Jahrgang 64 · Heft 4–2018

DER MATHEMATIK-UNTERRICHT

Beiträge zu seiner fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung

Schwerpunkt **DGS und Beweisen**
Hans Humenberger

Adressen der Autoren

Andreas Filler
Filler@math.hu-berlin.de

Hans Humenberger
hans.humenberger@univie.ac.at

Jörg Meyer
J.M.Meyer@t-online.de

Berthold Schuppar
berthold.schuppar@tu-dortmund.de

Hans Walser
hwalser@bluewin.ch

THEMENTEIL

HANS HUMENBERGER

Zur Einführung

Das Thema *Beweise im Mathematikunterricht* hat sehr viele Aspekte und Facetten, die man aus unterschiedlichen Blickwinkeln beleuchten kann, das war immer schon so. Neu hinzugekommen, seit Technologie (insbesondere „Dynamische Geometrie Software" – DGS) mehr oder weniger Einzug in den Unterricht gehalten hat, ist die Möglichkeit, dass Lernende geometrische Situationen explorieren können. Dabei können Sachverhalte auch entdeckt oder zumindest experimentell überprüft werden, noch bevor von mathematischen Beweisen die Rede ist – in vielen Fällen spielt dabei das DGS als „Messinstrument" eine tragende Rolle, denn man kann mit DGS ja allerlei genau messen (Winkel, Längen, Flächeninhalte, Volumina etc.).

Dabei ist man natürlich mitten bei einer Diskussion, was mathematische Beweise – im Lernprozess – alles leisten sollen. Zuallererst ist hier vielleicht zu nennen, dass Mathematik ein Paradefall für eine „begründende Zunft" ist. Dies sollte auch im Unterricht klarwerden: Die Frage nach dem „WARUM?" sollte auch eine zentrale im Unterricht sein [MEYER/PREDIGER 2009]. Mathematik kann so gesehen auch eine Vorbildrolle für außermathematische Situationen darstellen: Der Anspruch auf *begründete* Aussagen gibt eine gewisse Orientierung in einer von „fake news" und „alternativen Fakten" durchzogenen Welt. Nicht dass damit das Problem aus der Welt geschafft wäre, aber eine gewisse Sensibilität hilft dabei jedenfalls.

Weitere wichtige Funktionen von Beweisen sind einerseits zu klären (erhärten), DASS gewisse Aussagen gelten bzw. richtig sind, andererseits zu ERKLÄREN, WARUM diese richtig sind (dass Beweise nicht unbedingt erklärend zu sein brauchen, ist spätestens seit G. HANNA [1990] klar, sie spricht von „proofs that only prove" vs. „proofs that also explain"). Bei der Frage nach dem DASS können DGS-Experimente natürlich die subjektive Überzeugung erhärten (wer zweifelt wirklich noch am Satz von THALES, wenn man sieht, dass der Peripheriewinkel über einem Durchmesser in allen möglichen Lagen immer 90° bleibt?), der Aspekt des WARUM ist aber dadurch klarerweise noch unberührt. Streng genommen ist nicht einmal das DASS wirklich geklärt mit einem Computerexperiment, aber es ist nicht leicht das Lernenden klar zu machen.

In diesem Heft geht es um verschiedene Beispiele, wie DGS-Experimente das Beweisen anregen können, einerseits an eher bekannten Phänomenen rund um den Umfangswinkelsatz, andererseits auch an eher unbekannteren Phänomenen. De VILLIERS [1999] hat noch weitere *Funktionen von Beweisen* angegeben (Systematisieren, Entdecken, Kommunizieren, intellektuelle Herausforderung), die hier nicht thematisiert werden sollen.

Im Beitrag von A. FILLER wird aufgezeigt, dass es in der Geometrie eine Vielzahl von Optimierungsproblemen gibt, zu deren Lösung sehr unterschiedliche Methoden genutzt werden. Vielen dieser Probleme ist gemeinsam, dass die Lösungen nicht offensichtlich sind – vor der Beschäftigung mit Beweisen steht zunächst die Suche nach Behauptungen, die bewiesen werden sollen. Hierfür können DGS eine wertvolle Hilfe sein. Mitunter können DGS-Experimente auch zur Findung von Beweisideen beitragen, besser ist hierfür allerdings eine Software wie OKGeometry geeignet, die Konstruktionen Bedingungen „aufzwingen" und geometrische Eigenschaften analysieren kann, die bestehen müssen, damit die Zielbedingungen erfüllt sind. Die dadurch gegebenen Hinweise können Schülerinnen und Schüler nutzen, um Beweise zu entwickeln. Dies wird anhand von Optimierungsproblemen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades beschrieben, angefangen von recht einfachen Flächeninhaltsminimierungen bzw. -maximierungen einbeschriebener Drei- und Vierecke bis hin zu komplexeren Problemen wie dem FAGNANO-Problem und dem Fermatpunkt.

Der Beitrag von H. HUMENBERGER beschäftigt sich mit Flächenausgleichsphänomenen im Bereich regelmäßiger Vielecke und bei verzerrten Schachbrettern. Bei normalen Schachbrettern (8×8, unverzerrt) ist ja klarerweise Flächenausgleich zwischen Weiß und Schwarz (Grau) vorhanden, aber wie ist das bei allgemeinen ($m\times n$) und verzerrten Schachbrettern? DGS-Experimente (DGS als Messinstrument) führen zu Vermutungen, die begründet werden sollen.

Der Beitrag von J. MEYER widmet sich cum grano salis dem Umfangswinkelsatz. Dieser ist in vielen Ländern aus dem Geometrieunterricht ja verschwunden, und auch dort, wo es ihn noch gibt, wird seine „Kraft" nicht immer gesehen. Dieser Aufsatz enthält eine Reihe von Aussagen, die mit Hilfe von Dynamischer Geometrie-Software leicht zu entdecken sind und deren Beweise stets auf dem Umfangswinkelsatz beruhen.

Der Beitrag von B. SCHUPPAR nimmt als Ausgangspunkt ein einfaches, aber variantenreiches Problem über Quadrate, es geht um sogenannte *Transversalenvierecke*. Bei der Verallgemeinerung auf andere Vierecke (Parallelogramme etc.) macht sich der DGS-Einsatz bezahlt (DGS als Messinstrument, Ortslinie), um funktionale Zusammenhänge zu erforschen und auch andere Zusammenhänge zu entdecken, die dann nach einer Begründung verlangen.

Beim Beitrag von H. WALSER geht es um Schrägbilder der Erde (schräg auf die Äquatorebene projiziert). Dabei können merkwürdige Eigenschaften der Bilder von Meridianen und Breitenkreisen entdeckt werden, wobei diese auch durch DGS visualisiert werden können. Auch bei der Suche nach formalen Beweisen kann ein DGS helfen.

Literatur

[1] HANNA, G. (1990): Some Pedagogical Aspects of Proof. In: Interchange 21(1), 6–13.

[2] MEYER, M, PREDIGER, S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. In: Praxis der Mathematik in der Schule 51(30), 1–7.

[3] DE VILLIERS, M. (1999): The Role and Function of Proof with Sketchpad. https://carma.newcastle.edu.au/jon/Preprints/Papers/JMB%20solo/ICMI%2019/Related/mdv%20proof.pdf