

HANS HUMENBERGER

Verständnisorientierte Funktionsuntersuchungen – dynamische Betrachtungen zum Kegelmüpfvolumen

1. Einleitung und Problemstellung

Die Funktionsuntersuchungen (früher: Kurvendiskussionen) sind ein sehr weit verbreiteter Inhalt des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe 2. In der Vergangenheit sollten dabei Erkenntnisse der Differentialrechnung angewandt werden, um herauszufinden, wie Graphen von Funktionen verlaufen (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Asymptoten, etc.). Dafür gab es ein genau abarbeitendes Schema, um schlussendlich beim Graphen zu landen, das erklärte Ziel war also der Funktionsgraph (mit Papier und Bleistift gezeichnet). Heutzutage sind Funktionsgraphen (mittels Computern generiert) nicht Ziel, sondern eher Ausgangspunkt mathematischer Überlegungen und Begründungen, anhand des Graphen werden sozusagen Fragen gestellt, es fand also eine gewisse Spießumkehr statt.

Bei Schülern/innen und Lehrern/innen sind die Funktionsuntersuchungen im althergebrachten schematischen Stil (Kurvendiskussionen) bisweilen sogar „beliebt“ (Schüler/innen: man hat ein klares Schema, an das man sich halten kann; Lehrer/innen: Es gibt eine Ummenge von Aufgaben, auch für Klausuren). DANCKWERTS/VOGEL [2006, S. 131 ff.] bringen aber bekannte Argumente aus Sicht verschiedener Personengruppen (Mathematiker, Mathematikdidaktiker, Mathematiklehrer, Schüler), die die klassischen Kurvendiskussionen im Schulunterricht in einen kritischen Licht erscheinen lassen. Danach [S. 134f.] schreiben sie für den Fall, dass man bei diesem erstarrten Unterrichtsgegenstand nach Wegen der Öffnung sucht:

„Als Perspektiven für eine solche Öffnung sind zu nennen:

1. eine stärkere Betonung nicht-algorithmischer Elemente der Kurvendiskussion (qualitative Analysis)
2. die Einbeziehung von Sachkontexten (Anwendungsorientierung)
3. die konsequente Nutzung elektronischer Helfer (Integration neuer Technologien)
4. die Einbeziehung divergenter Elemente bei der Aufgabenstellung (veränderte Aufgabenkultur).“

Hier in diesem Aufsatz soll eine beziehungsreiche Aufgabe zum Thema Funktionsuntersuchungen präsentiert werden, die diesen „Kriterien“ (Wegen der Öffnung) entspricht:

Aufgabe

Zwei Stäbe der Länge 2s liegen „auf gleicher Höhe“ und parallel nebeneinander (Abstand 2R). Diese zwei Stäbe kann man sich als Achsenquerschnitt eines Drehzylinders vorstellen, dessen Volumen man leicht bestimmen kann (Abb. 1a).

Die Mittelpunkte dieser Stäbe sollen unverändert bleiben, aber die Stäbe sollen um ihren jeweiligen Mittelpunkt ein wenig „gekippt“ werden (um den Winkel α , höchstens um 90°). Dann entsteht ein Achsenquerschnitt eines Kegelmüpfes (Abb. 1b; die lotrechten

dünnen Strecken durch die Mittelpunkte sollen die „nicht gedrehte Lage“ wie in Abb. 1a andeuten).

a) Wird beim Kippen aus der senkrechten Lage der Stäbe das zugehörige Volumen $V(\alpha)$ größer oder kleiner?

b) Wie sieht diese „Volumenentwicklung“, d. h. $V(\alpha)$ für wachsende Werte von α , genauer aus?

Verwende zur Beantwortung der Fragen einerseits Computergraphen von Funktionen und andererseits mathematische Argumente aus der Differentialrechnung!

Hier geht es um eine Fragestellung im Dunstkreis der Funktionsuntersuchungen anhand eines konkreten Phänomens. Es ist ein Sachkontext (Kriterium 2), auch wenn kein Realitätsbezug im Vordergrund steht. Die Fragestellung ist eine divergente, nicht-algorithmische Elemente stehen im Vordergrund (Kriterien 1 und 4), und man kann neue Technologien nutzen (schon zum Explorieren der Situation zu Beginn, und in weiterer Folge bei den formalen Rechnungen, Kriterium 3).

Insgesamt geht dieses Anliegen in eine Richtung, die auch für ARNOLD KIRSCH besonders wichtig war: Verständnis (ohne genaue Definition, was darunter verstanden werden soll), mehr Inhalte (Semantik), weniger Formalismen (Syntax). Für ARNOLD KIRSCH war es in sehr vielen seiner Beiträge das zentrale Anliegen, Anschaulichkeit und Strenge in gelungener Weise zu verbinden, das Verständnis für Phänomene und Konzepte zu erhöhen [vgl. z. B. KIRSCH 1991, 1995], auch sein Buch „Mathematik wirklich verstehen“ [KIRSCH 1997] ist von diesen Gedanken (sogar im Titel) geprägt. Doch nun zur oben erwähnten Aufgabe.

2. Der Funktionsterm, erste Graphen und eine Plausibilitätsbetrachtung

2.1 Der Funktionsterm

Oberflächlich betrachtet (noch ohne genaue Überlegungen) könnte man auf die Einschätzung bzw. erste Vermutung kommen, dass sich dabei das Volumen gar nicht ändern werde, so nach dem Motto: „Das, was

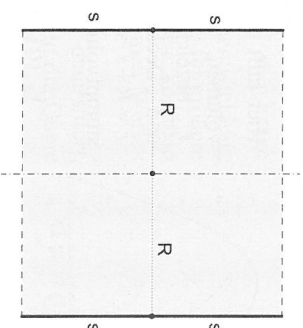


Abb. 1a: Achsenquerschnitt Drehzylinder

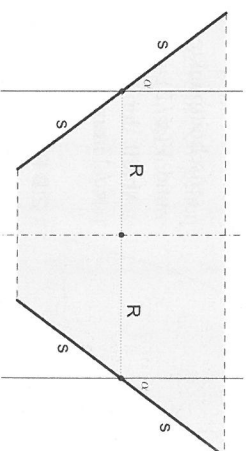


Abb. 1b: Achsenquerschnitt Kegelmüpf

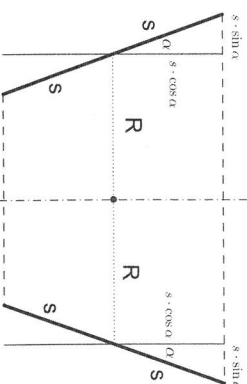


Abb. 2: Kegelmüpf-Beziehungen

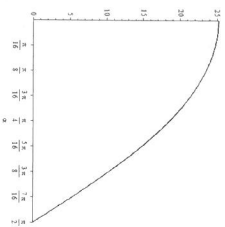


Abb. 3a: $s = 1, R = 2$

oben dazukommt, kommt unten weg.“ Das ist falsch, wie sich herausstellen wird. Erstens ändert sich durch das Kippen auch die Körperhöhe und zweitens ist der Volumenbeitrag des „Dreiecks oben außen“ ein größerer als jener des „Dreiecks unten innen“ (Abb. 1b), da es weiter weg von der Achse liegt. Leider sind diese beiden Effekte aber gegenläufig, und es ist a priori nicht klar, welcher stärker ist. Dass sie aber einander genau aufheben sollten, ist wohl eher unwahrscheinlich ...

Um einen Überblick zu bekommen, braucht man einen Funktionsterm für das Volumen V (in Abhängigkeit des Winkels α).

Hier hilft die Formel $V = \frac{\pi h}{3} (r_0^2 + r_0 \cdot r_1 + r_1^2)$ für das Kegelstumpfvolumen. Dabei bezeichnet h die Höhe des Kegelstumpfes, $r_{0,1}$ bezeichnen dabei die Radien der zugehörigen Kreise (Grund- und Deckfläche). Mit $h = 2s \cdot \cos(\alpha)$, $r_0 = R - s \cdot \sin(\alpha)$ und $r_1 = R + s \cdot \sin(\alpha)$ erhält man mit obiger Formel für das Kegelstumpfvolumen nach Vereinfachung:

$$V_{R,s}(\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot s \cdot \cos(\alpha) \cdot (3R^2 + s^2 \cdot \sin^2(\alpha)) \quad (1)$$

Diese Funktion wollen wir näher untersuchen: Werden die Volumina (mit wachsendem α) größer oder kleiner? Bevor man erste Funktionsgraphen zeichnet, kann man auch die zugehörigen Achsenschnittpunkte bestimmen: $V(0) = 2\pi s R^2 > 0$ (Zylindervolumen) und $V(\pi/2) = 0$. „Insgesamt“ (auf $[0; \pi/2]$) ergibt sich also ein Abfall der Volumenwerte. Ist dieser Abfall immer monoton? Ist $\pi/2$ immer die richtige rechte Intervallgrenze?

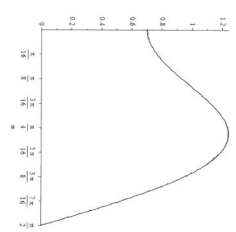


Abb. 3b: $s = 1, R = 1/2$

2.2 Erste Funktionsgraphen

Im Folgenden betrachten wir erste zugehörige Funktionsgraphen (noch ohne konkrete Begründungen mit Analysis). Solche Funktionsgraphen können mit CAS (Funktionsplotttern) erzeugt werden. Das heißt, so eine Aufgabe mit diesem experimentellen Einstieg ist erst durch die Möglichkeit der neuen Technologien denkbar geworden. Ohne diese Möglichkeit müsste man sofort zu den Hilfsmitteln der Analysis (Differentialrechnung) greifen. Das wäre in einem lehrerzentrierten Unterricht auch möglich, aber weniger schülernah und mit weniger Eigenaktivität der Schüler/innen (Klassenstufe 11, Differentialrechnung) verbunden.

Behindert wird das Zeichnen vieler Funktionsgraphen allerdings dadurch, dass im Funktionsterm für V die beiden Parameter R und s vorkommen. Man könnte für viele konkrete Werte von R und s Graphen der Funktion V (in Abhängigkeit von α) mit CAS zeichnen, um einen ersten Überblick zu gewinnen. Für das Zeichnen der Graphen werden Schüler/innen vermutlich in jedem Fall

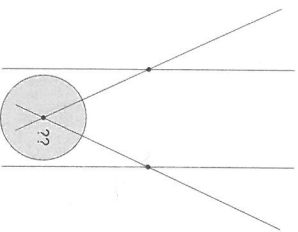


Abb. 4: Stäbe kommen einander „in die Quere“

das Intervall $\alpha \in [0; \pi/2]$ nehmen (die Tatsache, dass dies eigentlich nicht in jedem Fall richtig ist – siehe unten –, spielt zunächst keine Rolle). Sie könnten (z. B. auch arbeitsteilig) dann zu Graphen wie in Abb. 3 kommen.

Hier sieht man schon, dass verschiedene Szenarien möglich sein werden. Und um diese Unterschiede zu erhalten, bedarf es letztlich dann auch mathematischer Argumente: Verstehen des Phänomens mittels formaler Argumente, nachdem man sich auf nichtformaler Ebene mit ihm auseinandergesetzt hat.

Wenn Schüler/innen mit solchen Graphen auf dem Intervall $[0; \pi/2]$ herumprobieren, könnte von der Lehrkraft die Frage gestellt werden, ob alle solchen Graphen die Volumenentwicklung „wirklich beschreiben“. Wie ist z. B. die Lage der Stäbe für größere Werte von α beim obigen Beispiel ($s = 1, R = 1/3$)? Diese kommen einander ja schon nach wenigen Grad (d. h. bei kleinen Werten von α) „in die Quere“ (Abb. 4).

Wenn man das Problem einmal erkannt hat, sieht man sofort, dass die Stäbe beim Kippen einander bei $R \geq s$ nicht in die Quere kommen können, bei $R < s$ allerdings schon. Vielleicht bemerken das auch die Lernenden selbst, aber darauf kommt es an dieser Stelle gar nicht an, man ist auf diese Erkenntnis bei Aufgabenteil a) nicht angewiesen, denn dieser bezieht sich ja auf das Kippen aus der lotrechten Lage, also auf kleine Werte von α .

Die Überlegungen, wie weit der zugehörige α -Bereich gehen kann, können auf später verschoben werden. Dies ist insbesondere didaktisch von Bedeutung, wenn Lernende selbstständig arbeiten. Auch wir verschieben die zugehörigen Betrachtungen auf später bzw. in eine Online-Ergänzung.

Sehr naheliegend ist auch die Überlegung, dass für das qualitative Verhalten der Volumenfunktion (in Abhängigkeit von α) nicht die absoluten Werte von R bzw. s ausschlaggebend sein werden, sondern nur deren Verhältnis $R : s$. Die entsprechenden Skizzen unterscheiden sich ja für $R = 2$ cm, $s = 1$ cm und $R = 2$ m, $s = 1$ m nicht, in den zugehörigen Skizzen wären nur „verschiedene Maßstäbe“ verwendet worden. Dies ist schon ein starker Hinweis darauf, dass man beim Probieren mit verschiedenen Graphen z. B. $s = 1$ festsetzen kann und dann nur mehr verschiedene Werte von R zu probieren braucht. Das schränkt die Möglichkeiten beim Probieren schon wesentlich ein und eröffnet eine effiziente Strategie, sich an die entscheidenden Werte von R (eigentlich von $R : s$) heranzutasten. Wenn Lernende das nicht von alleine sehen, kann eine entsprechende Diskussion (warum man hier $s = 1$ setzen kann) auch durch die Lehrkraft angeregt werden.

Für Werte $R \geq 1$ ($s = 1$) scheint sich qualitativ das Bild von Abb. 3a ($R = 2$) zu ergeben, vgl. Abb. 5. Die Graphen ändern sich nicht, nur die Werte auf der 2. Achse.

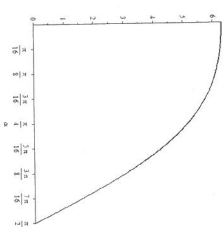


Abb. 5a: $R = 1$

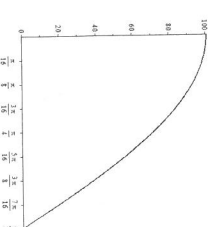


Abb. 5b: $R = 10$

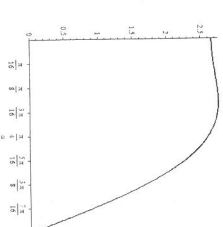


Abb. 6a: $R = 0,65$

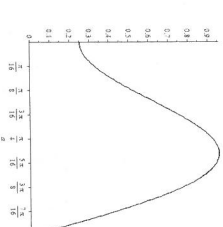


Abb. 6b: $R = 0,2$

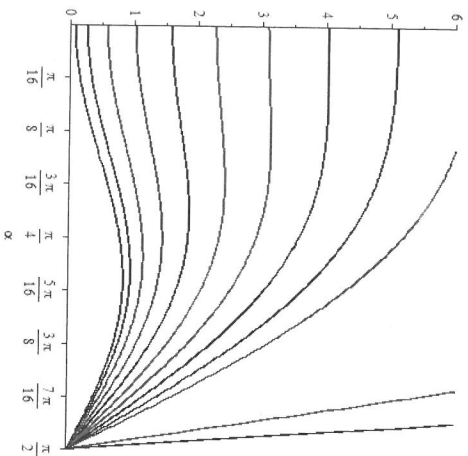


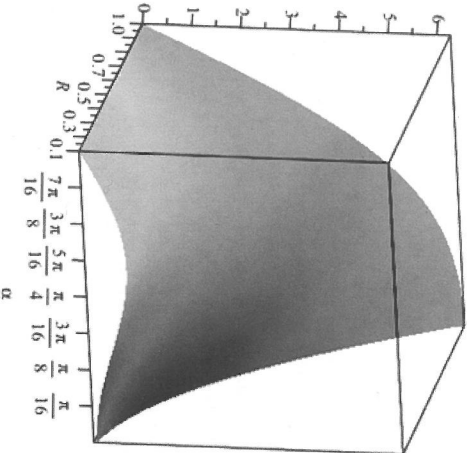
Abb. 6c: Schar von Funktionsgraphen

tionsgraphen für verschiedene R -Werte als Schar zu sehen). Aber immerhin findet man durch dieses Experimentieren (Explorieren) heraus, dass es da so eine Grenze zu geben scheint, und durch die Idee, dass dafür vermutlich nur das Verhältnis $R:s$ entscheidend sein wird (man setzt dann z. B. $s=1$), kann man sich an diese Grenze auch sehr effizient heranzuhelien, denn die Sichtweise *Mathematik als Fertigprodukt* dominiert den durchschnittlichen Mathematikunterricht in Schulen immer noch zu sehr.

Fazit: Es sind bei der Volumenentwicklung qualitativ verschiedene Verlaufsformen des Graphen möglich: Durchgehend streng monotonen Fallen der Volumenwerte, oder am Anfang zunächst streng monotonen Wachsen der Volumenwerte, danach streng monotonen Fallen. Damit hat man an dieser Stelle vermutlich nicht gerechnet, und das verlangt nach weiteren Untersuchungen und Erklärungen.

2.3 Graphen von Funktionen in zwei Variablen (3D-Plots)

Wenn Graphen von Funktionen in zwei Variablen¹ bekannt sind (3D-Plots in CAS), dann kann man auch einen umfassenden graphischen Überblick gewinnen. Wieder setzen

Abb. 7: 3D-Plot, α von „rechts nach links“ zu lesen

¹ Zum Beispiel in der Lehrerbildung oder in einzelnen Leistungskursen.

wir $s:=1$, dies bedeutet, dass Längen in Einheiten von s gemessen werden. Dadurch verschwindet in (1) die Variable s , man hat dann nur mehr zwei Variablen: R und α .

$$V_R(\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos(\alpha) \cdot (3R^2 + \sin^2(\alpha)) \quad (1)$$

2.4 Eine Plausibilitätsklärung

Bevor man mit Mitteln der Analysis (Differentialrechnung) an das Problem herangeht, könnte man auch versuchen, eine Plausibilitätsklärung dafür zu finden, dass für große Werte von R das Volumen am Anfang fallen, für kleinere Werte jedoch steigen wird.

Zu Beginn von 2.1 wurde festgestellt, dass a priori ziemlich unklar ist, welcher der beiden dort beschriebenen Effekte stärker ist. Deswegen ist man i. A. ja unsicher, ob das Volumen beim Drehen der Stäbe zunächst größer oder kleiner wird. Bei genauerer Betrachtung ist es aber schon plausibel, dass es dafür einen „Schwellenwert“ von R/s gibt: Bei großen Werten von R/s (d. h. die Stäbe sind weit auseinander) dominiert der Effekt der Höhenverkleinerung, d. h. das Volumen wird insgesamt kleiner: Die entsprechenden „Grundflächen“ sind sehr groß, und daher zieht eine kleine Höhenänderung eine große Volumenänderung nach sich. Bei sehr kleinen Werten von R/s (d. h. die Stäbe liegen nahe beisammen) ist es hingegen umgekehrt, zumindest zu Beginn der Drehung: Hier dominiert der andere Effekt, dass der Volumenbeitrag weiter von der Achse entfernt liegender Flächenstücke größer ist, die kleine Höhenverkleinerung wirkt sich hingegen dann weniger aus (die entsprechenden „Grundflächen“ sind ja klein). Dass aber diese Schwelle genau bei $R/s = \sqrt{2/3} \approx 0,8165$ ist, kann man nicht ohne genauere Analysen (siehe unten) erklären. Auch solche und ähnliche Plausibilitätsklärungen sollen im Unterricht ihren Platz haben, denn dadurch versteht man (auch im Sinne von A. KIRSCH) die graphisch und rechnerisch sich ergebenden Phänomene besser. Dies kann auch unter dem Aspekt einer gelungenen Symbiose von *Anschaulichkeit und Strenge* gesehen werden, ein Thema, das ARNOLD KIRSCH auch sein Leben lang beschäftigt und zu dem er viele Beiträge geleistet hat.

3. Bearbeitung mittels Differentialrechnung

Wir setzen im Folgenden – wie oben schon angedeutet – $s:=1$, dadurch werden die Formeln und Überlegungen etwas übersichtlicher, weil wir eine Variable weniger haben. Die Funktion mit der Gleichung (1)¹ soll nun mit Differentialrechnung genauer untersucht werden, insbesondere bzgl. Monotonieigenschaften. Die Ableitung von (1)¹ nach α ergibt

$$V'(\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot \sin(\alpha) \cdot (2\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - 3R^2) \quad (2)$$

Daraus erkennt man unmittelbar $V'(0) = 0$ und hat damit auch eine formale Erklärung (Begründung) für die waagrechte Tangente an der Stelle 0 (Abb. 3, Abb. 5 und Abb. 6). Für $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ist $\sin(\alpha) \geq 0$, daher wird das Vorzeichen von $V'(\alpha)$ durch den Term in der Klammer von (2) entschieden. Für $\alpha \neq 0$ gilt:

$$V'(\alpha) \stackrel{<}{>} 0 \Leftrightarrow 2\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - 3R^2 \stackrel{<}{>} 0$$

Verwendet man $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$, so ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$V'(\alpha) \stackrel{<}{>} 0 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) \stackrel{>}{<} \frac{2}{3} - R^2 \quad (3)$$

Hier bemühen wir uns, die Arkus-Funktionen zu vermeiden, weil diese im Schulunterricht nicht vorausgesetzt werden können. Auch ohne diese ist aber klar:

Für $R > \sqrt{2/3} \approx 0,8165$ ist $2/3 - R^2 < 0$ und $\sin^2(\alpha) > 2/3 - R^2$, somit ist aber nach (3) $V'(\alpha) < 0$ garantiert für alle $\alpha > 0$ und damit das streng monotone Fallen der Funktion V (Volumenentwicklung) für $R > \sqrt{2/3}$. Hier haben wir also jene Grenze nun genau, die oben durch Experimentieren ungefähr zu erhalten war.

Fazit für den Fall $R > \sqrt{2/3} \approx 0,8165$: Das betrachtete Volumen des Kegels stumpfes wird beim Drehen um den Mittelpunkt der Stäbe immer kleiner, es fällt mit anfangs waag-rechter Tangente streng monoton ab zum Wert 0.

Für den Fall $R < \sqrt{2/3} \Leftrightarrow 2/3 - R^2 > 0$ ist aus (3) auch schon abzulesen: Es wird α -Werte in einem Intervall von 0 bis zu einer *bestimmten Grenze* geben, für die $V'(\alpha) > 0$ ist; in diesem Intervall herrscht dann streng monotoner Wachstum. Diese Grenze kann man angeben: Es ist jener Winkel α , für den $\sin(\alpha) = \sqrt{2/3 - R^2}$ gilt. Hintergrund all dieser Überlegungen ist der bekannte und im Schulunterricht sehr wichtige *Satz von der Intervall-monotonie*² [vgl. auch HUMENBERGER 2015].

Für den Fall $R > \sqrt{2/3}$ ist damit der Verlauf des Graphen von V auf dem ganzen Intervall $[0; \pi/2]$ „geklärt“ (streng monoton fallend), für den Fall $R < \sqrt{2/3}$ zumindest die Monotonie (wachsen) am Anfang.

Bis hierher sollte dieses Thema auch im Schulunterricht der Sekundarstufe 2 behandelbar sein und keine generelle Überforderung darstellen: Schüler/innen experimentieren zuerst mit Funktionsgraphen und bestätigen dann mittels Differentialrechnung das beobachtete Phänomen: Ab einer gewissen Grenze von R (bzw. R/s , wenn sie nicht $s := 1$ setzen), ändert sich das Monotonieverhalten „zu Beginn“ (für kleine α).

Ein konkretes Phänomen (Problem) steht zu Beginn. Dieses bzw. die zugehörige Funktion können nach Erstellung des Funktionsterms zunächst rein experimentell untersucht werden. Die sich dabei ergebende „Grenze“ wird dann mit analytischen Mitteln berechnet, wobei die Existenz so einer Grenze auch ohne Analysis plausibel gemacht wird, so dass diese auch „einleuchtet“. So kann die Mathematik ihre erhellende Funktion bei konkreten Phänomenen unter Beweis stellen. Mit bloßem Experimentieren kann man diese Grenze bei $\sqrt{2/3}$ nur ungefähr ermitteln (siehe oben: „ca. 0,8“), mit Hilfsmitteln aus der Differentialrechnung kann man einerseits besser verstehen, wie es zu dieser Grenze kommt, andererseits ihren genauen Wert ermitteln. Es lohnt sich also durchaus, diesen eher theoretischen Standpunkt (typisch für die Mathematik) einzunehmen. Monotoniefragen und allgemeinen Verlaufsformen von Funktionsgraphen sind genuiner Bestandteil der „Funktionsuntersuchungen“, aber hier sind diese Fragen in einen interessanteren Kontext eingebettet als bei der sturen Abarbeitung eines vorgegebenen Schemas.

Schon bis hierher kann Differenzierung im Unterricht bei dieser Aufgabe stattfinden: Manche Lernende arbeiten ausschließlich mit Funktionsgraphen (CAS, Funktionsplotter), sind also primär an graphischen und praktischen Aspekten interessiert, leistungsstärkere Lernende bearbeiten auch die theoretische Seite und suchen nach Erklärungen mittels Differentialrechnung.

² Wenn die Ableitung einer differenzierbaren Funktion f auf einem Intervall positiv ist, dann ist f dort streng monoton wachsend.

4. Fachdidaktisches Kurzresumé

Immer wieder wird (m. E. zu Recht) moniert, dass sich die klassischen Kurvendiskussionen im althergebrachten Stil überholt haben. Ich bin davon überzeugt, dass das zugehörige verständnisbasierte Wissen im Bereich der Differentialrechnung aber keineswegs überholt und immer noch sehr wichtig ist [„Kurvendiskussionen“? Ja, aber anders“, vgl. auch DANCKWERTS/VOGEL 2006, S. 147 ff.]. Die vorgestellte Aufgabe stellt eine Möglichkeit dar, dass Lernende sich in selbstständiger Arbeit mit einem interessanten Phänomen beschäftigen, zunächst rein experimentell mittels eines Funktionsplotters; dies stellt in gewisser Weise die erste Bearbeitungsstufe dar. Eine weitere Bearbeitungsstufe stellen die formalen Argumente aus der Differentialrechnung dar (Nullstellen der 1. Ableitung, Monotonieüberlegungen etc.), die zugehörigen Einsichten durch Differentialrechnung entstammen hier aber keinem starren abzuarbeitenden Schema. Im Vordergrund stehen inhaltliche, semantische, verständnisorientierte, weniger syntaktische und kalkülorientierte Aspekte. In einer weiteren Stufe kann dann auch der Blick auf die rechte Intervallgrenze gelenkt werden, entweder an einem konkreten Beispiel oder sogar allgemein (vgl. unten bzw. die Online-Ergänzung), wenn die Arkussinusfunktion den Lernenden zur Verfügung steht (dies ist in der Schule kaum realistisch, nicht einmal an Gymnasien). Diese Aufgabe bietet also Möglichkeiten auf unterschiedlichen Niveaus, auch für differenzierenden Unterricht.

Der Computereinsatz (CAS, Funktionsplotter) ist beim hier vorgeschlagenen Vorgehen zum Zeichnen von Graphen unbedingt nötig. Schon oben haben wir dabei von einer Art Spießbuckel gesprochen (im Vergleich zu klassischen Kurvendiskussionen von früher, ohne Computer): Graphen sind nicht mehr das Ziel, sondern computergenerierte Graphen sind der Auslöser weiterer theoretischer Überlegungen (wie kann Differentialrechnung helfen, die beobachteten Phänomene mathematisch zu erklären?) Auch zum Bestimmen von Ableitungen, zum Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen kann CAS eingesetzt werden, aber diese Aktivitäten sind hier so einfach, dass sie auch noch per Hand zumutbar sind. Gut (aber nicht unbedingt nötig) wäre es auch, wenn ein Applet vorläge (mittels eines 3D-Konstruktionsprogramms), das es erlaubt, mit einem Schieberegler für α die räumlichen Darstellungen der zugehörigen Kegelschümpfe zu variieren und vor Augen zu führen.

5. Die rechte Grenze des α -Intervalls für den Fall $R < s$

Bis jetzt haben wir die Graphen immer im Bereich $\alpha \in [0; \pi/2]$ gezeichnet. Dieses ganze Intervall ist aber – wie wir oben schon festgestellt haben – nicht in allen Fällen möglich, im Fall $R < s$ (bei uns also $R < 1$) geht die rechte Grenze des Winkelintervalls nur bis zu jenem Winkel, bei dem die beiden Stäbe einander in die Quere kommen. Das ist bei jenem Winkel α der Fall, bei dem $\sin(\alpha) = R/s$ gilt (bzw. $\sin(\alpha) = R$ wegen $s := 1$; vgl. Abb. 8).

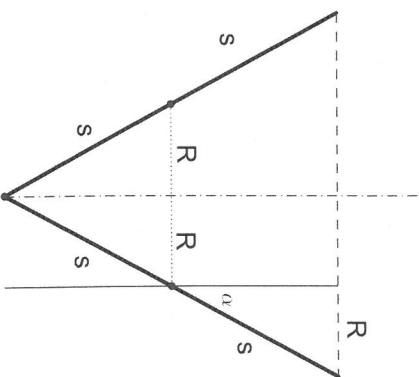


Abb. 8: Grenzfall beim Kippen der Stäbe „nach links“ zu lesen

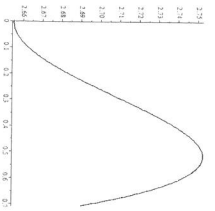


Abb. 9a $s = 1, R = 0.65$

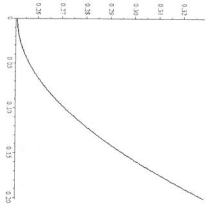


Abb. 9b $s = 1, R = 0.2$

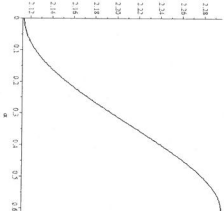


Abb. 9c $s = 1, R = 0.58$

Um diesen α -Wert besser „fassen“ zu können, braucht man die Umkehrfunktion der Sinusfunktion, die Arkussinusfunktion: $\alpha = \arcsin(R)$. Die folgenden Betrachtungen sind also nur dann sinnvoll, wenn diese Funktion bekannt ist. In den meisten Fällen wird das im Schulunterricht nicht der Fall sein, in der Lehrerbildung und vielleicht in manchen Leistungskursen allerdings schon.

Wir haben also prinzipiell die beiden Fälle zu unterscheiden:

1. $R \geq 1$ und $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (volle 90° -Drehung möglich)
2. $R < 1$ und $0 \leq \alpha \leq \arcsin(R)$ (Drehung nur bis zur Drehkegellage möglich)

So gesehen gehen die Graphen in den Abb. 6a und 6b also zu weit, sie sollten nicht bis $\alpha = \pi/2$ gehen, sondern nur bis $\arcsin(R)$, vgl. Abb. 9a und 9b.

Zu beachten ist allerdings, dass die 2. Achse hier „abgeschnitten“ wurde und die Unterschiede daher drastischer wirken, als sie tatsächlich sind. Hervorgehoben sollen allerdings die *qualitativen* Unterschiede werden, nicht die quantitativen.

In Abb. 9a und 9b treten zwei verschiedene Verlaufsfornen zu Tage: In Abb. 9a haben wir zunächst streng monotonen Wachstum, und dann noch ein Stück streng monotonen Fallen (lokale Maximumstelle bei $\alpha \approx 0.52$), in Abb. 9b hingegen durchgehend streng monotonen Wachstum. Auch an die Grenze zwischen diesen Fällen kann man sich wieder durch Probieren herantasten, sie wird ungefähr bei $R \approx 0.58$ liegen (Abb. 9c).

Die sich dabei aufdrängenden Fragen sind:

- a) Sind das alle prinzipiell möglichen Verlaufsfornen?
- b) Kann man das auch formal begründen mit Differentialrechnung?

Für die Antworten zu diesen Fragen müssen wir aus Platzgründen auf eine **Online-Ergänzung** zu diesem Aufsatz (Verlagshomepage) verweisen.

Literatur

- [1] DANCKWERTS, R., VOGEL, D. (2006): *Analysis verständlich unterrichten*. München: Elsevier.
- [2] HIMENBERGER, H. (2015): Die zweite Ableitung bei Extremwertaufgaben – ein hartnäckiges schulisches Ritual. *Der Mathematikunterricht* 61(1), S. 39–56.
- [3] KIRSCH, A. (1991): Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr. *Didaktik der Mathematik* 19(4), S. 294–308.
- [4] KIRSCH, A. (1993): „Verstehen des Verstehbaren“ – auch im anwendungsorientierten Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik* 23(4), S. 250–264.
- [5] KIRSCH, A. (1997): *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis.