Randhalbierungseigenschaft“ haben:  $|\text{Rand grau}| = |\text{Rand weiß}|$  (**Abb. 2**)?

Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, finde alle diese Punkte.

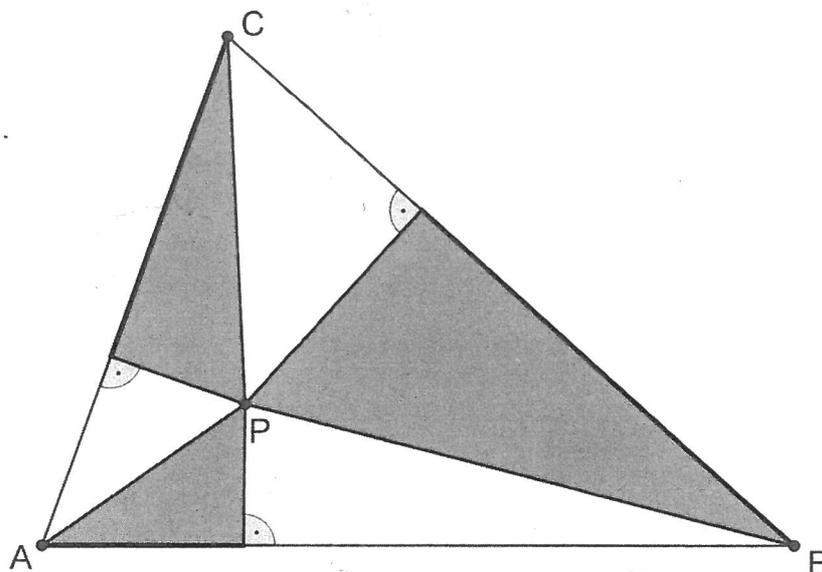


Abb. 2: Welche Punkte  $P$  haben die „Randhalbierungseigenschaft“? (Screenshot: geogebra.org)

Hier haben Lernende mehrere Möglichkeiten des Herangehens:

1. Experimentelles Explorieren der Lage mit DGS (Dynamische Geometrie Software wie z. B. GeoGebra): Man konstruiert die gegebene Konstellation und benutzt das DGS als Messinstrument. Man verschiebt den Punkt  $P$  und interessiert sich für die Differenz  $|\text{Rand grau} - |\text{Rand weiß}|$ : Für welche Lagen von  $P$  wird dieser Wert 0? Man wird feststellen, dass es viele solche Punkte gibt und dass sie auf einer Geraden zu liegen scheinen. Aber was ist das für eine Gerade?
2. Andererseits gibt es auch zwei bekannte „besondere Punkte“, deren „Randhalbierungseigenschaft“ sehr rasch gesehen und auch begründet werden kann (auch ohne DGS), nämlich der Umkreismittelpunkt  $U$  (kann außerhalb liegen, bei stumpfwinkligen Dreiecken) und der Inkreismittelpunkt  $I$ . Aber auch wenn man auf diese Weise vorgegangen ist, kann GeoGebra gute Dienste leisten: Man kann experimentell bestätigen, dass alle Punkte auf der Verbindungsgeraden  $IU$  diese Eigenschaft zu haben scheinen.

Egal, wie man auf „die Gerade“ gekommen ist (trial and error, gezieltes Verbinden von  $U$  und  $I$ ), man wird rein experimentell feststellen, dass Punkte auf der Verbindungsgeraden<sup>1</sup> von  $U$  und  $I$  diese Eigenschaft haben und andere Punkte nicht. Solche experimentellen Phasen waren früher (ohne DGS) nicht möglich. Daher waren solche Formulierungen wie oben bei Problem 1 kaum möglich im Unterricht. Aber diese sind ohne Zweifel interessanter und spannender als eine Formulierung wie: „Man zeige, dass alle Punkte auf der Verbindungsgeraden  $IU$  die Randhalbierungseigenschaft haben und andere Punkte nicht<sup>2</sup>.“ Das soll nicht bedeuten, dass der zugehörige Beweis unwichtig wäre oder dergleichen, im Gegenteil! Aber die Phase des Experimentierens, Probierens und Vermutens würde bei dieser Formulierung wegfallen, und das sind auch wichtige Phasen beim *Betreiben von Mathematik* (Prozess!). Ohne diese Phase wäre das Phänomen sicher irgendwie „trockener“ und weniger spannend.

<sup>1</sup> Dabei interessieren wir uns bei diesem Problem nur für jene Punkte auf dieser Geraden, die im Dreiecksinneren liegen (Abb. 3).

<sup>2</sup> Solche Formulierungen sind bei Lernenden, die sowieso von sich aus besonders motiviert sind (Mathematik-Olympiade, Studierende etc.), durchaus üblich, aber für den Regelunterricht eröffnet die experimentelle Seite doch eine wertvolle weitere „Dimension“.

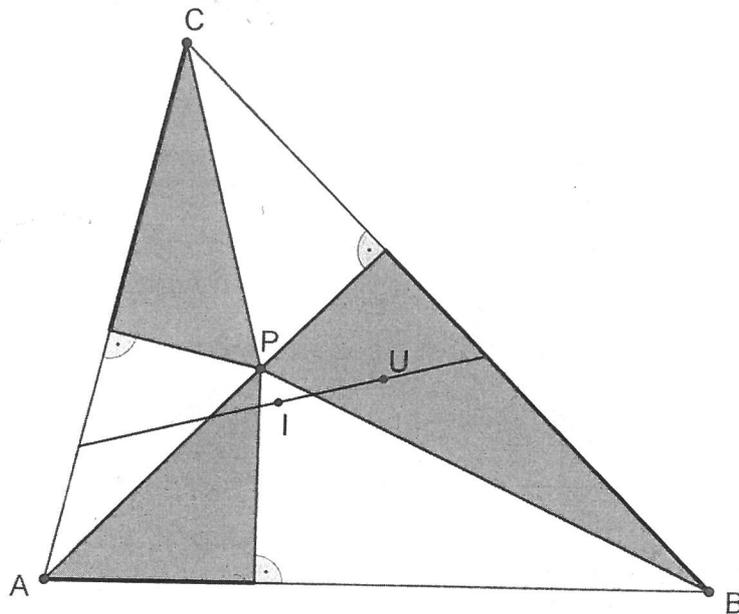


Abb. 3: Verbindungsgerade zwischen  $U$  und  $I$  (Screenshot: geogebra.org)

Nach der Entdeckung und experimentellen Bestätigung dieses Phänomens wird man vermutlich (auch ohne weiteren Beweis) nicht mehr zweifeln, *dass* dies so ist, aber die Frage nach einer Erklärung (*warum* ist das so?) kann natürlich nicht über DGS-Experimente laufen. Und die Frage nach dem *Warum* ist ja bei Beweisen im Lernprozess mindestens so wichtig wie die Frage nach der Sicherheit, *dass* es so ist.

Schon an dieser Stelle ist es angebracht, kurz Rückschau zu halten: Im Fall des gleichseitigen Dreiecks fallen  $U$  und  $I$  zusammen, sodass es diese Gerade gar nicht eindeutig gibt. So gesehen passt dieses Resultat auch zum Fall eines gleichseitigen Dreiecks ( $P$  darf im gesamten Dreiecksinneren liegen). Und für den Fall eines gleichschenkligen Dreiecks ist die Verbindungsgerade zwischen  $U$  und  $I$  die Symmetrieachse, auch ein plausibles Ergebnis!

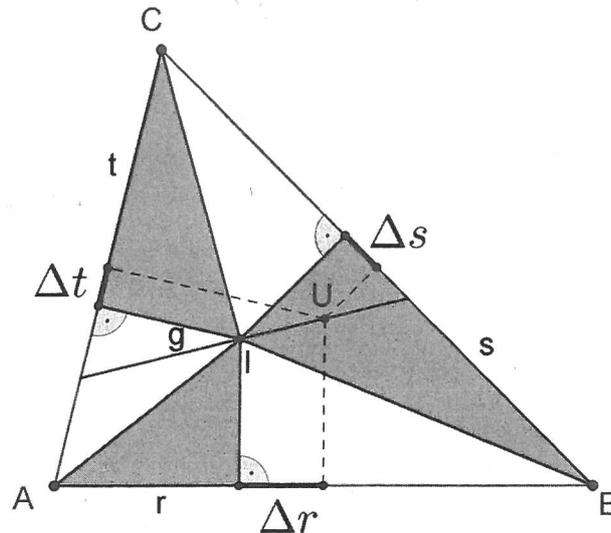
Im Folgenden sei  $g$  die Verbindungsgerade zwischen  $U$  und  $I$  bei einem nicht gleichseitigen Dreieck  $ABC$ .

Die nun anstehende Begründung (Beweis) muss aus zwei Teilen (Richtungen) bestehen:

1. Alle Punkte auf  $g$  haben die Randhalbierungseigenschaft.
2. Die anderen Punkte haben diese Eigenschaft nicht.

Dann können wir mit Fug und Recht behaupten: Die Menge aller Punkte des Dreiecksinneren mit der Randhalbierungseigenschaft ist das zugehörige auf  $g$  liegende Geradenstück („geometrischer Ort“). Hier wird wieder einmal das spezifisch Mathematische wahrnehmbar. Im Alltag kümmert man sich oft nicht um beide Richtungen bei Behauptungen bzw. Aussagen, oft wird auch gar nicht so genau unterschieden. Z. B. wenn jemand sagt: „Wenn es heute Nachmittag nicht regnet, dann werde ich spazieren gehen“, dann meint er wohl auch damit: „Wenn es regnet, werde ich nicht spazieren gehen“, aber streng logisch genommen ist das in der ersten Aussage nicht enthalten. In der Mathematik muss man hier eben präziser sein!

Für die folgenden Begründungen bietet es sich an, mit *gerichteten Größen* zu arbeiten. Da  $I$  und  $U$  die Randhalbierungseigenschaft haben, ist klar, dass beim Übergang von  $I$  zu  $U$  entlang der Geraden  $g$  die Gesamt-Rand-Veränderung  $\Delta r + \Delta s + \Delta t$  den Wert 0 hat (Abb. 4). Dabei sind  $\Delta r, \Delta s, \Delta t$  mit Vorzeichen behaftete Größen (bei Verlängerung positiv, bei Verkürzung negativ).



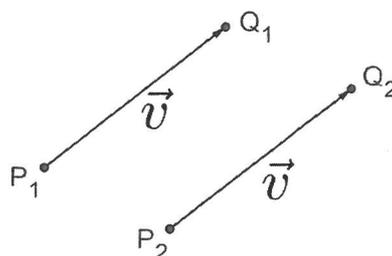
**Abb. 4:**  $\Delta r + \Delta s + \Delta t = 0$  beim Übergang  $P = I$  zu  $P = U$ ; hier wären  $\Delta r > 0$  und  $\Delta s, \Delta t < 0$  (Screenshot: geogebra.org)

Nun gilt aufgrund des Strahlensatzes: Wenn  $P$  (ausgehend von  $P = I$ ) zu einem *anderen* Punkt  $P \neq I \in g$  wandert mit  $\overline{IP} = k \cdot \overline{IU}$ , dann werden die Veränderungen  $\Delta r, \Delta s, \Delta t$  alle mit  $k$  multipliziert, d. h., die nun zugehörigen Veränderungen sind dann  $k \cdot \Delta r, k \cdot \Delta s, k \cdot \Delta t$ , und für deren Summe ergibt sich  $k \cdot \Delta r + k \cdot \Delta s + k \cdot \Delta t = k \cdot \underbrace{(\Delta r + \Delta s + \Delta t)}_0 = 0$ . Damit ist 1. bewiesen.

Bei der nun folgenden Rückrichtung ist ziemlich sicher Hilfe durch die Lehrkraft nötig. Aber das macht auch nichts. Wichtiger ist, dass Lernende verstehen, dass es da überhaupt noch etwas zu beweisen gibt, und dass sie durch eigene DGS-Experimente so weit in den *Prozess des Betreibens von Mathematik* involviert sind, dass sie experimentell gesehen haben: Punkte, die nicht auf  $g$  liegen, scheinen die Randhalbierungseigenschaft nicht zu haben (womit die Frage nach dem *Dass* aus Schülersicht ziemlich geklärt sein dürfte; aber die Frage nach dem *Warum* bleibt natürlich).

Zuerst setzen wir für die noch fehlende Rückrichtung 2. eine *funktionale Brille* auf: Sei  $f(P) := r + s + t$  die Längensumme der grauen Randstücke.

Dann gilt: Angenommen, wir kennen von zwei verschiedenen Punkten  $P_1 \neq P_2$  die zugehörigen Funktionswerte  $f(P_1) = c_1$  und  $f(P_2) = c_2$ . Wenn man nun beide Punkte um denselben Vektor  $\vec{v}$  verschiebt, d. h.,  $P_1 + \vec{v} = Q_1$  und  $P_2 + \vec{v} = Q_2$  (**Abb. 5**), so verändern sich die Funktionswerte von  $f$  dadurch genau gleich:  $f(Q_1) = c_1 + \Delta f$  und  $f(Q_2) = c_2 + \Delta f$  (denn  $\vec{v}$  hat ja eindeutige „Komponenten“ in den Richtungen der Dreieckseiten, und diese bestimmen ja  $\Delta r, \Delta s, \Delta t$  und damit  $\Delta f$  – egal von welchem Punkt aus).

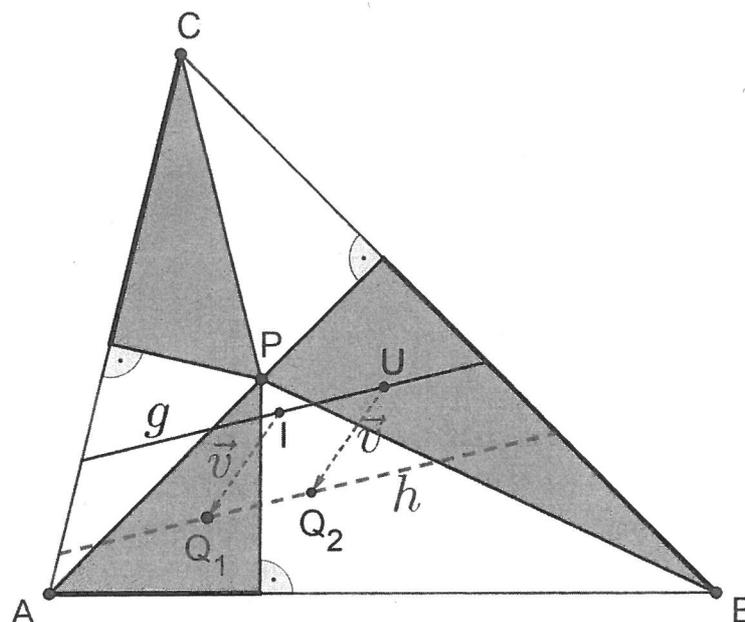


**Abb. 5:** Verschiebung um denselben Vektor  $\vec{v}$  (Screenshot: geogebra.org)

Dieses einfache Phänomen hat zwei wichtige Konsequenzen.

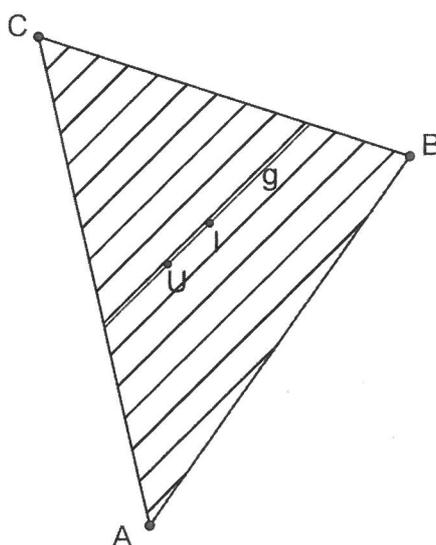
### 1. Konsequenz

Punkte auf *Parallelen*  $h$  zu  $g$  haben alle gleiche  $f$ -Werte (**Abb. 6**), denn zu jeder Parallelen kann man von  $I$  und  $U$  aus zwei gleiche Vektoren  $\vec{v}$  zeichnen.



**Abb. 6:** Gleiche  $f$ -Werte auf Parallelen  $h$  zu  $g$  (Screenshot: geogebra.org)

Das lässt sich wieder leicht experimentell bestätigen: Wenn man mit DGS einen Punkt auf einer Parallelen zu  $g$  verschiebt, ändern sich die Funktionswerte von  $f$  nicht. Außerdem wird man feststellen, dass die Funktionswerte auf einer Seite von  $g$  *kleiner* als der halbe Dreiecksumfang sind, auf der anderen Seite *größer*. Jetzt muss nur noch begründet werden, dass verschiedene Parallelen auch verschiedene  $f$ -Werte haben, dann kann man behaupten: Durch die Parallelen zu  $g$  wird die Dreiecksfläche in „Gebiete mit jeweils konstanten, aber verschiedenen  $f$ -Werten“ eingeteilt (**Abb. 7**).



**Abb. 7:** Punkte auf verschiedenen Parallelen zu  $g$  haben verschiedene  $f$ -Werte (Screenshot: geogebra.org)

## 2. Konsequenz

Bei einem Verschiebungsvektor  $2\vec{v}$  fällt die Veränderung  $\Delta f$  der Funktionswerte doppelt so groß aus wie bei  $\vec{v}$ . D.h., wenn sich eine Parallele  $p_2$  doppelt so weit von  $g$  entfernt befindet wie  $p_1$ , dann ist für Punkte auf  $p_2$  die Änderung  $\Delta f$  doppelt so groß wie für Punkte auf  $p_1$ .

Wenn wir also zeigen können, dass es irgendeine Parallele zu  $g$  gibt mit  $f$ -Werten, die sich von jenen auf  $g$  unterscheiden, dann ist alles gezeigt. Und dieser Nachweis fällt für nicht gleichseitige Dreiecke nicht schwer:

In nicht gleichseitigen Dreiecken gibt es mindestens zwei Winkelhalbierende, die nicht auf Höhengeraden liegen (o.B. d.A.: die Winkelhalbierende von  $\alpha$ ). Wenn man  $P$  von der Ausgangslage  $I$  entlang dieser Winkelhalbierenden verschiebt, dann ändert sich  $f$  (Abb. 8).

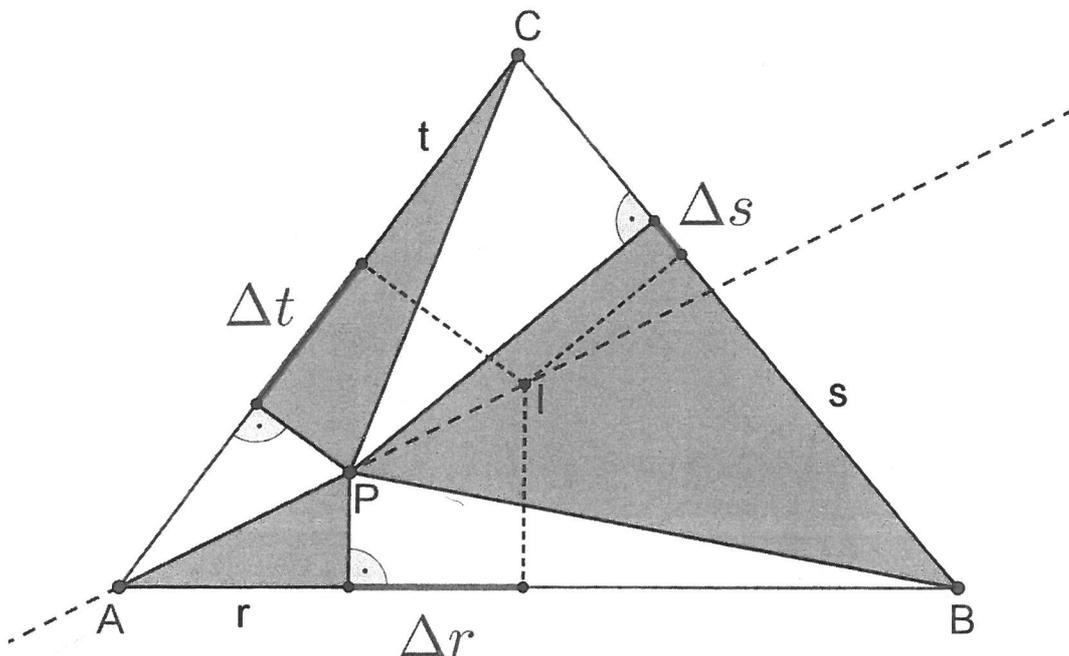


Abb. 8: Verschieben von  $P$  entlang der Winkelhalbierenden von  $\alpha$  (Ausgangslage:  $P = I$ ; Screenshot: geogebra.org)

Wir haben  $f(I) = r + s + t$  und  $f(P) = (r + \Delta r) + (s + \Delta s) + (t + \Delta t)$ ; weil  $P$  auf der Winkelhalbierenden von  $\alpha$  liegt, gilt  $\Delta r = -\Delta t$  (in Abb. 8 ist  $\Delta r < 0$ ); die zugehörige Höhe (der Seite  $BC$ ) liegt sicher nicht auf dieser Winkelhalbierenden, daher gilt  $\Delta s \neq 0$  und damit  $f(P) \neq f(I)$ . Damit sind beide Richtungen nun vollständig gezeigt.

## 3 Eine andere Verallgemeinerung mit Ecktransversalen

Wir haben oben schon erwähnt, dass die Verallgemeinerung des Beweises ohne Worte aus Abschnitt 1 auf allgemeine Dreiecke bezogen auf den Flächenhalbierungsaspekt statt des Randhalbierungsaspektes deutlich schwieriger ist. Das Einzige, was daran auch wieder leicht zu sehen ist, ist, dass sowohl der Umkreismittelpunkt  $U$  als auch der Inkreismittelpunkt  $I$  wieder diese Halbierungseigenschaft (nur diesmal bezogen auf Flächen) haben. Aber der Rest ist kompliziert [als der gesuchte geometrische Ort ergibt sich ein spezieller Kegelschnitt durch  $U$  und  $I$ , die sogenannte *Stammler-Hyperbel*; siehe EMBACHER/HUMENBERGER 2019].

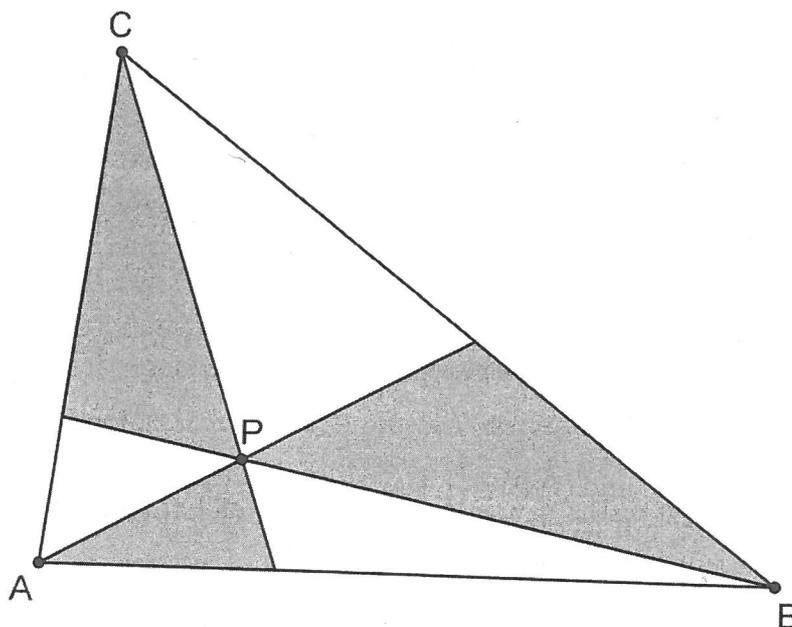
Wenn man aber beim Flächenaspekt eine andere Einteilung der Dreiecke vornimmt, und zwar durch Ecktransversalen, dann ergibt sich daraus wieder ein spannendes Problem, bei dem man mit elementaren Betrachtungen auskommt. Bei der Rückrichtung braucht man den Satz von CEVA, daher ist diese Richtung nicht von Schülern/-innen in selbstständiger Arbeit zu erwarten (ausgenommen Mathematik-Olympiade oder Ähnliches) und wird Studierenden des Lehramts im Fach Mathematik vorbehalten werden müssen. Aber auch da ist es keine Selbstverständlichkeit, dass der Satz von CEVA zu ihrem Repertoire gehört. Es macht aber auch nicht viel aus, wenn bei diesem Problem nur eine Richtung der Aussage thematisiert wird bei einer Begründung (Beweis). Auch wenn die andere Richtung bei der Begründung fehlt, gibt es dabei wieder einiges zu entdecken und zu begründen.

## Problem 2

Gegeben ist ein allgemeines Dreieck  $ABC$ . Gibt es Punkte  $P$  im Inneren des Dreiecks, die die „Flächenhalbierungseigenschaft“ haben:  $|Fläche\ grau| = |Fläche\ weiß|$  ?

Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, welche?

Als Teilungslinien werden diesmal aber einfach die drei Ecktransversalen durch  $P$  genommen, diese teilen das Dreieck wieder in 6 Teildreiecke, von denen wieder jedes zweite grau gefärbt ist (**Abb. 9**).

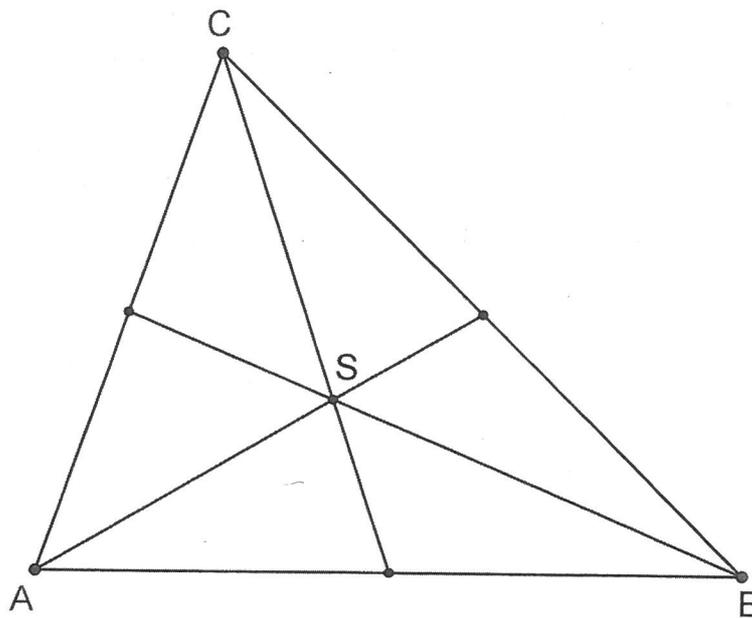


**Abb. 9:** Welche Punkte  $P$  im Dreiecksinneren haben die „Flächenhalbierungseigenschaft“? (Screenshot: geogebra.org)

Auch bei diesem Problem gibt es die beiden Zugangsweisen:

1. Probieren und Explorieren der Lage mit DGS (es als Messinstrument benutzen), ohne vorherige Überlegung zu speziellen Punkten. Die rein experimentelle Suche nach Lagen von  $P$  mit der Flächenhalbierungseigenschaft wird die drei Seitenhalbierenden als vermutete Lösung bringen. Am Anfang wird man zunächst relativ unsystematisch viele Lagen finden, aber wenn man dann einige solche Punkte „markiert“, wird das zugrundeliegende Muster (Seitenhalbierende) schnell klar werden.

2. Durch Überlegen spezielle Punkte finden: Wenn  $P$  einem Seitenmittelpunkt zustrebt, dann werden vier der sechs Dreiecke beliebig klein, und es bleiben zwei gleich große Dreiecke (grau, weiß) übrig. Außerdem wird man vermutlich auch schnell an den Schwerpunkt des Dreiecks denken, bei dem alle 6 entstehenden Dreiecke (weiße und graue) paarweise gleich groß sind. Somit hat man schon den Schwerpunkt und die drei Seitenmittelpunkte als mögliche Lagen von  $P$  (Flächenhalbierungseigenschaft). Es liegt dann schon ziemlich nahe, dass alle Punkte auf Seitenhalbierenden mögliche Lagen von  $P$  sind (**Abb. 10**). Aber bevor man sich da auf die Suche nach einem Beweis macht, wird man dies wohl zuerst überprüfen wollen mit DGS (z. B. GeoGebra), so nach dem Motto: Lohnt sich der Aufwand des Suchens nach einem Beweis, oder hat die Sache eh noch einen Haken? Und wirklich, DGS-Experimente bestätigen das auch eindrucksvoll.



**Abb. 10:** Die Seitenhalbierenden als Lösung? (Screenshot: geogebra.org)

Nun muss es wieder um die Klärung des *Warum* gehen (Beweis). Und wir haben wieder zwei Richtungen:

1. Alle Punkte auf den *Seitenhalbierenden* haben die Flächenhalbierungseigenschaft<sup>3</sup>.
2. Die anderen Punkte haben diese Eigenschaft nicht.

Als Vorbereitung dazu ist es von Vorteil, zwei bekannte Tatsachen wieder in Erinnerung zu rufen (mit dem Fokus: Wie kann das jeweils *genau* begründet werden?).

### Lemma

- Jede Parallele zu einer Seite in einem Dreieck wird durch die zugehörige Seitenhalbierende halbiert (**Abb. 11**). Mit anderen Worten (**Abb. 12**): Es liege  $P$  auf der Seitenhalbierenden zu  $C$ , und es seien  $D, E$  die Schnittpunkte der Ecktransversalen durch  $A$  bzw.  $B$  mit den Gegenseiten  $BC$  bzw.  $AC$ . Dann ist  $ED$  parallel zu  $AB$ .
- Zeichnet man auch noch die Diagonalen im entstehenden Trapez ein, so schneiden diese einander genau auf der Seitenhalbierenden (**Abb. 11**).

<sup>3</sup> Wir wollen uns auf das Dreiecksinnere beschränken, sodass es immer wirklich 6 Dreiecke gibt; daher schließen wir die Endpunkte der Seitenhalbierenden (Seitenmitten, Eckpunkte) aus.

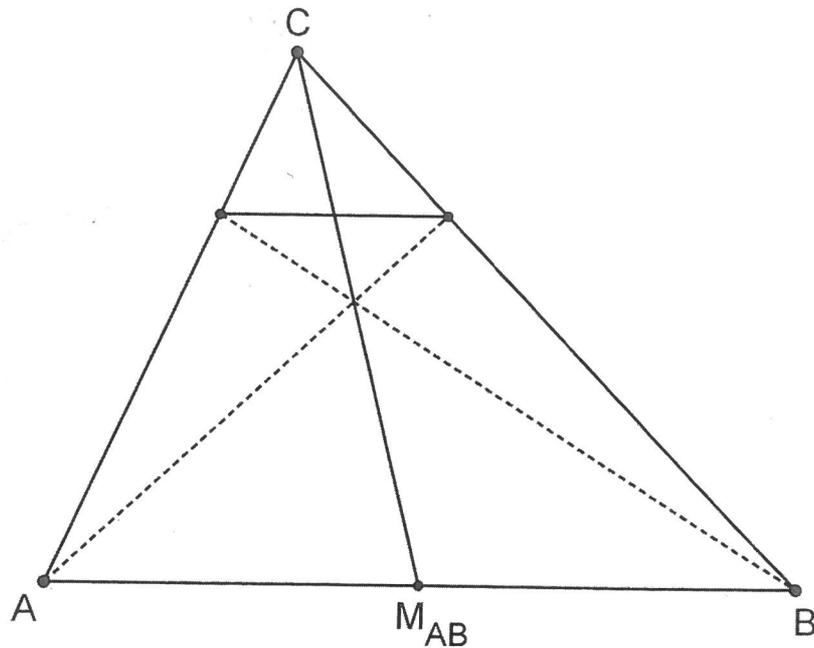


Abb. 11: Zwei bekannte Tatsachen – wie genau funktionieren mögliche Beweise? (Screenshot: geogebra.org)

### 3.1 Alle Punkte auf den Seitenhalbierenden haben die Flächenhalbierungseigenschaft

Wenn  $P$  auf einer Seitenhalbierenden liegt (o. B. d. A.  $P \in s_c$ , Abb. 12), dann sind natürlich die Dreiecke  $AM_{AB}P$  (grau) und  $M_{AB}BP$  (weiß) gleich groß. Weil  $ED$  parallel zu  $AB$  ist und die Dreiecke  $EPF$  und  $FPD$  gleich groß sind (folgt aus obigem Lemma), sind auch die Dreiecke  $APE$  (weiß) und  $PBD$  (grau) bzw. die Dreiecke  $EPC$  (grau) und  $PDC$  (weiß) gleich groß. Damit ist die Behauptung bewiesen.

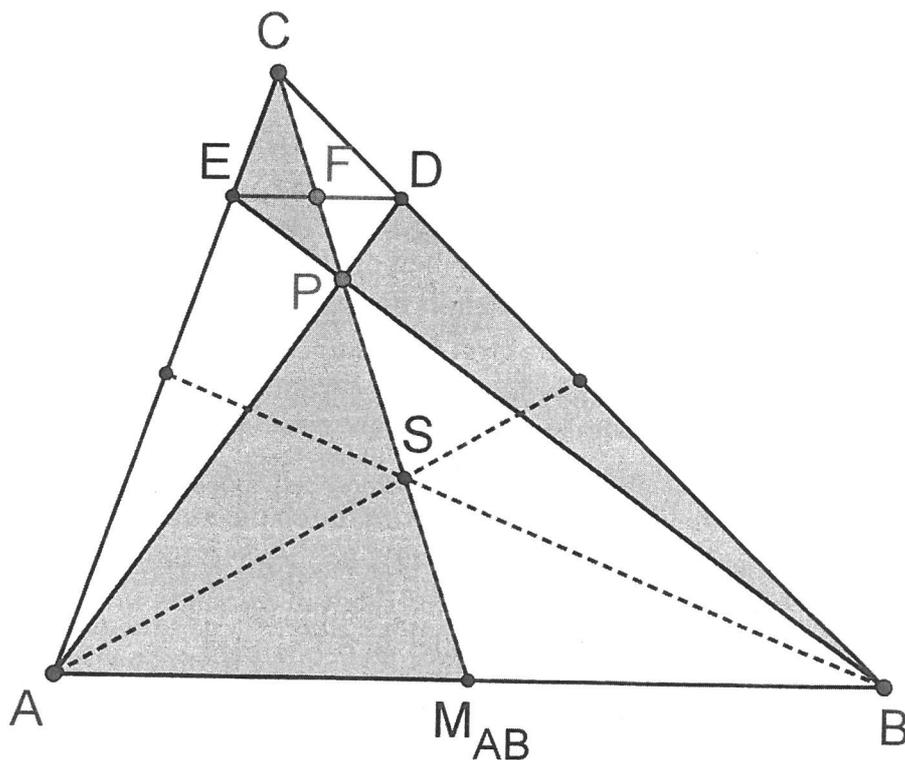


Abb. 12: Paarweise gleich große Dreiecke bei Weiß und Grau, wenn  $P \in s_c$  (Screenshot: geogebra.org)

### 3.2 Punkte, die nicht auf den Seitenhalbierenden liegen, haben die Flächenhalbierungseigenschaft nicht

Die nun folgende Rückrichtung ist leider nicht mehr so leicht und benötigt u. a. den Satz von CEVA. Sie kann also nicht als selbstständige Leistung von Lernenden erwartet werden. Wichtiger als ein korrekter selbstständiger Beweis dieser Rückrichtung ist – wie schon oben in Abschnitt 2 – das Bewusstsein, dass es nötig ist, diese Rückrichtung zu beweisen, um sagen zu können: Der geometrische Ort aller Punkte mit der Flächenhalbierungseigenschaft sind die drei Seitenhalbierenden. Zugehörige DGS-Experimente sind natürlich wieder leicht machbar, sodass die Überzeugung wächst: Außer Punkten auf den Seitenhalbierenden scheint es keine weiteren zu geben mit der Flächenhalbierungseigenschaft. Es ist auch gut möglich, auf diesen Beweis im Schulunterricht vollständig (bewusst) zu verzichten, d. h. auch die Lehrkraft führt diesen Beweis gar nicht vor. Bei einer Geometrie-Lehrveranstaltung für Lehramtsstudierende kann so ein Beweis durchaus thematisiert werden, aber eher nicht als Übungsaufgabe, sondern durch Lehrende.

Zum Beweis nehmen wir an, dass  $P$  nicht auf einer Seitenhalbierenden liegt (o. B. d. A. im Dreieck „links oben“, bei den anderen Dreiecken ginge die Begründung analog), und zeigen, dass  $P$  dann nicht die Flächenhalbierungseigenschaft haben kann. Die Vorgehensweise wird folgende sein: Wir verbinden  $P$  mit  $B$ , den entstehenden Schnittpunkt mit  $s_c$  bezeichnen wir mit  $P_1$  (Abb. 13).

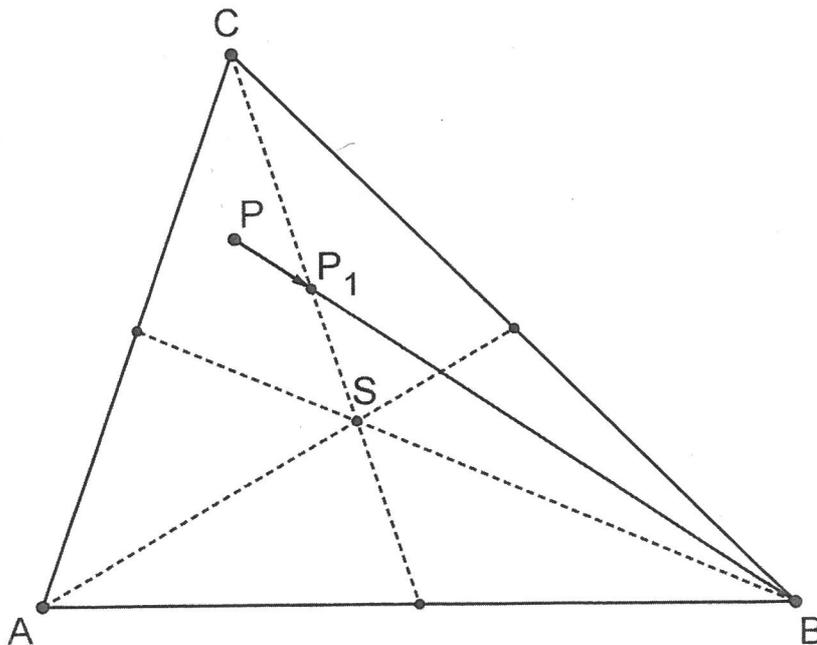


Abb. 13: Der Übergang  $P \rightarrow P_1$  (Screenshot: geogebra.org)

Was passiert nun mit den weißen bzw. grauen Flächen beim Übergang  $P \rightarrow P_1$ ?

Wenn wir zeigen können, dass die Flächenänderungen (von Weiß bzw. Grau) dabei nicht 0 sind, dann ist auch gezeigt, dass  $P$  die Flächenhalbierungseigenschaft nicht haben kann, weil sie ja  $P_1$  sicher hat (siehe Abschnitt 3.1).

Zu diesem Zweck sind in Abb. 14 jene Flächen, die beim Übergang  $P \rightarrow P_1$  die Farbe in Richtung Weiß  $\rightarrow$  Grau bzw. Grau  $\rightarrow$  Weiß wechseln, hervorgehoben durch Schachbrettmuster bzw. Schraffur. Ergänzt man in beiden Fällen das Viereck  $DP_1EP$ , so erhält man

Dreiecke, von denen wir zeigen müssen, dass sie nicht gleich groß sind (in unserem Fall: Das schraffierte Dreieck ist größer als jenes mit Schachbrettmuster).

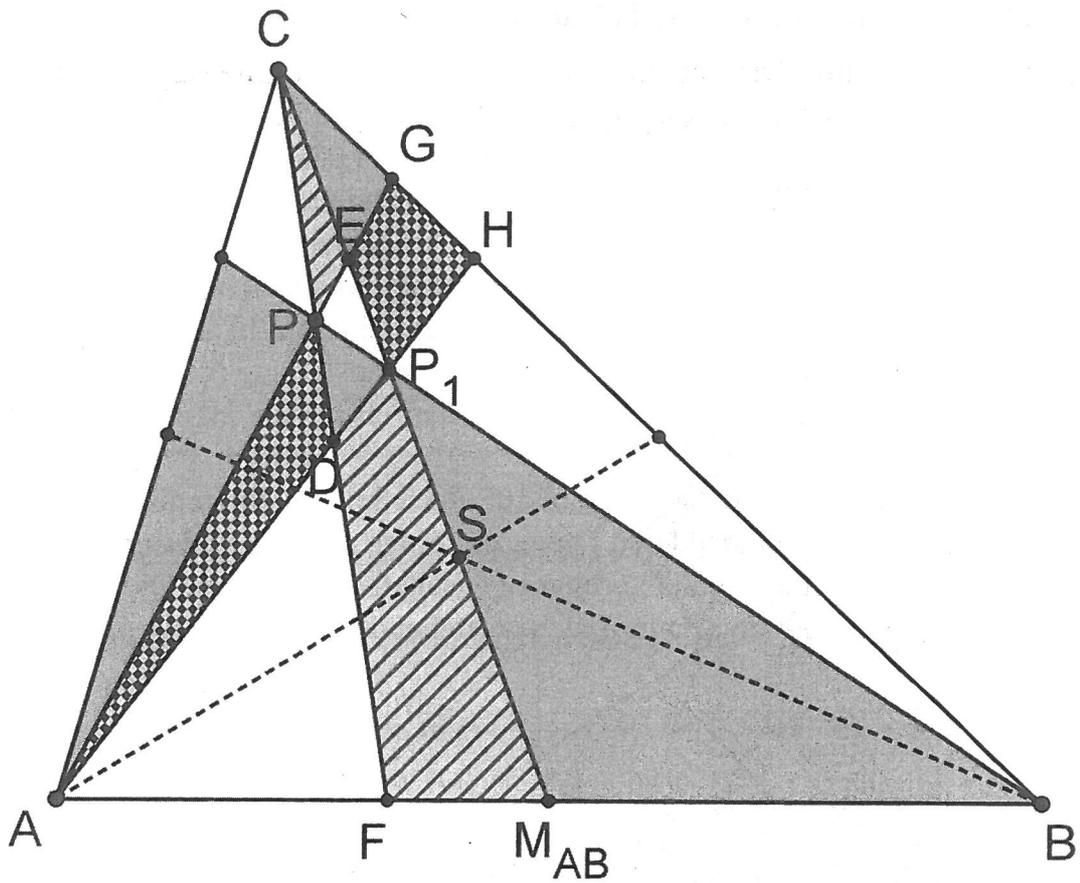


Abb. 14: Die Flächenänderungen Weiß → Grau (Schachbrettmuster) bzw. Grau → Weiß (schraffiert); (Screenshot: geogebra.org)

Die eben erwähnten Dreiecke ( $AHG$  und  $FM_{AB}C$ ) machen jeweils einen bestimmten Bruchteil des Dreiecks  $ABC$  aus, und dieser Bruchteil ist abzulesen auf den ursprünglichen Dreiecksseiten:  $\frac{|FM_{AB}|}{|AB|}$  bzw.  $\frac{|GH|}{|BC|}$ . Es gilt also die Frage zu klären: Warum gilt

$$\frac{|FM_{AB}|}{|AB|} > \frac{|GH|}{|BC|} \quad (I)$$

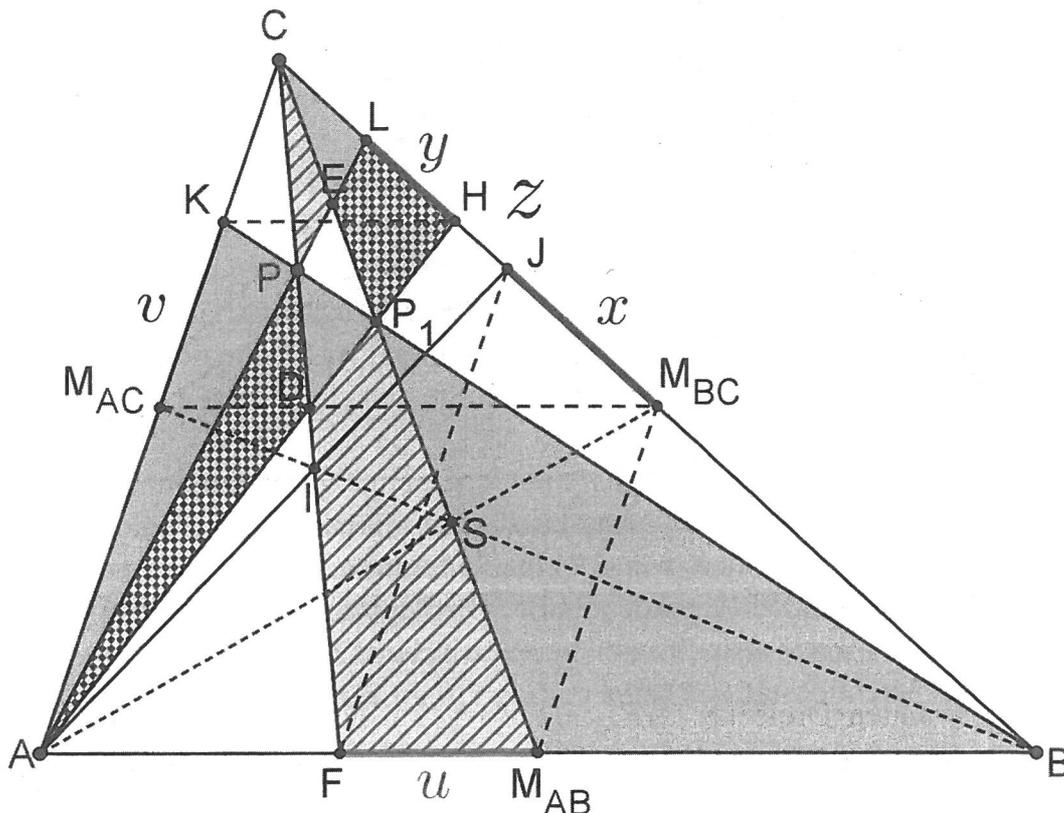
Um das zu beantworten, erweitern wir **Abb. 14** zu **Abb. 15**: Die *halben* Seitenlängen des Dreiecks  $ABC$  ( $|BC|/2$ ,  $|AC|/2$ ,  $|AB|/2$ ) bezeichnen wir mit  $a, b, c$ , und  $I$  sei der Schnittpunkt der Transversale  $CP$  mit der Seitenhalbierenden  $s_b$ . Wir verwenden zunächst obiges Lemma und erhalten die Parallelitäten  $FJ \parallel M_{AB}M_{BC}$  und  $KH \parallel M_{AC}M_{BC}$ . Daraus ergeben sich mit dem Strahlensatz die Beziehungen:

$$\frac{u}{c} = \frac{x}{a} \quad (II)$$

$$\frac{v}{b} = \frac{x+z}{a} \quad (III)$$

Dabei könnte es auch passieren (anders als in **Abb. 15**), dass die Strecke  $GH$  in die Strecke  $JM_{BC}$  „hineinragt“ (d. h.,  $H$  wäre dann zwischen den Punkten  $J$  und  $M_{BC}$ ), dann wäre  $z < 0$ , es gilt aber mit Sicherheit  $x + z > 0$ , weil  $H$  „über“  $M_{BC}$  liegt (d. h. irgendwo auf der Strecke  $M_{BC}C$ , denn  $P$  liegt ja im „Dreieck links oben“). Die anderen hier involvierten Größen ( $a, b, c, x, y, u, v$ ) sind aber immer positiv! Die zu zeigende Ungleichung (I) ist wegen (II) äquivalent mit  $\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$  bzw. mit

$$x > y. \tag{IV}$$



**Abb. 15:** Rückführung auf: Warum gilt  $x > y$ ? (Screenshot: geogebra.org)

Nun kommt der Satz von CEVA ins Spiel (angewandt auf den Transversalenschnittpunkt  $P$ ):  $(c - u) \cdot (b - v) \cdot (a + x + z + y) = (c + u) \cdot (b + v) \cdot (a - x - z - y)$ .

Dies ist eine Gleichung, in der  $x$  und  $y$  vorkommen. Aufgelöst nach  $y$  ergibt sich:

$$y = -x - z + a \cdot \frac{bu + cv}{bc + uv}.$$

D. h., die zu zeigende Ungleichung (IV) ist äquivalent mit  $2x + z > \frac{cbx + abu + acv}{bc + uv}$   $\Leftrightarrow$   $(II)$

$$(2x + z) \cdot (bc + uv) > cbx + acv.$$

Nun dividieren wir beide Seiten der Ungleichung durch  $bc$  und erhalten  $(2x + z) \cdot \left(1 + \frac{uv}{bc}\right) > x + a \cdot \frac{v}{b}$ , woraus wir mit (III) auf  $(2x + z) \cdot \left(1 + \frac{uv}{bc}\right) > 2x + z$  kommen, was

wegen  $2x + z > 0$  und  $\frac{uv}{bc} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{uv}{bc} > 1$  sicher erfüllt ist. Damit ist die Behauptung in der Überschrift von Abschnitt 3.2 gezeigt.

## 4 Conclusio und eine weitere Anregung

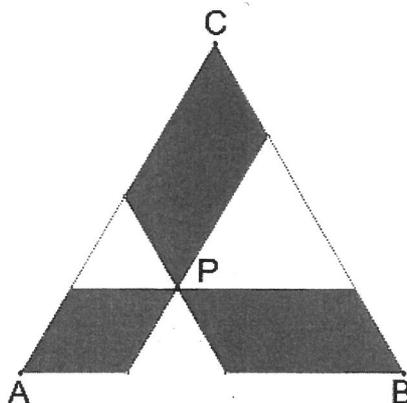
Ein wichtiger Aspekt beim Problemlösen sind natürlich die Beweise (Begründungen). Aber eine experimentelle Phase, in der Vermutungen generiert werden, ist auch besonders typisch und wichtig im Prozess des Betreibens von Mathematik. Außerdem wird dadurch die Spannung erhöht und die Materie weniger trocken. Und solche Phasen sind in der Geometrie erst durch DGS möglich geworden. Man kann also mit Fug und Recht behaupten: Durch DGS ist das Problemlösen in der Geometrie spannender, interessanter und lebendiger geworden. Das gilt für alle Bereiche: Sek 1, Sek 2, Universität. Klar, das Finden von Beweisen ist trotzdem keine leichte Angelegenheit, da kann Technologie nicht so gut helfen. Auch hier gibt es Bemühungen in Richtung „automatisiertes Beweisen“ (d.h. Programme, die von sich aus Beweise „finden“ und „formulieren“), aber das ist eine ganz andere Welt.

Eine weitere mögliche Problemlöseaufgabe zu diesem Themenkreis wäre [vgl. EMBACHER 2019 und den zugehörigen Vortrag]: Gegeben ist ein *gleichseitiges* Dreieck  $\triangle ABC$  und ein Punkt  $P$  in diesem Dreieck. Durch diesen Punkt werden die Parallelen zu den Seiten gezeichnet, wodurch das Dreieck i.A. in drei kleinere gleichseitige Dreiecke (weiß, **Abb. 16**) und drei Parallelogramme (grau, **Abb. 16**) zerlegt wird.

Gibt es Lagen von  $P$ , bei denen die Summe der Parallelogrammflächeninhalte genau der Summe der Dreiecksflächeninhalte entspricht (jeweils halber Flächeninhalt des  $\triangle ABC$ )?

Wenn nein, warum nicht, wenn ja, beschreiben Sie den zugehörigen „geometrischen Ort“ und geben Sie eine Begründung!

Auch hier kann man einerseits zunächst mit GeoGebra experimentieren, um zu einer Vermutung zu kommen, oder andererseits Ausschau nach offensichtlichen solchen Punkten halten. Sehr leicht kann man das sehen, wenn  $P$  eine Seitenmitte ist oder ein zu einer Seitenmitte am Inkreis diametral gegenüberliegender Punkt. Das legt den Verdacht schon nahe, dass es sich vielleicht um den Inkreis als gefragten geometrischen Ort handeln könnte, was man analytisch auch relativ leicht bestätigen kann.



**Abb. 16:** Teilung durch die Seitenparallelen (Screenshot: geogebra.org)

### Literatur

- [1] EMBACHER, F. [2019]: Von dreieckigen Pizzen – Anlässe zu Erfahrungen mit mathematischem Arbeiten in 10 Stationen. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. Den zugehörigen Vortrag (ppt) findet man unter: <https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/MatheDidaktik/GDM2019/>.
- [2] EMBACHER, F., HUMENBERGER, H. [2019]: A note on the Stammler hyperbola. Erscheint in: The American Mathematical Monthly **126**(2019)9, 841–844 (DOI: 10.1080/00029890.2019.1644125).
- [3] HUMENBERGER, H. [2015]: Gerechte Pizzateilung – keine leichte Aufgabe! In: Mathematische Semesterberichte **62**(2015)2, 173–194 (DOI: 10.1007/s00591-015-0146-8).
- [4] NICOLLIER, G. [2015]: Half Issues in the Equilateral Triangle and Fair Pizza Sharing. In: Mathematics Magazine **88** (2015), 337.