Modellierungsaufgaben im Unterricht – selbst Erfahrungen sammeln

Hans Humenberger

Zusammenfassung

Der Beitrag ist die verschriftlichte Version einiger Workshops, die der Autor bei vergangenen ISTRON-Lehrerfortbildungen gehalten hat. Zu Beginn stehen einige Bemerkungen über *Mathematik als Prozess* (im Gegensatz zu *Mathematik als Fertigprodukt*) und eine plakative Gegenüberstellung beider Prinzipien. Dann folgen einige allgemeine Ausführungen zu *Realitätsbezüge im Mathematikunterricht*, insbesondere eine Abgrenzung so genannter *eingekleideter Aufgaben* von *Modellierungsaufgaben*. Schließlich werden einige ausgewählte Modellierungsaufgaben der erwähnten Workshops vorgestellt und zugehörige Lösungshinweise gegeben.

Die Mathematik der EinkommensbesteuerungModellierungsaufgaben im Unterricht – selbst Erfahrungen sammeln

1 Mathematik und Mathematikunterricht als Prozess

Der Beitragstitel *Modellierungsaufgaben im Unterricht – selbst Erfahrungen sammeln* war auch der Titel einiger Workshops, die der Autor gehalten hat, zuletzt bei der ISTRON-Fortbildungstagung im Herbst 2014 in Koblenz. Eine ganz wesentliche Voraussetzung, im Unterricht erfolgreich mit Modellierungsaufgaben als Lehrkraft umzugehen, ist sich selbst schon einmal an einigen solchen Aufgaben versucht zu haben, d. h. selber Erfahrungen im Modellieren zu haben. Es war der Sinn und Zweck dieser Workshops, interessierten Lehrkräften eine Gelegenheit dazu zu geben und darüber zu reflektieren.

Bevor wir zu ausgewählten Beispielen für (nicht komplexe) Modellierungsaufgaben kommen, einige kurz gehaltene Bemerkungen allgemeiner Natur über Mathematik als Prozess und Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Kurz deswegen, weil entsprechende Ausführungen (auch längere) in vielen anderen Beiträgen (insbesondere in den einzelnen ISTRON-Bänden) nachzulesen sind.

Seit vielen Jahren bemühen sich Fachdidaktiker/innen und viele aufgeschlossene Lehrkräfte eine neue Lehr- bzw. Lernkultur im Mathematikunterricht zu forcieren: Mathematik und Mathematikunterricht sollte mehr als Prozess und weniger als bloße Vermittlung von „Fertigprodukten" gesehen werden, mehr Verständnis – weniger Kalkül, mehr Semantik – weniger Syntax. In den vergangenen

H. Humenberger ✉
Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Wien, Österreich

H. Humenberger, M. Bracke (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 3*, Realitätsbezüge im Mathematikunterricht, DOI 10.1007/978-3-658-11902-7_8,

hans.humenberger@univie.ac.at

Tab. 1 Gegenüberstellung von Produkt- und Prozessorientierung

	Produkt- bzw. Kalkülorientierung	Prozessorientierung
Ablauf	Erklären – Musteraufgabe – Üben von Analogaufgaben	Problemstellung – Probieren – Berichten – Reagieren
Ziel, Schwerpunkt	Eindeutigkeit, Sicherheit, Rezept, Ergebnis, Produkt	Verstehen, Begreifen, Prozess, Weg, Methode
Aufgaben	„geschlossene Aufgaben", drillen von Fertigkeiten, Regelorientierung, quantitativ umfangreiches Üben (viele Aufgaben zum selben Prinzip)	offenere Aufgaben, Entdecken, Experimentieren, Begründen, Formulieren, eigenständige Wege, Beispielorientierung, produktives Üben (qualitativ umfangreich)
L-S-Aktivität	Lehrkraft aktiv, Schülerinnen und Schüler (S&S) eher passiv, Weg der Lehrkraft im Vordergrund	S&S aktiv, Lehrkraft zunächst eher passiv: reagiert dann auf Vorschläge der S&S, Wege der S&S im Vordergrund
Sozialform	Lehrervortrag, fragend-entwickelnd, kleinschrittig, auf ein eindeutiges Ziel hin	Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit, flexibel, offen
Vorbereitung	Gute Vorbereitung bis ins Detail der Darbietung	Überlegungen, wie man S&S zu Eigentätigkeit anregen kann (geeignete Aufgaben formulieren)
Erklärungen	sehr umfangreich, Lehrkraft muss von Beginn an alles erklären	weniger Erklärungen, mehr eigenes Nachdenken der S&S
Fehler	sind zu vermeiden, Unterricht als ständige Leistungssituation	zugelassen und sollen konstruktiv verarbeitet werden, deutliche Trennung zwischen Lern- und Leistungssituationen

Jahrzehnten stand die Lehrkraft sehr im Mittelpunkt des Unterrichts, die in letzter Zeit geforderte Form des Unterrichts ist eine mehr schülerzentrierte: Mehr Eigenaktivität der Lernenden, Mathematik ist kein „Zuschauersport" und nicht etwas, das man durch bloßes Nachvollziehen von Routinen und Verfahren besonders gut lernt. Das „aktive Tun" ist dabei sehr wichtig, wie auch beim Erlernen eines Musikinstruments bzw. einer Sportart etc. – auch hier lernt man nicht besonders gut durch bloßes Zuschauen.

Das Betreiben von Mathematik hat Prozesscharakter und besteht aus Vermuten, Probieren, Entdecken, Erkennen, Verwerfen, Begründen, Verstehen, Überwinden von Schwierigkeiten etc. und nicht in der Reproduktion fertig vorgegebener Routinen. Dies ist auf allen Ebenen des Betreibens von Mathematik so (insbesondere auch in der Forschung), und diese Aktivitäten müssen sich vermehrt auch in unserem Unterricht widerspiegeln! Schon Freudenthal hat dies 1973 so ausgedrückt: „Was dem erwachsenen Mathematiker recht ist – seine eigenen Begriffe zu erfinden und die anderer nachzuerfinden, Mathematik nicht als einen Sachbestand, sondern als Tätigkeit zu üben, ein Feld zu erkunden, Fehler zu machen und von seinen Fehlern zu lernen – das soll dem Lernenden von Kindesbeinen an billig sein."

Tab. 1 enthält eine relativ plakative Gegenüberstellung von Produktorientierung vs. Prozessorientierung in Bezug auf einige Merkmale, in der deutlich wird, dass sich dahinter jeweils eine ganz andere Auffassung von Unterricht verbirgt („Nürnberger Trichter" vs. „vorwiegend konstruktivistische Auffassung von Lernen").

Dies soll nicht bedeuten, dass Lehrervortrag, fragend-entwickelnder Unterricht, Üben etc. gar nicht mehr vorkommen sollten. Ein Unterricht, der rein konstruktivistisch ausgerichtet ist, ginge mir persönlich zu weit, er wäre auch wieder sehr extrem, nur das andere Extrem. Es sollte eine Ausgewogenheit zwischen Phasen im Unterricht geben, in denen Wissens-Instruktion bzw. -Konstruktion im Vordergrund stehen (vgl. auch Borneleit, Danckwerts, Henn und Weigand 2001). Und diese Ausgewogenheit ist im durchschnittlichen Unterricht unserer Erfahrung nach noch nicht erreicht, ist aber wichtig für guten Unterricht und für ein angemessenes Bild von Mathematik, das die Schülerinnen und Schüler (S&S) von ihrem Unterricht mitnehmen. Hier hat der Schulunterricht eine ganz große Verantwortung: Er ist für die meisten Personen ausschließlich dafür verantwortlich, welches Bild von Mathematik sie mit ins Leben nehmen, denn für sie ist der schulische Unterricht so ziemlich der einzige Ort, an dem sie explizit und bewusst mit Mathematik zu tun haben (implizit – aber meist unbemerkt – natürlich auch ständig im Alltag). D. h. das maßgebliche Bild von Mathematik in der Gesellschaft ist praktisch nur vom Schulunterricht geprägt. Und da wäre es ja wirklich schade, wenn als einziges Bild von Mathematik zurückbliebe: Mathematik ist ein Sammelsurium von Regeln, die von der Lehrkraft bzw. vom Schulbuch vorgegeben und nicht weiter hinterfragt werden. Wenige Leute verstehen diese Regeln, die anderen folgen diesen vorgegebenen „Spielregeln" und wissen nicht wirklich, was sie dabei genau tun und auch nicht warum.

2 Realitätsbezüge im Unterricht

Es gibt mindestens zwei verschiedene Arten, wie Realitätsbezüge in den Mathematikunterricht einfließen können, „eingekleidete Aufgaben" und „Modellierungsaufgaben".

Die Standardversion, in der Realitätsbezüge Eingang in den Mathematikunterricht finden, sind so genannte eingekleidete Aufgaben (z. B. die meisten „Textaufgaben" in Schulbüchern sind solche). Das Sachproblem bzw. dessen Lösung steht nicht ernsthaft im Mittelpunkt des Interesses; es sind nur Texteinkleidungen einer Formel oder eines Kalküls („Textgleichungen"), so dass diese zur gerade durchgenommenen Mathematik passen (um diese mathematischen Inhalte geht es primär!). Es handelt sich also um *Übungsaufgaben* zum gerade durchgemachten Stoff, wobei die Sachsituationen oft relativ künstlich konstruiert sind (dies aber nicht sein müssen).

Solche nur eingekleideten Aufgaben haben auch Vorteile:

- Das wichtige Übersetzen von Texten in die Sprache der Mathematik wird dabei gefördert und gefordert.
- Sie nehmen nicht viel Zeit in Anspruch, und wir brauchen beim Unterricht ja auch „Übungsaufgaben", die nicht so lange dauern wie „authentischere Modellierungsaufgaben".

Ich sehe in solchen eingekleideten Aufgaben unter gewissen Bedingungen durchaus was Positives (abgesehen davon, dass das Verstecken von Aufgaben in Texten eine Jahrtausende alte Tradition hat – schon bei den Babyloniern; Lesende bzw. Bearbeitende haben die Aufgabe, den mathematischen Kern herauszulesen bzw. die Situation wieder zu „entkleiden" von ihrem Textgewand):

- Aufgaben müssen einen vernünftigen Kontext haben, dürfen nicht an den Haaren herbeigezogen sein, wobei die zugehörige „Grenze" natürlich subjektiv ist.
- Der Umgang mit ihnen muss ein ehrlicher sein: zugeben, dass es im Prinzip „nur eingekleidete" Aufgaben sind (keine authentischen Fragen bzw. Situationen, die uns wirklich so begegnen). Es darf also nicht der Anschein erweckt werden, dass im Lösen von z. B. „Mischungsaufgaben" der wahre Anwendungskern von Mathematik bestünde, dass S&S diese lösen können müssten, um für das Leben nach der Schule gerüstet zu sein. Diese werden bewusst als (zeitsparendes) Übungsmaterial genommen, in dem das Übersetzen von Text in Mathematik im Vordergrund steht.
- Anwendungen/Realitätsbezüge dürfen sich im Unterricht in diesen eingekleideten Aufgaben nicht erschöpfen, d. h. es sollten auch realistischere, authentischere Aufgaben bzw. Probleme („Modellierungsaufgaben") behandelt werden, so dass man selber erfahren kann: Mathematik ist ein wichtiges Werkzeug und kann bei Problemen eine gute Hilfe sein.

Bei Modellierungsaufgaben steht die authentischere Realsituation im Mittelpunkt, das Strukturieren der Aufgabe, das tiefere und analysierende Nachdenken über: Wie kann Mathematik helfen, das Problem zu beschreiben, zu strukturieren, zu ana-

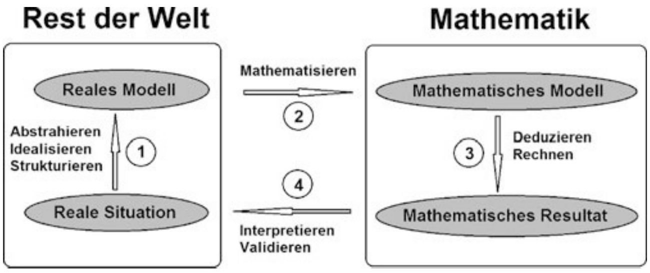
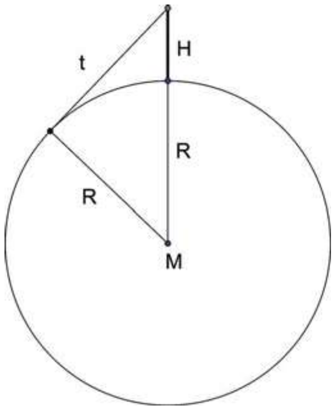


Abb. 1 Modellierungskreislauf – schematische Darstellung

Abb. 2 Sichtweite



lysieren,..., zu lösen? Sie sind *keine Übungsaufgaben* zu einem bestimmten mathematischen Teilgebiet, im Gegenteil, meist steht dabei überhaupt nicht fest, welche mathematischen Teilgebiete zur Anwendung kommen werden.

Dieses „Modellieren" braucht natürlich Zeit und Muße, es ist aber sicher gut investierte Zeit (Motivation, Sinnfrage, „richtiges Bild von Mathematik", etc.) und soll auf allen Ebenen des Sekundarstufenunterrichts verwirklicht werden. Anregungen dazu bieten z. B. alle ISTRON-Bände, aber auch viele andere Quellen (z. B. Greefrath 2007, Maaß 2007 etc.).

Es gibt viele schematische Darstellungen des Modellierungskreislaufes, die sich meist nur durch Nuancen unterscheiden (vgl. bekannte Arbeiten von Blum/Leiß 2005, Schupp 1988, Kaiser 1995, Maaß 2007, Leiß 2007, Borromeo-Ferri 2011 etc.), in Abb. 1 eine aus 4 Stationen und 4 Schritten (Tätigkeiten).

Es gibt auch Modellierungskreisläufe aus weniger (insbesondere für S&S) bzw. mehr Schritten (z. B. für die Fachdidaktik als Forschungsdisziplin), aber auf diese Details kommt es hier gar nicht an. Wichtig und allen diesen Modellierungskreisläufen gemein ist, dass unterschieden wird zwischen Realität („Rest der Welt") und Mathematik und dass es hier Übersetzungsprozesse gibt. Eine dabei in der Unterrichtspraxis zu klärende Frage ist, inwieweit so ein Modellierungskreislauf „Lernstoff" für S&S sein soll (z. B. die in Abb. 1 genannten „Stationen" oder mit Pfeilen bezeichnete Vorgänge). Wenn überhaupt, dann wohl nur in vereinfachter Form, d. h. in *Schülersprache* ausgedrückte *Vorgänge*, z. B.: ① Annahmen machen, vereinfachen; ② Mathematisches Modell erstellen (Übersetzen in die Sprache der Mathematik); ③ mathematisch arbeiten, Mathematik verwenden; ④ Rückübersetzen des Ergebnisses in die „Realität", Überprüfen des Ergebnisses.

Die dabei entstehenden *Stationen*, wie z. B. die Begriffe „Situationsmodell", „Realmodell", „Reale Resultate" etc. in erweiterten Modellierungskreisläufen (vgl. z. B. Blum und Leiß 2005) sind für die S&S weniger wichtig.

Anhand eines einfachen und bekannten Beispiels sollen diese Schritte beim Modellbilden nun etwas ausführlicher erklärt werden:

„Sichtweite auf das Meer"
Wie weit sieht man von einem 20 m hohen Aussichtsturm am Strand auf das offene Meer? (Evtl. Hinweis: Die Krümmung der Erdoberfläche begrenzt ja die Sichtweite.)

Diese Aufgabe kann auf verschiedene Arten im Unterricht behandelt werden.

1) **Lehrkraft (Schulbuch) gibt die Skizze vor; Erdradius gegeben; Variablen in der Skizze vorgegeben** (vgl. Abb. 2).
   Dann ist diese Aufgabe eine weitere *Übungsaufgabe* zum Thema „Pythagoras", eine gute, aber nur *eingekleidete Aufgabe*. Sie dauert nicht allzu lange, solche Aufgaben können dann sogar mehrere in einer Stunde gemacht werden.
2) **Als Modellierungsaufgabe**
   Dieses Beispiel ist eine gute Gelegenheit, die einzelnen Modellierungsschritte zu identifizieren. Die Sachlage ist nicht sehr komplex und überschaubar, deshalb ist die Erfolgsquote bei

S&S sicher relativ hoch (Voraussetzung: Pythagoras). Diese Aufgabe ist aber nicht nur während des Kapitels „Lehrsatz von Pythagoras" oder unmittelbar danach gut einsetzbar, sondern vor allem auch irgendwann einmal später. Sie ist so nicht als Übungsaufgabe zu Pythagoras gedacht, sondern: Gegeben ist eine beschriebene Situation, Problem, Aufgabe (mit Realitätsbezug); was kann man mit mathematischen Mitteln zur Lösung beitragen?

Die Aufgabenstellung als Modellierungsaufgabe sollte ohne vorgegebene Skizze erfolgen, nur obige Fragestellung und evtl. der in Klammern angegebene Hinweis.

S&S müssen dann *selbst* nach einer geeigneten Beschreibung der Situation suchen, haben selbst Gelegenheit, einmal diese typischen Modellierungsschritte (Vereinfachungen, Idealisierungen) vorzunehmen, das Problem zu strukturieren etc.

1. Erde als Kugel (Kreis in der Zeichnung); Erkenntnis, dass die Fragestellung etwas mit dem Erdradius zu tun hat → dessen Wert selbst nachschlagen); Turm in Verlängerung eines Radius
2. Sichtweite hat was mit *Tangente* zu tun, *rechtwinkliges Dreieck*, *Pythagoras*, Aufstellen der Gleichung
3. Berechnen der Sichtweite („Lösen der Gleichung")
4. Interpretieren: kann diese Lösung stimmen? Stimmen die Einheiten? Wenn nicht, noch einmal zurück (zu 1, 2, 3).

Natürlich brauchen die Schritte viel Zeit und müssen bei selbständiger Arbeit nicht in jeder Gruppe ideal ablaufen. Es können und werden Fehler gemacht werden, die aber vielleicht Gelegenheit bieten, sie produktiv aufzugreifen und zu thematisieren, um sie so in Zukunft besser zu vermeiden.

Bei Modellierungsaufgaben ist es immer möglich, dass S&S andere Wege – als von der Lehrkraft gedacht – einschlagen. Auch diese können interessant sein, S&S können dabei auch neue interessante Fragestellungen finden und diesen nachgehen. Lehrkräfte sollen bei Modellierungsaufgaben nicht stark eingreifen, ihre Intervention in den Lösungsprozess sollte

- der Situation und Gruppe angepasst, also **individuell**
- nur **minimal** (d. h. was unbedingt nötig ist)
- möglichst **selbständigkeitserhaltend** (nicht die S&S weitestgehend auf die eigene Lösung hin trimmen, sondern deren Selbständigkeit soll so weit wie möglich erhalten bleiben; die S&S sollen modellieren, nicht die Lehrkraft!)

sein (vgl. Leiß 2007). In der Steuerung und Planung dieser selbständigen Modellierungsprozesse besteht ein besonders wichtiges Geschick der Lehrkraft: Bei starken Schwierigkeiten weiter anspornen durch Hinweise, Fragen und behutsame Hilfen. Natürlich, wenn etwas komplett falsch ist, und die S&S dies auch nach längerer Zeit nicht selbständig merken, so muss dies auch gesagt werden. Man kann oft Hinweise auch in Fragen verpacken und damit S&S anregen sich weiterhin selbständig mit der Aufgabe zu beschäftigen. Solche strategischen Hinweise und Fragen allgemeiner Natur wären z. B.: Lest die Aufgabe genau durch und stellt euch die Situation vor! Macht euch eine Skizze! Überlegt genau, was eigentlich gesucht ist! Was wollt ihr mit eurem Vorgehen erreichen? Habt ihr schon alle Informationen verwertet? Wo könnte man ggf. fehlende Informationen herbekommen? Ist dieses Ergebnis sinnvoll? Passt es zur Ausgangssituation? etc.

S&S holen sich auch bei anderen Gruppen vielleicht Hilfe, es gibt Diskussionen, es wird über Mathematik geredet. S&S müssen sich verständlich machen, Argumente und Ansichten austauschen und Mathematik wird mehr als Prozess betrieben.

Plant man noch die nötigen Kurzpräsentationen der einzelnen Gruppen ein, so wäre für die obige Aufgabe (Sichtweite) sicher ein Zeitbedarf von 2–3 Unterrichtsstunden zu veranschlagen. So prägt sich der jeweilige Inhalt (hier: Sichtweite) sicher besser ein als im Rahmen einer kurzen Übungsaufgabe zum Thema Pythagoras (s. o.). Das Thema wird als Modellierungsaufgabe wohl lebendiger, sinnvoller, spannender etc. wahrgenommen von S&S, es kann dabei unmittelbar erlebt werden: „Mathematik kann helfen." (Sinnfrage, Motivation).

Ein ganz besonderes Anliegen von Freudenthal war bekanntlich: S&S sollen nicht so sehr „Angewandte Mathematik“ lernen, sondern eher „wie man Mathematik anwendet“. Einer Klasse als Lehrkraft „angewandte Mathematik“ vorzumachen ist meist etwas anderes als die S&S selber zum Anwenden von Mathematik zu befähigen – eine schwierige aber edle und wichtige Aufgabe!

Viele Lehrkräfte beklagen zu Recht, dass Modellieren in ihrer Ausbildung gar nicht vorgekommen ist. „Woher sollte man das denn können?“ ist manchmal zu hören. Neben den wichtigen didaktischen Fragen, die mit Modellierungsaufgaben zusammenhängen, muss man vor allem selbst einmal Gelegenheiten nutzen mathematisch zu modellieren. Diesen Sinn hatten die Workshops auf den ISTRON-Tagungen primär. Im Folgenden einige Modellierungsaufgaben, die im Workshop präsentiert und von Lehrkräften in Gruppen bearbeitet wurden.

Es sind meist nicht alle benötigten Daten gegeben. Ein wesentlicher Teil der Aufgabe besteht eben darin, selbst herauszufinden, welche Angaben hier denn überhaupt benötigt werden („unterbestimmte Aufgaben“). So müssen S&S die Aufgabe selbst „strukturieren“ und einiges selbst recherchieren (Internet).

3 Ausgewählte Modellierungsaufgaben der Workshops

3.1 Super Size Me[1]

In seinem berühmten Film hat sich Morgan Spurlock einem Selbstversuch ausgesetzt: 30 Tage Ernährung ausschließlich bei McDonald's, und zwar durchschnittlich 5000 kcal pro Tag, wobei er so gut wie keine körperliche Belastung hatte (weniger als 2000 Schritte pro Tag).

Das Ergebnis des Versuchs war eine Gewichtszunahme[2] von 84 kg auf 95,5 kg.

1. Wie kann die ungefähre Entwicklung des Gewichts in diesen 30 Tagen vor sich gegangen sein? Ist das im Film dargestellte Ergebnis des Experiments realistisch? Falls ja, hätte man die Gewichtszunahme von Morgan Spurlock auch im Vorfeld prognostizieren können?
   [Etwas konkreter: $G_0 = 84\,\text{kg} \to G_{30} = 95{,}5\,\text{kg}$; gebt eine Formel an, wie man ausgehend von G_n (Gewicht in kg nach n Tagen) zu G_{n+1} kommen kann! Berechnet ausgehend von $G_0 = 84\,\text{kg}$ und eurer Formel euren Wert von G_{30} und vergleicht mit dem obigen Wert.]
2. Wie würde eine andere Person (z. B. mit Ausgangsgewicht 70 kg) unter vergleichbaren Umständen zunehmen?
3. Wie könnte die Gewichtsentwicklung bei dieser Ernährung weitergehen? Würde sich das Gewicht bei einem bestimmten Wert „einpendeln“? Wenn ja, bei welchem?

3.2 Klopapier-Werbung

Diese Aufgabe (und die nächste: Abschn. 3.3, Dicke einer Frischhaltefolie) sind wenig komplex, sie können auch in nicht leistungsstarken Klassen (Sekundarstufe 1) eingesetzt werden.

Das Format ist 10 cm breit, ziemlich lang und insgesamt natürlich etwas gewöhnungsbedürftig. Trotzdem haben Pharma-, Putzmittel- und Reinigungsunternehmen das Klopapier als neues Werbemedium entdeckt.

Auf vielen Großpackungen steht die Anzahl der Blätter, meist $n = 200$ oder $n = 250$ Blatt, so dass die Gesamtlänge auf einer Rolle einfach als $n \cdot$ Blattlänge zu bekommen wäre. Auf einzelnen Rollen steht allerdings n nicht.

1. Wie könnte man die Gesamtlänge des Klopapiers auf einer vorliegenden Rolle mathema-

[1] Nach einer Idee von Prof. Dr. P. Galbraith, Universität Queensland, Australien.

[2] Streng genommen müsste man bekanntlich von „Masse“ statt „Gewicht“ sprechen.

Abb. 3 Frischhaltefolie

tisch begründet abschätzen? Findet dafür mindestens zwei verschiedene Möglichkeiten!
2. Was müsste der Meter Werbung auf einer Rolle kosten, damit die Rolle für die Verbraucher/innen kostenlos ist?
3. Wie viele € müssten in Deutschland schätzungsweise für Werbung auf Klopapier ausgegeben werden, damit alle Verbraucher/innen in Deutschland ihr Klopapier kostenlos bekämen?
4. Lasst euch selbst noch weitere spannende Fragen zu diesem Themenkreis einfallen und beantwortet diese, wenn auch nur näherungsweise!

3.3 Dicke einer Frischhaltefolie

Wie kann man näherungsweise bestimmen, wie dick (bzw. besser gesagt „dünn“) eine Frischhaltefolie ist (vgl. Abb. 3)? Beschreibe eine mögliche Vorgehensweise und gib das Ergebnis an.

3.4 Sonnenfinsternis am 11. 8. 1999

Am 11. August 1999 konnte man (bei Wetterglück) das relativ seltene Naturschauspiel einer *totalen Sonnenfinsternis* beobachten (auch in Süddeutschland und Österreich).

Wie kommt es eigentlich, dass der kleine Mond die riesige Sonne ziemlich genau abdecken kann (vgl. Abb. 4b)?

Wenn die Richtung der Schattenprojektion ungefähr senkrecht auf die Erdoberfläche ist, so entsteht auf der Erde *näherungsweise* ein *Kreis* als „Schatten“ (vgl. Abb. 4a).

1. Wie groß ist dieser *Schattenkreis* auf der Erde, in dem die totale Finsternis zu sehen ist, im *günstigsten* (d. h. größtmöglichen) Fall[3]?
2. Wie schnell bewegt sich in dieser Situation der Schattenkreis auf der Erdoberfläche?

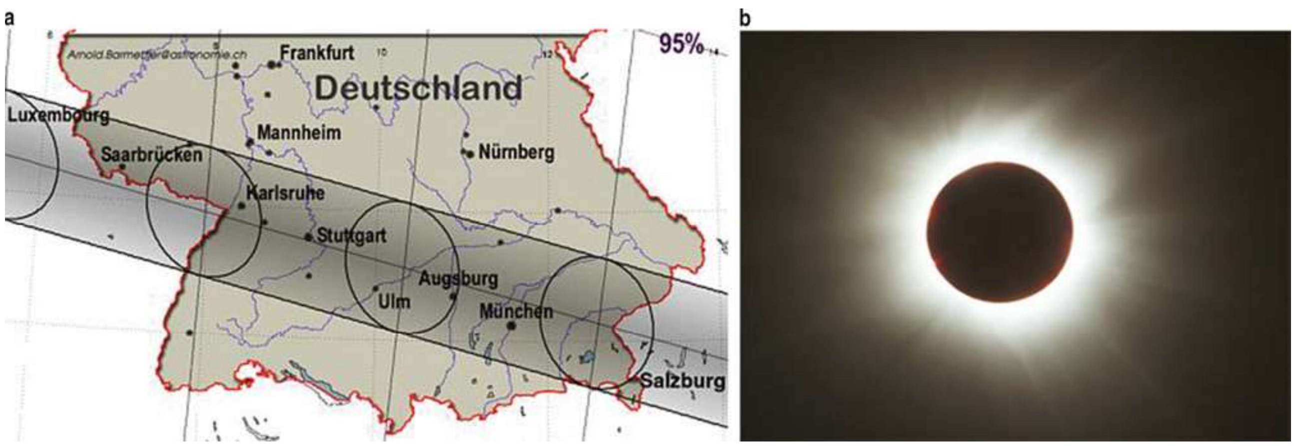


Abb. 4 **a** Bahn des Mondschattens über Europa 1999 (© A. Barmettler, Schweiz, mit freundlicher Genehmigung), **b** Mond verdeckt Sonne, 1999 (© K. Thurner, Astronomische Vereinigung, mit freundlicher Genehmigung)

[3] Vgl. auch H.-W. Henn (2000, S. 18 und 21).

Abb. 5 Venustransit mit Flugzeug (© Th. Ripplinger, mit freundlicher Genehmigung)

Abb. 6 Geländeeinschnitt (© Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend in Rheinland-Pfalz, mit freundlicher Genehmigung)

3.5 Flugzeugentfernung

Am Vormittag des 8. Juni 2004 zog die Venus genau vor der Sonne vorbei („Venustransit"). In früheren Jahrhunderten war dies die einzige Methode, um auf relativ komplizierte Art und Weise die Entfernung Erde – Sonne zu bestimmen.

Einigen Fotoreportern gelangen bei diesem Ereignis seltene Schnappschüsse mit vorbei fliegenden Flugzeugen (vgl. Abb. 5).

1. Wie könnte man mit so einem Bild (mathematisch begründet) abschätzen, wie weit das Flugzeug jeweils vom Beobachter weg war?
2. Gibt es auch eine Möglichkeit ohne die Venus („schwarzer Punkt" links oben) auszukommen?

3.6 Geländeeinschnitt – ICE-Strecke[4]

In Abb. 6 sieht man einen Geländeeinschnitt auf der ICE-Strecke Frankfurt – Köln, in dem gerade ein ICE mit 8 Waggons durchfährt.

1. Ungefähr wie viele LKW-Ladungen mussten bei dem im Bild sichtbaren Bereich des Geländeeinschnittes abtransportiert werden? Holt dazu für ein mathematisches Modell noch nötige Informationen ein, bzw. macht geschätzte Annahmen.
2. Wie viel Erde wurde entlang der Neubaustrecke Frankfurt – Köln durch Einschnitte bzw. Aufschüttungen (ohne Brücken bzw. Tunnels) insgesamt ungefähr bewegt?

3.7 Flüssigkeitstausch mit Pipetten

Es stehen zwei Gefäße mit gleicher Grundfläche auf dem Tisch, wobei in einem die Anfangshöhe der Flüssigkeit 10 cm und im anderen nur 5 cm beträgt.

Ein Chemiker sorgt nun per Hand wiederholt folgendermaßen für einen Austausch zwischen diesen beiden Gefäßen mittels zweier Pipetten P_1 und P_2 mit verschiedenen Innenquerschnitten:

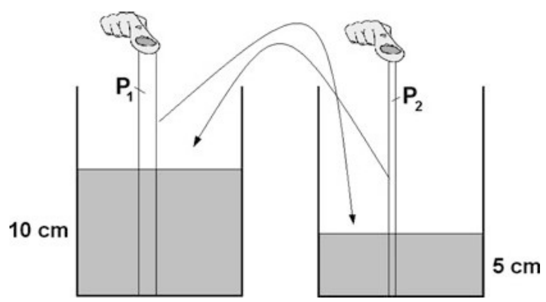


Abb. 7 Flüssigkeitstausch mit Pipetten

[4] Angelehnt an Fries u. a. 2004, S. 23ff.

Mit P_1 taucht er in das erste Gefäß mit Flüssigkeitshöhe 10 cm, mit P_2 ins zweite Gefäß mit Flüssigkeitshöhe 5 cm. Dann gibt er je einen Finger auf die Pipetten, so dass er sie gefüllt aus den Gefäßen nehmen kann, und gibt die Inhalte in das jeweils andere Gefäß (vgl. Abb. 7). Dann wiederholt er diesen Schritt noch einige Male: Immer mit P_1 vom ersten Gefäß ins zweite und mit P_2 umgekehrt (gleichzeitig).

1. Wie werden sich dabei die Flüssigkeitshöhen im Lauf der Zeit entwickeln?
   Werden sie sich irgendwo einpendeln?
   Wenn ja, bei welchen Werten?
2. Wie ist dies bei anderen Anfangshöhen bzw. anderen Pipettenquerschnitten?
   Worauf kommt es für die „Endhöhen" bzw. deren Verhältnis E_1/E_2 an?

4 Mögliche Lösungen bzw. Hinweise

4.1 Super Size Me

Ein mögliches erstes Modell wäre vielleicht lineare Gewichtszunahme: $G_n = 84 + \frac{11{,}5}{30} \cdot n$; aber die Zunahme nach diesem Modell wäre unbeschränkt!

Besseres Modell:

Man braucht einen so genannten Grundumsatz, um sein Gewicht (bei keiner bis nur ganz geringer körperlicher Belastung) zu halten: Zwei bekannte Faustregeln lauten (Internetrecherche):

- 24 × Gewicht in kg = „Grundumsatz" in kcal [pro Stunde ist der „Grundumsatz" (kcal) ca. das eigene Körpergewicht (kg)]
- Für 1 kg Gewichtszunahme braucht man ca. 7800 überschüssige kcal.
  [1 kg Körperfett hat ca. 7800 kcal; auch andere Werte zu finden: z. B. 7000 kcal]

Damit: $G_{n+1} = G_n + \frac{5000-24 \cdot G_n}{7800}$; „Grenzwert" bei $G = \frac{5000}{24} = 208\frac{1}{3}$ kg (unabhängig vom Anfangsgewicht).

4.2 Klopapierwerbung

Abschätzungen für die Länge des Klopapiers:

Man kann das Papiervolumen leicht näherungsweise bestimmen („Hohlzylinder"; Abmessen von Innen- und Außendurchmesser, Breite der Rolle); den ungefähren Dickebedarf einer Schicht erhält man, indem man die Dicke von z. B. 10 oder 20 Schichten misst (oder zählt, wie viele Lagen sich in einer Dicke von z. B. 5 mm befinden). Das Papier kann man sich dann „abgewickelt" vorstellen und das Volumen durch „Breite" und „Dicke" dividieren, dann ergibt sich die Länge.

Alternative: Man bestimmt näherungsweise den mittleren Umfang (Abmessen des mittleren Radius) und die Anzahl der Schichten auf der ganzen Rolle (s. o.).

4.3 Dicke einer Frischhaltefolie

Man könnte z. B. mittels der auf den Verpackungen sichtbaren Angaben über die Länge (z. B. 30 m) und Breite (z. B. 29 cm) die fehlende Dicke über das „Folienvolumen" bestimmen (das nicht abgewickelte Folienvolumen entspricht einem Zylinder über einem Kreisring, dessen Durchmesser an der realen Rolle gemessen werden können. Als Alternative böte sich an, mit einem mittleren Durchmesser einer Folienumwicklung zu arbeiten, auch dieser kann am realen Objekt leicht bestimmt werden. Dividiert man die 30 m durch den zugehörigen mittleren Umfang einer Wicklung, so erhält man näherungsweise die Anzahl der Wicklungen. Mit dieser Anzahl kann man aus der Dicke der gesamten Folienaufwicklung (abzumessen an der Rolle) leicht die Dicke einer einzelnen Schicht näherungsweise bestimmen. Gleichwertig dazu ist die Bestimmung einer Ober- bzw. Untergrenze für die Dicke, indem man statt mit dem mittleren Umfang mit dem äußeren bzw. inneren Umfang ar-

hans.humenberger@univie.ac.at

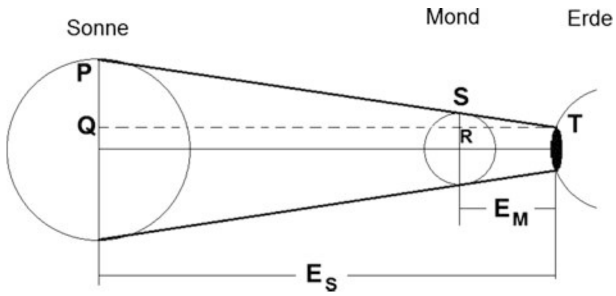


Abb. 8 Sonne–Mond–Erde, ähnliche Dreiecke

beitet. In jedem Fall ergibt sich eine Dicke von ca. 13–14 μm.

4.4 Sonnenfinsternis

Bei dieser Aufgabe gibt es schon relativ viel durchstrukturiertes Material im Internet, so dass man durch „Googeln“ relativ einfach große Teile einer vollständigen Lösung findet. Dies ist natürlich nicht Sinn und Zweck „selbständigen Modellierens“. So gesehen wäre es bei dieser Aufgabe sinnvoll, das Internet nicht zuzulassen. Andererseits brauchen die S&S Informationen über Radien und Entfernungen von Sonne und Mond. Diese können aber auch in einem Physikbuch oder in einem Atlas nachgeschlagen werden.

1. Maximale Größe des Schattenkreises
Man findet:

$$R_\mathrm{M} \approx 1740\,\mathrm{km} \quad \text{und} \quad R_\mathrm{S} \approx 696.000\,\mathrm{km}$$

Die Entfernungswerte E_S und E_M schwanken (vgl. Abb. 8):

$$E_\mathrm{S} \approx 147{,}1\text{–}\boxed{152{,}1}\,\text{Mio. km}$$
$$E_\mathrm{M} \approx \boxed{350.000}\text{–}400.000\,\mathrm{km}$$

Damit der Erdschatten möglichst groß ist, muss die Sonne möglichst weit weg und der Mond möglichst nahe sein. Daher werden bei der Berechnung die eingerahmten Werte verwendet.

Man kann z. B. die Ähnlichkeit der Dreiecke *PQT* und *SRT* (vgl. Abb. 8) verwenden:

$$(R_\mathrm{S} - R_\mathrm{Erdschatten}) : E_\mathrm{S} = (R_\mathrm{M} - R_\mathrm{Erdschatten}) : E_\mathrm{M}$$
$$\Rightarrow \boxed{R_\mathrm{Erdschatten} = \frac{R_\mathrm{M} \cdot E_\mathrm{S} - R_\mathrm{S} \cdot E_\mathrm{M}}{E_\mathrm{S} - E_\mathrm{M}}}$$

Maximaler Erdschattenradius: ca. 135 km.

2. Geschwindigkeit des Schattenkreises
Die Rotation von Erde und Mond um die Sonne kann klarer Weise unberücksichtigt bleiben, da dies die Situation gegenüber der Sonne ja nicht ändert.

Die Rotation der Erde um die eigene Achse geschieht vom Nordpol aus betrachtet gegen den Uhrzeigersinn, auch die Rotation des Mondes um die Erde, d. h. die beiden Rotationen wirken in Bezug auf die Geschwindigkeit des Schattenkreises auf der Erde einander entgegen und kompensieren einander teilweise – wir müssen für die „resultierende Geschwindigkeit“ einfach die „Differenz“ bilden[5].

Da die Entfernung Mond–Erde gegenüber der Entfernung Sonne–Mond (Erde) so gut wie nichts ausmacht (nur ca. $1/490$), kann man bei der Geschwindigkeit des Schattenkreises, die durch die Mondrotation verursacht ist, einfach von der Mondgeschwindigkeit ausgehen (ansonsten müsste man für die zugehörige Schattengeschwindigkeit auf der Erde diesen Wert noch mit dem Faktor ca. $491/490$ strecken):

Der Mond legt in einem *siderischen Monat* (27,3 Tage) genau eine Runde (durchschnittlicher Radius = 384.000 km) zurück: In einer Stunde daher ca. 3680 km. Davon muss man noch die Geschwindigkeit abziehen, die durch Eigenrotation der Erde entsteht: 1680 km/h wären dies am Äquator, in Österreich bzw. Süddeutschland muss man noch mit dem Cosinus des Breitengrades (48,5°) multiplizieren: ca. 1100 km/h.

Ergebnis: Ca. 3700 km/h − 1100 km/h = 2600 km/h.

[5] Die Neigung der Mondbahn gegenüber der Ekliptik beträgt nur ca. 5°, was man für die Abschätzung der Größenordnung der Geschwindigkeit vernachlässigen kann.

hans.humenberger@univie.ac.at

4.5 Flugzeugentfernung

1. Man sieht in Abb. 5, dass der Flugzeugrumpf und die Venus ca. gleich „dick" erscheinen. Daher kann man ansetzen (ähnliche Dreiecke):

$$D\colon E_F = D_V\colon E_V \Rightarrow E_F \approx 17\,\mathrm{km}$$

   Erklärung der verwendeten Bezeichnungen:
   E_F: = Flugzeugentfernung (gesucht),
   D: = Dicke (Durchmesser) des Flugzeugrumpfes (ca. 5 m; geschätzt oder Internetrecherche),
   E_V: = Entfernung Venus–Erde (beim Transit ist dies einfach der Unterschied der beiden Bahnradien um die Sonne): Ca. 150 Mio. km – 108 Mio. km = 42 Mio. km,
   D_V: = Venusdurchmesser ≈ 12.100 km.
2. Ohne Venus: Man sieht (messen!) in Abb. 5, dass die Flugzeuglänge in den Sonnendurchmesser etwas mehr als 4-mal hineinpasst.
   Mit D_S: = Sonnendurchmesser (ca. 1,4 Mio. km), E_S: = Sonnenentfernung (ca. 150 Mio. km) und der Flugzeuglänge L_F (ca. 40 m, geschätzt oder Recherche über Flugzeuglängen) ergibt sich:

$$L_F\colon E_F = \frac{D_S}{4}\colon E_S \Rightarrow E_F \approx 17\,\mathrm{km}$$

4.6 ICE-Einschnitt

1. Breite des Trapezes unten: ca. 15 m (Zugbreite mal 5); Höhe des Geländeeinschnittes: ca. 8 m (Zughöhe mal 2); Neigungswinkel des Geländes: etwa 45° (geschätzt aus dem Bild oder Internetrecherche) → obere Breite: ca. $15 + 2 \cdot 8 = 31$ m.
   Der sichtbare Einschnitt ist ca. doppelt so lang wie der Zug, und die Länge eines Waggons beträgt ca. 25 m, daher ergibt sich für die Zuglänge ≈ 200 m.
   Die Einschnittlänge beträgt daher ≈ 400 m (Oder Recherche: Abstand zweier Masten der Oberleitung = 66,6 m; ca. 6 solche Abstände)

$$V \approx \frac{15+30}{2} \cdot 8 \cdot 400\,\mathrm{m}^3 = 72.000\,\mathrm{m}^3$$

   Ein Baustellenfahrzeug kann ca. 30 m³ transportieren → ca. 2400 notwendige Fahrten.
2. Frankfurt–Köln: ca. 177 km. In der Nähe der Städte verläuft die Strecke ca. 20 km jeweils durch ebenes Gelände, $2 \cdot 20 = 40$ km; Tunnels und Brücken: ca. 50 km. Es bleibt also eine Strecke von ca. $177 - 40 - 50 = 87$ km übrig. Eine Internetrecherche zum Streckenprofil oder einfach eine bewusste Schätzung ergibt: Aushub ≈ Aufschüttung;

   ca. 44 km Aushub:

$$\approx 7{,}2\,\text{Mio. m}^3 + 720.000\,\mathrm{m}^3 \approx 8\,\text{Mio. m}^3$$

   In der Presse wurde veröffentlicht: ca. 9,3 Mio. m³. D. h. der obige Näherungswert von ca. 8 Mio. m³ ist ein sehr gutes Ergebnis, trotz sehr *grober* Abschätzungen.

4.7 Flüssigkeitstausch mit Pipetten

Der Kontext dieser Aufgabe kann zwar nicht als authentische Realsituation bezeichnet werden, ist also im engeren Sinn keine klassische Modellierungsaufgabe, sondern eher eine eingekleidete Aufgabe, sie hat aber trotzdem interessante Aspekte des Übersetzens in die Sprache der Mathematik (Mathematisieren) und auch interessante innermathematische Aspekte (z. B. Konvergenzfragen, vgl. auch Humenberger 2013).

$$E_i := \text{Endhöhen}; \quad Q_i := \text{Querschnitte}.$$

Es ändert sich nichts mehr, wenn $E_1 \cdot Q_1 = E_2 \cdot Q_2 \Leftrightarrow E_1/E_2 = Q_2/Q_1$; es kommt also nur auf die Pipettenquerschnitte und nicht auf die Anfangshöhen an. Die Entwicklung ist mit Tabellenkalkulation gut zu veranschaulichen (für weitere Details siehe Humenberger 2013).

hans.humenberger@univie.ac.at

Literatur

Blum, W., Leiß, D.: Modellieren im Mathematikunterricht mit der Tanken-Aufgabe. mathematiklehren **128**, 18–21 (2005)

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W., Weigand, H.-G.: Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Journal für Mathematik-Didaktik **22**(1), 73–90 (2001)

Borromeo-Ferri, R.: Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht. Springer, Wiesbaden (2011)

Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe Bd. 1. Klett, Stuttgart (1973)

Fries, D., et al.: Mathematik hilft [fast] immer! Broschüre des Ministeriums für Bildung, Frauen und Jugend, Rheinland-Pfalz (2004)

Greefrath, G.: Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben. Aulis, Köln (2007)

Henn, H.-W.: Realitätsbezug im Mathematikunterricht. In: Flade, L., Herget, W. (Hrsg.) Lehren und Lernen nach TIMSS, S. 13–24. Verlag Volk und Wissen, Berlin (2000)

Humenberger, H.: Einen Grenzwert erfahren – mit Glasröhrchen und Tabellen zu Gleichgewichten. mathematiklehren **180**, 34–37 (2013)

Kaiser, G.: Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In: ISTRON, Bd. 2, S. 66–84 (1995)

Leiß, D.: Hilf mir es selbst zu tun – Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Franzbecker, Hildesheim (2007)

Maaß, K.: Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe 1. Cornelsen, Berlin (2007)

Schupp, H.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. Der Mathematikunterricht, **6**, 5–16 (1988)

hans.humenberger@univie.ac.at