



Erkundungen und Abschätzungen bei Google-Maps-Bildern

Hans Humenberger

1 Datum und Uhrzeit der Aufnahme

Gewisse Standardprobleme zum Thema Schatten sind im Mathematikunterricht ja weit verbreitet, z. B. in der analytischen Geometrie, bei Sachaufgaben (Wie hoch ist ein Mast, wenn man seine Schattenlänge und den Einfallswinkel der Sonne kennt?), die erste Bestimmung des Erdumfangs nach Eratosthenes (um ca. 240 v. Chr.) etc. Mit neuer Technologie (Computertechnik) werden nun auch weitere interessante Aufgaben zu diesem Thema möglich. Bei Google-Maps und anderen ähnlichen Diensten findet man viele Bilder mit schattenwerfenden Objekten. Kann man bei solchen Bildern das Datum und die Uhrzeit der Aufnahme begründet abschätzen? Wenn ja, wie?

In Abb. 1 sieht man ein Haus (London), das einen Schatten wirft. Da ein Schornstein genau an der Hausmauer ist, kann man den zugehörigen „Bodenpunkt“ gut ausmachen (lotrecht hinunter von der Schornsteinspitze zum Boden). Der Schattenpunkt der Schornsteinspitze ist gut zu sehen, und solche Karten haben immer eine Nord-Süd-Ausrichtung. Daher kann man relativ gut die Schattenrichtung am Boden sehen: ca. 10° von der Nordrichtung abweichend nach Westen, d. h. die Sonne steht momentan ca. 10° von der Südrichtung entfernt in Richtung Osten (knapp vor Mittag). Diesen Wert bezeichnet man als das **Azimut** a der Sonne: $a \approx -10^\circ$. Das Azimut ist in östlichen Richtungen negativ, in westlichen Richtungen positiv, bei $a = 0^\circ$ steht die Sonne genau im Süden, es ist also einfach die gewohnte **Himmelsrichtung**, mit dem Nullpunkt genau im Süden.

Das Azimut der Sonne ist eine Koordinate der Sonne im so genannten **Horizontsystem**, die andere ist die **Sonnenhöhe** h (Höhenwinkel der Sonne, auch **Elevation** genannt). Das Horizontsystem beschreibt den Sonnenstand vom Beobachter aus durch zwei Winkelkoordinaten:

$-180^\circ < a \leq +180^\circ$, $-90^\circ \leq h \leq +90^\circ$. Für $h < 0^\circ$ ist die Sonne für den Beobachter nicht sichtbar (z. B. in der Nacht). Zu Mittag (genau im **Süden**) nimmt h das Maximum an („Sonnenhöchststand“), vgl. Abb. 2.

Wie kann man nun diese Sonnenhöhe ungefähr abschätzen? Dazu bräuchte man gute Schätzwerte von **Schattenlänge** und **Objekthöhe**. Die Schattenlänge (weiß hervorgehoben in Abb. 1b) ist hier leicht zu bekommen, weil der „Bodenpunkt“ des Schornsteins¹ und der Schattenpunkt der Schornsteinspitze gut auszumachen sind, man kann diese Entfernung direkt in Google-Maps messen, dazu gibt es ein eigenes Tool zum Entfernungsmessen (rechte Maustaste), alternativ dazu kann man auch mit dem Lineal abmessen und die rechts unten eingeblendete Strecke von einer Länge von z. B. 20 m in Wirklichkeit verwenden („Maßstab“). Man erhält hier ungefähr 11 m als Schattenlänge. Man darf hier natürlich nicht den Abstand auf der Karte zwischen der wirklichen Schornsteinspitze und dem zugehörigen Schattenpunkt am Boden messen (auch wenn das in diesem Fall zufällig nur einen kleinen Unterschied machte), das wäre nur dann „erlaubt“, wenn die Satellitenaufnahme² von einer Position „lotrecht über dem Boden“ stattfände. Das ist hier aber nicht der Fall, was man z. B. daran sieht, dass die östlichen Hausmauern gut zu sehen sind.

Nun muss man noch die Gebäudehöhe (vom Boden bis zur Schornsteinoberkante) schätzen. Dazu bietet sich Google-Street-View an. Das in Rede stehende Haus von Abb. 1 ist in Abb. 3 mittels Google-Street-View zu sehen.

Hier kann man die Höhe relativ gut abschätzen, man kann z. B. die Ziegelreihen bis zur Rauchfangspitze zählen: ca. 110. Wenn man eine Ziegelhöhe von 6,5 cm (Eng-

¹Gemeint ist damit die lotrechte Projektion der Schornsteinspitze auf die Erdoberfläche, sozusagen ihr „Grundriss“.

²Z. B. mittels des Satelliten Landsat 8 (NASA | USGS): seit Februar 2013; Umlaufzeit: ca. 98 min („sonnensynchron“, d. h. die „Orbitalebene“ hat einen festen Winkel zur Linie Planet-Sonne, in einem Jahr dreht sich die Orbitalebene genau einmal um die Erde oder anders formuliert: „Die Erde nimmt diese Ebene bei der Rotation um die Sonne sozusagen mit“); Höhe: ca. 700 km; Bahnneigung (Winkel zwischen

H. Humenberger (✉)
Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Wien, Österreich
E-Mail: hans.humenberger@univie.ac.at



Abb. 1 Ein Haus mit Schatten in London. (Quelle: Google-Maps)

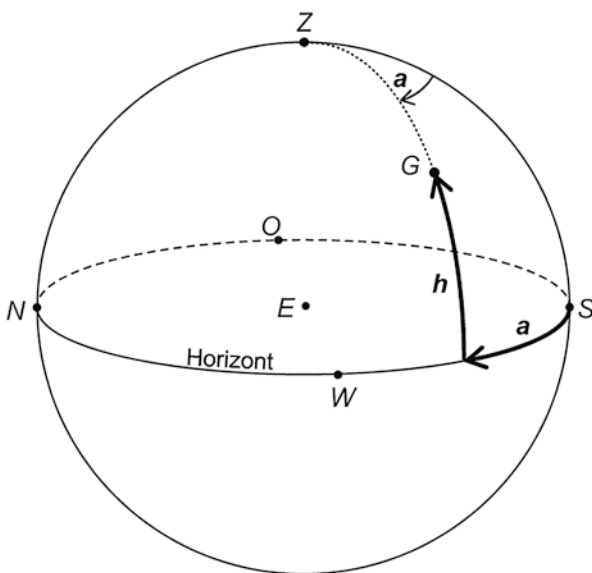


Abb. 2 Das Horizontsystem der **Himmelskugel**³, die Erde ist als Punkt in deren Zentrum markiert, G bezeichnet ein Gestirn (z. B. die Sonne), Z den Zenit – das ist der Punkt auf der Himmelskugel genau senkrecht über einem Beobachter auf der Erde. (Quelle: Schuppar 2017, S. 121, mit freundlicher Genehmigung)

land!) mit einem Zwischenraum von 1 cm rechnet, dann kommt man auf ca. 8,20 m, andere Schätzungen kommen vielleicht auf 8 m (z. B. Hauseingangsstufe von einer ande-

Orbitalebene und Äquatorebene, von der „Ostrichtung“ aus gemessen): ca. 98° , d. h. fast polare Umlaufbahn (das entspräche einer Bahnneigung von 90°); „Streifenbreite“ der Aufnahmen auf der Erde: ca. 185 km.

³Dieses Bild entspricht der Wahrnehmung von der Erde aus. Das geozentrische Weltbild ist als physikalisch-astronomisches Modell natürlich längst überholt, gleichwohl eignet sich die Vorstellung einer „Himmelskugel“ (mit der Erde im Zentrum) zur Beschreibung vieler Phänomene sehr gut, weil wir den Weltraum um uns eben so wahrnehmen.

ren Ansicht: ca. 40 cm, zwei Geschosse zu je 2,80 m, dann noch ca. 2 m bis zur Schornsteinoberkante). Wir wollen die runden 8 m verwenden. Jetzt kann man die interessierende Sonnenhöhe (d. h. ihren Höhenwinkel) bestimmen, denn es gilt ja bekanntlich⁴: $\tan h = \frac{\text{Objekthöhe}}{\text{Schattenlänge}}$. Wir erhalten $h \approx 36^\circ$. Um dieses Resultat zu bestätigen, kann man auch noch andere Objekte mit ihren Höhen und Schattenlängen hernehmen. Nun reduziert sich also die Frage auf: Wann steht in London (geografische Breite $\varphi \approx 51,5^\circ$) die Sonne auf einer Höhe von 36° und gleichzeitig 10° im Osten? Die „tägliche Bahn“ der Sonne am Himmel ist ja abhängig von der so genannten **Deklination** δ der Sonne, die bekanntlich zwischen $-23,5^\circ$ und $+23,5^\circ$ im Laufe eines Jahres schwankt (für Details siehe Schuppar 2017). Die möglichen Deklinationswerte kommen i. A. pro Jahr zweimal vor (ausgenommen die beiden „Randwerte“ zu Sommerbeginn am 21. 6. bzw. zu Winterbeginn am 21. 12.), sodass klar ist, dass Sonnenbahnen i. A. an zwei Tagen des Jahres praktisch gleich sind. Das bedeutet anschaulich: Wenn man in dem Bereich, in dem die Sonne prinzipiell stehen kann, einen Punkt am Himmel fixiert, dann kommt die Sonne an diesem Punkt i. A. zweimal pro Jahr vorbei. Für die Sonnendeklination δ gibt es Tabellen (vgl. Tab. 1), zwischen den angegebenen Werten kann man linear interpolieren – hohe Präzision brauchen wir bei unserem Thema nicht!

Diese Sonnendeklination ist eine der beiden Koordinaten der Sonne im anderen System, im **Äquatorsystem**. Die andere Koordinate ist der **Stundenwinkel** t mit

⁴Etwas ungewöhnlich ist hier vielleicht, dass h hier nicht eine Höhe im herkömmlichen Sinn bezeichnet, sondern die **Sonnenhöhe**, die eigentlich ein Winkel ist. Aber der Buchstabe h ist für diese Sonnenhöhe sehr verbreitet (Schuppar 2017).



Abb. 3 Haus in London, Seitenwand. (Quelle: Google-Street-View)

sehr lesenswerte Buch von B. Schuppar (2017, S. 134 ff.) zu diesem Thema.

Nautische Formeln:

$$(I) \quad \sin(\delta) = \sin(\varphi) \cdot \sin(h) - \cos(\varphi) \cdot \cos(h) \cdot \cos(a)$$

$$(II) \quad \sin(h) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(t)$$

$$(III) \quad \sin(t) \cdot \cos(\delta) = \cos(h) \cdot \sin(a)$$

Unsere Daten sind $a \approx -10^\circ$, $\varphi \approx 51,5^\circ$ und $h \approx 36^\circ$. Daraus kann man mit (I) berechnen: $\delta \approx -2^\circ$ und mit (III) schließlich⁶: $t \approx -8^\circ$, das entspricht ca. eine halbe Stunde vor Mittag, d. h. ca. 11:30 Uhr (gemeint ist hier die **wahre Ortszeit**, bei der der Sonnenhöchststand auf 12:00 Uhr fällt – Mittag), das müsste man noch in MEZ bzw. MESZ umrechnen, aber darauf soll es hier nicht ankommen (für Details siehe Schuppar 2017, S. 130 ff.). Die beiden möglichen Daten sind mit $\delta \approx -2^\circ$ in Tab. 1 abzulesen: 16. März oder 29. September, also kurz vor Frühjahrsbeginn bzw. kurz nach Herbstbeginn. Wenn man die Vegetation näher betrachtet (insbesondere die manchmal fehlende Belaubung der Bäume), würde man vielleicht eher auf Frühjahrsbeginn als auf Herbstbeginn setzen. Leider hat man in Google-Maps keine (uns bekannten) Möglichkeiten herauszufinden, von wann diese Aufnahme stammt, sodass wir also dieses mathematisch begründete Schätzergebnis leider nicht verifizieren können.

Tab. 1 Deklination der Sonne (Quelle: Schuppar 2017, S. 127)

Tag	Jan	Feb	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug	Sept	Okt	Nov	Dez
1	-23,1	-17,3	-7,9	+4,3	+14,9	+22,0	+23,2	+18,2	+8,6	-2,9	-14,2	-21,7
5	-22,7	-16,1	-6,3	+5,8	+16,0	+22,5	+22,9	+17,2	+7,1	-4,4	-15,4	-22,3
10	-22,1	-14,6	-4,4	+7,7	+17,4	+23,0	+22,3	+15,8	+5,2	-6,4	-16,9	-22,8
15	-21,3	-12,9	-2,4	+9,5	+18,7	+23,3	+21,6	+14,3	+3,3	-8,2	-18,3	-23,2
20	-20,3	-11,2	-0,5	+11,3	+19,8	+23,4	+20,8	+12,7	+1,4	-10,1	-19,5	-23,4
25	-19,1	-9,4	+1,5	+12,9	+20,8	+23,4	+19,8	+11,0	-0,6	-11,8	-20,6	-23,4
30	-17,6		+3,9	+14,5	+21,8	+23,2	+18,4	+8,9	-2,5	-13,9	-21,5	-23,2

$-180^\circ < t \leq +180^\circ$, wobei Azimut a und Stundenwinkel t immer das gleiche Vorzeichen haben. Zu Mittag⁵ ist $t = 0^\circ$, am Vormittag ist $t < 0^\circ$, am Nachmittag ist $t > 0^\circ$. Dieser Stundenwinkel entwickelt sich im Laufe des Tages gleichmäßig, weil sich die Erde mit konstanter Geschwindigkeit dreht, m. a. W. in einer (Zeit-)Stunde ändert sich der Stundenwinkel um $360^\circ : 24 = 15^\circ$, vgl. Abb. 4.

Nun gibt es die so genannten **Nautischen Formeln**, mit deren Hilfe man die Horizontkoordinaten (a, h) in Äquatorkoordinaten (δ, t) umrechnen kann (und umgekehrt). Diese hier zu begründen bzw. herzuleiten, würde unseren Rahmen sprengen, wir verweisen auf das schöne und

⁵Gemeint ist 12:00 „wahre Ortszeit“, d. h. der Zeitpunkt des Sonnenhöchststandes (Sonne im Süden).

Bemerkung zu diesem Themenkreis:

Die Aufnahmen von Google-Maps sind „gestückelt“ und stammen i. A. von verschiedenen Daten bzw. Zeitpunkten. Das merkt man z. B. daran, dass ab einer gewissen „Trennlinie“ ganz andere Lichtverhältnisse bzw. Schatten etc. herrschen. Wenn man in vielen städtischen Bereichen bei Google-Maps immer weiter ins Bild hineinzoomt, d. h. „näherkommt“ und das Bild größer wird, dann wird oft automatisch auf **Google-Street-View** umgeschaltet, wobei bei diesen Aufnahmen oft der Aufnahmemonat dabeisteht. Bei der Street-View-Aufnahme von Abb. 3 steht „Sept. 2015“. Das passt zwar gut zu unserem obigen Ergebnis, hat aber

⁶Auch mit II kann man t berechnen, dann muss man allerdings aufpassen, denn es muss ja wegen $a < 0$ auch $t < 0$ sein!

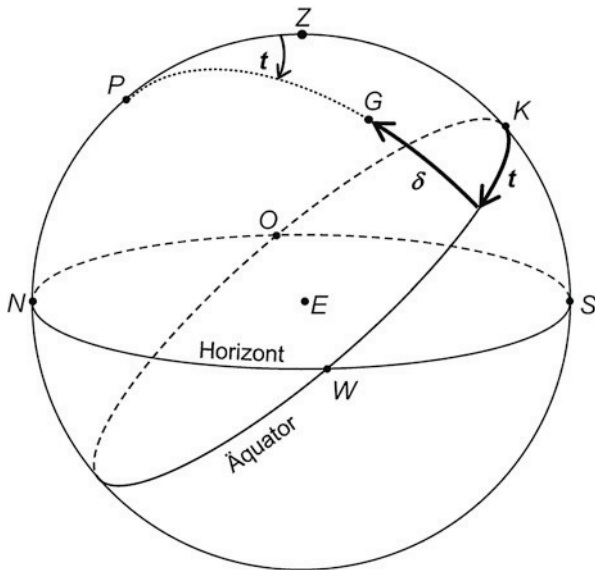


Abb. 4 Das Äquatorsystem der **Himmelskugel**, die Erde ist als Punkt markiert im Zentrum der Himmelskugel, G bezeichnet ein Gestirn (z. B. die Sonne), P den „Himmels(nord)pol“ (dort ist ca. der **Polarstern**), K den **höchsten** Punkt des **Himmelsäquators** (das ist die gedachte Projektion des Erdäquators auf die Himmelskugel) auch **Kulminationspunkt** genannt (Quelle: Schuppar 2017, S. 126, mit freundlicher Genehmigung)

leider keine Aussagekraft, weil es bei unserem Problem ja nicht um das Datum der Street-View-Aufnahme geht, sondern um jenes der Google-Maps-Aufnahme, und diese beiden haben ja überhaupt nichts miteinander zu tun.

Der Vorteil dieses Themenkreises gegenüber dem folgenden ist, dass man praktisch alle Gegenden als Bilder verwenden kann, der Nachteil, dass das Wissen über Kugelgeometrie (Nautische Formeln) meist unbekannt sein wird, sodass das die Lernenden nicht in reiner Eigenregie erarbeiten können, hier muss die Lehrkraft die zugehörigen Hinweise und Erklärungen geben. Dieser Nachteil kann aber anders gesehen auch ein Vorteil sein, denn das Bewusstwerden über die beiden möglichen Koordinatensysteme bzgl. des Sonnenstandes (Horizont- bzw. Äquatorkoordinaten) und Begriffe wie Azimut, Sonnenhöhe, Deklination, Stundenwinkel etc. sind ja wichtig, kommen aber im Schulunterricht praktisch nicht vor. Hier sind nicht unbedingt die jeweiligen Formeln (z. B. die Nautischen Formeln) gemeint, sondern nur die zugehörigen Phänomene, die auch fächerübergreifend zu Physik (Astronomie) bzw. Geografie behandelt werden könnten.

Insgesamt ist es sicher für viele verblüffend und motivierend, dass man aus Google-Maps-Aufnahmen doch relativ genau Aufnahmezeit und -datum⁷ abschätzen kann. Der ge-

naue Hintergrund der Nautischen Formeln braucht dabei im Unterricht gar nicht unbedingt erläutert zu werden, sie hier einfach zu verwenden kann dazu beitragen, ein wenig zu staunen, was Mathematik leisten kann.

Beim folgenden Problem ist zwar die dahintersteckende Mathematik (Geometrie) einfacher⁸, aber dafür braucht man nur selten zu erhaltende Google-Maps-Bilder. Für Aufnahmen wie hier in Abschn. 1 besprochen wären auch viele andere Orte in Deutschland oder Österreich möglich gewesen, aber wir haben London (Heathrow) hier schon in Abschn. 1 genommen, weil dieselbe Gegend auch noch einmal im kommenden Abschn. 2 eine Rolle spielt, und zwar mit einem weiteren Phänomen, das man leider nicht so häufig findet.

2 Nicht alltägliche Aufnahmen in der Nähe großer Flughäfen

Wenn man mit Google-Maps in der Nähe großer Flughäfen ist (z. B. Heathrow, Frankfurt, Los Angeles, New York etc.), so kann man per Zufall Flugzeuge in der Luft finden. Wenn der Google-Satellit seine Aufnahmen gerade dann macht, wenn sich ein Flugzeug dem Flughafen nähert (und das geschieht bei stark frequentierten Flughäfen sehr häufig), so ist das Flugzeug eben „im Bild“ und man kann sich in so einer Situation die naheliegende Frage stellen, ob man irgendwie herausbekommen kann (mit mathematischen Mitteln, also begründet, nicht einfach als „Bauchschätzung“), wie hoch das Flugzeug ca. fliegt in diesem Moment. In Abb. 5 sieht man ein Flugzeug in der Nähe von London-Heathrow im Anflug.

Diese Frage ergab sich aus einer weiteren zufälligen Entdeckung: Wenn man einen etwas größeren Ausschnitt nimmt, dann sieht man sogar den Schatten des Flugzeuges (Abb. 6), damit müsste sich doch was machen lassen! Aber wie genau sollte man das anpacken? Gerade solche Momente sind ja die spannenden im **Prozess des Betriebens von Mathematik**. Natürlich hat die Frage nach der Flughöhe aus solchen Bildern zwar Realitätsbezug, aber Lernende würden diese Frage vermutlich nicht von selbst stellen, sie muss von Lehrkräften kommen. Das gilt genauso für die Fragestellung von Abschn. 1, auch die muss von der Lehrkraft kommen.

Methode 1: Eine erste Idee ist hier, so ähnlich vorzugehen wie in Abschn. 1, wir kennen schon den ungefähren

⁷Beim Datum sind es – mit Ausnahme des Sommer- bzw. Winteranfangs (Sonnenwenden: 21. Juni, 21. Dezember) – zwei verschiedene mögliche Werte.

⁸Enthält aber trotzdem ein vielleicht überraschendes Moment, siehe unten.



Abb. 5 Flugzeug im Anflug auf Heathrow. (Quelle: Google-Maps)

Höhenwinkel $h \approx 36^\circ$ der Sonne zum Zeitpunkt der Aufnahme (mit Hilfe des Hauses). Nun könnte man in erster Näherung auf die Idee kommen, insbesondere wenn man nicht vorher Fragen wie in Abschn. 1 behandelt hat und um die zugehörige Problematik⁹ daher noch nicht gut Bescheid weiß, diesen Winkel zu verwenden und mit Hilfe der Horizontalstrecke Flugzeug-Flugzeugschatten auf die entsprechende Flugzeughöhe zu kommen (Abb. 7), entweder mit ähnlichen Dreiecken ($\frac{\text{Objekthöhe}}{s_1} = \frac{\text{Flugzeughöhe}}{s_2}$) oder mit Trigonometrie ($\text{Flugzeughöhe} = s_2 \cdot \tan h$). Nun liegt es zunächst ziemlich nahe, s_2 aus der Google-Maps-Aufnahme herauszumessen als Abstand zwischen Flugzeug und Flugzeugschatten.

Wenn man das macht, ergibt sich für $s_2 \approx 530$ m, damit käme man auf eine Flughöhe von ca. 385 m.

Nun gibt es glücklicherweise eine Überprüfungsmöglichkeit, ob dieses Ergebnis plausibel ist: Nämlich man kann die Entfernung zur Landepiste auf Google-Maps messen und daraus dann den durchschnittlichen Sinkflugwinkel bestimmen. Der liegt bei Standardanflügen bei ca. 3° (zwischen $2,5^\circ$ und $3,5^\circ$), wie man sich durch eine Internetrecherche informieren kann. Die Entfernung zur Landepiste von Heathrow beträgt bei unserem Flugzeug ca. 6 km (Google-Maps-Messung), das gäbe einen Winkel für den zugehörigen Sinkflugpfad von ca. $3,5^\circ$, passt also relativ gut.

Methode 2: Obwohl das Ergebnis gut zu passen scheint (die Höhe ist vielleicht in Wirklichkeit etwas weniger, so dass der Sinkwinkel näher bei 3° liegt?), kann man durch

genauerem Hinsehen relativ leicht einen **systematischen Fehler** erkennen: Wenn man nämlich die „Bodenstrecke“ s_2 einfach aus dem Google-Maps-Bild abmisst als Entfernung von Flugzeug und Schatten, dann stimmt das ja nicht, denn das Flugzeug ist nicht wirklich am Boden und der Satellit ist nicht lotrecht über dem Flugzeug (siehe oben)! D. h. das Flugzeug, das wir im Bild sehen, ist ja nur das *schräg* (!) auf die Erdoberfläche projizierte Bild des Flugzeuges (vom Satelliten aus), und da diese Projektionsrichtung eben nicht lotrecht ist, ist das nicht genau die gesuchte Bodenstrecke s_2 . Bezogen auf Abb. 7 heißt das, dass **Flugzeug im Bild** und **Bodenpunkt des Flugzeuges (Grundriss)** nicht dasselbe sind. Bei einer Höhe von fast 400 m und einer sichtlich schrägen Richtung des Satelliten, kann das eventuell schon einiges ausmachen.

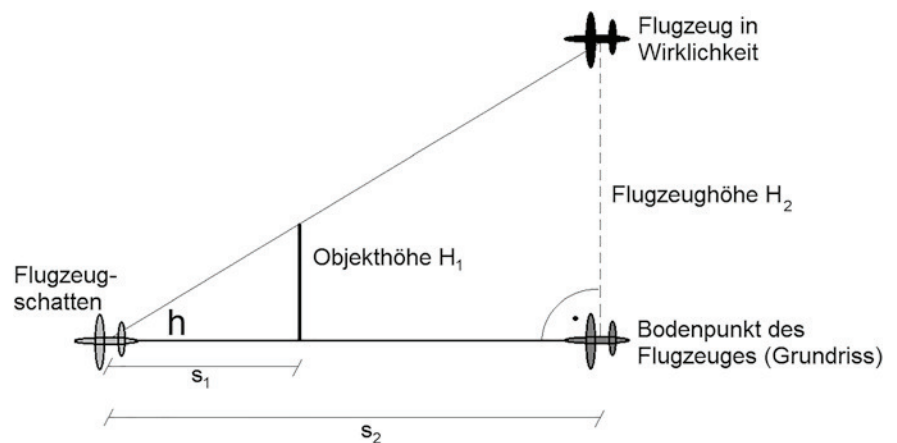
Um s_2 zu messen, bräuchten wir den Bodenpunkt des Flugzeuges, seine lotrechte Projektion auf die Erdoberfläche („Grundriss“). Den kann man näherungsweise auch leicht bestimmen durch Schnitt zweier bestimmter Geraden. Da wir das Azimut der Sonne näherungsweise kennen (siehe oben, $a \approx -10^\circ$) ist klar, dass der Bodenpunkt des Flugzeuges irgendwo auf der Geraden g liegen muss (Abb. 6). Andererseits sehen wir in Abb. 1, dass bei der Satellitenaufnahme des

⁹Gemeint ist hier der Unterschied zwischen „Bodenpunkt“ (Grundrispunkt) eines Objektes und dem zugehörigen Punkt der Schrägprojektion auf die Erdoberfläche (d. h. Punkt im Bild).



Abb. 6 Flugzeug im Anflug auf Heathrow, mit Schatten. (Quelle: Google-Maps; $\varphi = 51,4790992^\circ$, $\lambda = -0,5753195^\circ$; Sommer 2018); die Bedeutung der weißen Geraden g und h wird erst später klar; die Abb. 5 und 1 sind vergrößerte („zoomen“) Ausschnitte von Abb. 6. Leider findet man dieses Flugzeug nicht mehr, weil die Aufnahmen um London offenbar durch neuere ersetzt wurden.

Abb. 7 Die Flughöhe in ähnlichen Dreiecken



Hauses die fast perfekt in Ost-West-Richtung verlaufende Nord- bzw. Südmauer so gut wie nicht zu sehen ist, d. h. der Satellit steht praktisch genau irgendwo im Osten von diesem Haus aus gesehen¹⁰, und das heißt wiederum, dass der Bo-

¹⁰Man könnte auch seinen Höhenwinkel ungefähr abschätzen, denn wir wissen ja, dass das Haus mit Schornstein ca. 8 m hoch ist, und diese Höhe erscheint in Abb. 1 als „messbare“ Strecke von ca. 3,40 m, das ergibt einen Höhenwinkel von ca. 67° , aber diesen Wert brauchen wir gar nicht.

denpunkt des Flugzeuges irgendwo auf der Geraden h liegen muss¹¹, mithin im Schnittpunkt von g und h (Abb. 6, Ge-

¹¹Dieser Schluss ist in Heathrow möglich, weil sich hier die *Perspektive* auf ein Haus nicht ändert, wenn man es am Bildschirm bewegt, es handelt sich mathematisch betrachtet um reine Translationen. In anderen Gebieten (z. B. London-Zentrum, Wien, Berlin, Frankfurt a. M., etc.) ist das nicht so: Dort sieht man von einem Haus, das man auf den linken Bildrand zieht, dessen Ostmauer, wenn man es auf den rechten Bildrand zieht, dessen Westmauer (auch im 2D-Modus). In diesem Fall kann man über das Azimut des Satelliten praktisch keine Aussage treffen.

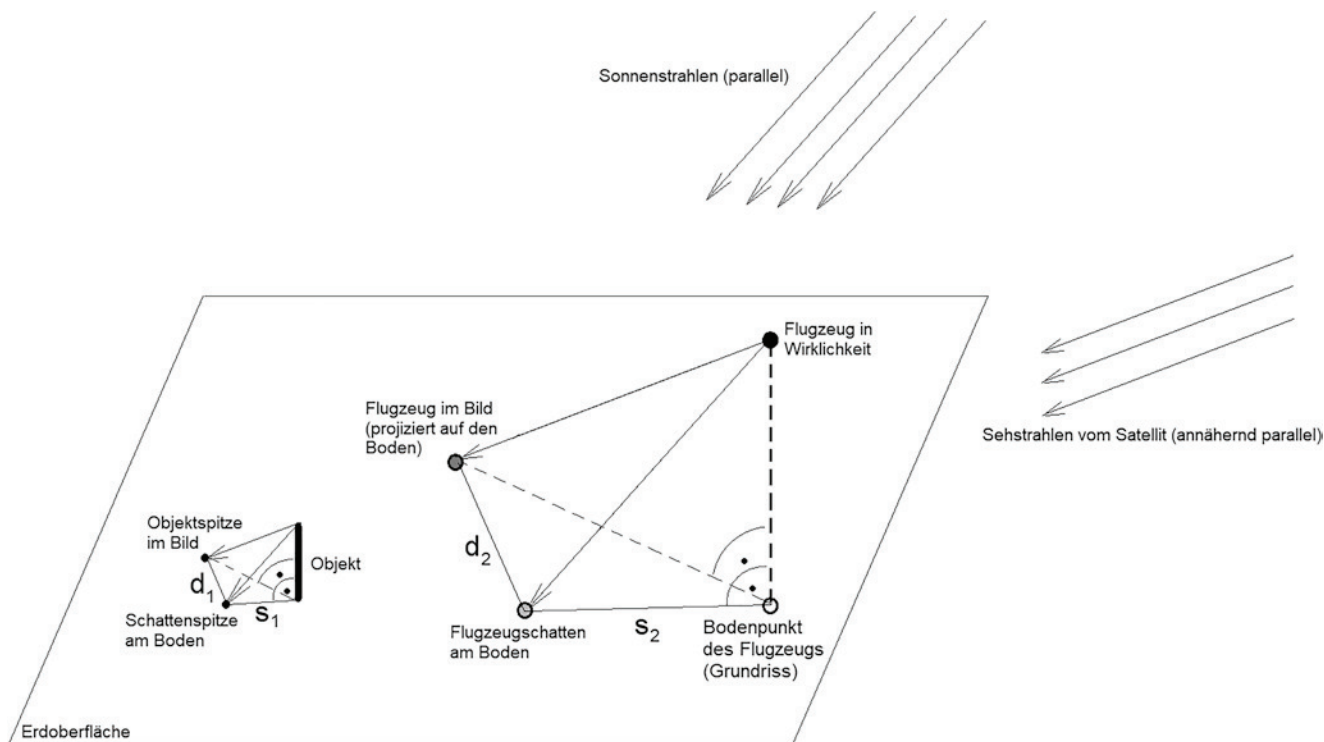


Abb. 8 Situationsskizze

raden in weiß angedeutet, Schnittpunkt auf den Schienen). Nun kann man auf der Karte s_2 bequem als Abstand dieses Schnittpunktes zum Flugzeugschatten messen, es ergibt sich: $s_2 \approx 380$ m und daraus eine Flughöhe von $\frac{380}{11} \cdot 8 \text{ m} \approx 280$ m, das sind immerhin ca. 100 m weniger als oben bei Methode 1. Der durchschnittliche Anflugwinkel auf Heathrow auf den verbleibenden 6 km wäre hier ca. $2,7^\circ$, auch das ist plausibel.

Methode 3:

In Methode 2 haben wir gesehen, dass bei allen Objekten die Verbindungen von Schattenspitze zu Bodenpunkt zueinander parallel sind (Richtung bestimmt durch das Azimut der Sonne), ebenso die Verbindungen von Objektspitze im Bild zu Bodenpunkt (Richtung bestimmt durch das Azimut des Satelliten). Dadurch auf den Plan gerufen, kann man auch vermuten, dass auch die Verbindungen **Objektspitze im Bild** und **Schattenspitze im Bild** bei verschiedenen Objekten immer parallel zueinander sein müssen. Zur Klärung (Bestätigung) hilft es, eine Situationsskizze (Abb. 8) zu machen, was hier eigentlich passiert.

Wie in Abb. 8 zu sehen ist, entstehen durch die auf die Erdoberfläche **projizierten** „Spitzen“ (Objektspitze, Flugzeug in Wirklichkeit) und durch die Schatten eigentlich **dreiseitige Pyramiden**, die jeweils eine lotrechte Kante (= Höhe; Objekthöhe bzw. Flugzeughöhe) haben. Diese beiden Pyramiden sind **ähnlich** zueinander, weil die Sonnen-

strahlen zueinander parallel und die Sehstrahlen vom Satelliten auch praktisch parallel sind. Daher müssen auch die mit $d_{1,2}$ bezeichneten Bodendistanzen zueinander parallel sein, und das sind die in Rede stehenden Verbindungen zwischen **Schattenspitze am Boden** und **Objektspitze im Bild** (bzw. **Flugzeug im Bild**). Daher braucht man, auch wenn man den oben angesprochenen systematischen Fehler vermeiden will, die Bodendistanzen $s_{1,2}$ eigentlich gar nicht, es genügen die Bodendistanzen $d_{1,2}$, das sind die viel leichter messbaren Entfernungen im Bild, einerseits zwischen Schornsteinspitze im Bild und zugehöriger Schattenspitze im Bild und andererseits zwischen Flugzeug bzw. Flugzeugschatten im Bild. Aufgrund dieser Ähnlichkeit gilt auch: $\frac{\text{Objekthöhe}}{d_1} = \frac{\text{Flugzeughöhe}}{d_2}$.

Das, was in Abschn. 1 eigentlich verboten war (die Schattenlänge des Hauses/Schornsteines zwischen Schattenspitze und Objektspitze zu messen (wir mussten dafür extra den „Bodenpunkt“ bzw. den „Grundriss“ des Schornsteines suchen), ist jetzt also die Methode der Wahl! Aus dem Google-Maps-Bild (Abb. 1) misst man $d_1 \approx 10$ m, damit ergibt sich mit $d_2 \approx 530$ m und einer Objekthöhe von 8 m eine Flughöhe von ca. 420 m.

Eine Literaturrecherche zu diesem Thema hat ergeben, dass Überlegungen mit Bildern von Flugzeugen und ihren Schatten in der Nähe von Flughäfen auch schon Helen Chick (Tasmanien) hatte (Chick 2016), bei ihr ist es der

Flughafen von Melbourne. Auch sie ist der Frage nachgegangen, ob man aus einem Google-Maps-Bild mit Flugzeug und Flugzeugschatten die Flughöhe abschätzen kann, im Wesentlichen handelt es sich bei ihr um die Methoden 1 und 3.

3 Entdeckung eines „Fehlers“ im Bild

Erstaunlich ist hierbei, dass durch die vom Prinzip her genaueren Überlegungen (kein **systematischer** Fehler mehr) von Methode 3 sich der Wert der Flughöhe sogar **vergrößert** hat gegenüber dem Wert von Methode 1 (385 m) und nicht näher an das Ergebnis von Methode 2 (280 m) heranführt. Man würde doch eher erwarten, dass das Ergebnis von Methode 3 Richtung Methode 2 tendiert, vermeiden sie doch beide auf ihre Art den systematischen Fehler von Methode 1. Das kann einen durchaus stutzig machen und noch einmal zur Lösung zurückkehren lassen: Man sieht in Abb. 1, dass die Richtung der Verbindung von Schornsteinspitze zu Schattenspitze knapp 10° von der Nord-Süd-Richtung abweicht (diesmal in die andere Richtung, also ca. $+10^\circ$), in Abb. 6 sieht man mit freiem Auge, dass die Richtung von Flugzeugbild zu Flugzeugschatten fast 45° von der Nord-Süd-Richtung abweicht. Das kann unter keinen Umständen zusammenpassen, diese beiden Richtungen müssten doch eigentlich parallel sein! Dieser Umstand kann vielleicht Lernenden auch schon früher auffallen, jedenfalls kann man daraus den Schluss ziehen: In Abb. 6 ist nicht das ganze dort sichtbare Gebiet zu ein und demselben Zeitpunkt aufgenommen worden, da müssen bei verschiedenen Teilen verschiedene Zeitpunkte beteiligt sein, es muss dort irgendwo „gestückelt“ worden sein. An den Häuser- und Baumschatten etc. sieht man diesen Effekt nicht, weil vermutlich nur wenige Sekunden zwischen den Aufnahmen liegen. Das Flugzeug ist zu weit links bzw. der Schatten ist zu weit rechts. Vielleicht ist der Aufnahmezeitpunkt des Schattenbereiches wenige Sekunden später als der des Flugzeugbereiches (bei der schnellen Bewegung eines Flugzeuges bzw. des zugehörigen Schattens machen auch wenige Sekunden etwas aus)? Jedenfalls bedeutet das für unsere Berechnungen in Methode 1 und Methode 3, dass wir von „falschen Daten“ ausgegangen sind. Wenn die angesprochene Vermutung (wenige Sekunden Differenz) stimmt, haben wir aber mit Methode 2 doch eine davon unabhängige Lösung: gleichgültig wie weit das Flugzeug rechts oder links ist, der Schnittpunkt der weißen Geraden g und h in Abb. 6 bleibt davon unberührt. In diesem Sinn ist vermutlich bei unserem Bild der Wert von Methode 2 jener, der der Wirklichkeit am nächsten kommt. Methode 2 hat aber nur aus zwei Gründen so einfach funktioniert: (1) in London ändert sich die Perspektive auf ein Haus nicht, wenn

man das Haus am Bildschirm bewegt, auch im „2D-Modus“ (vgl. Fußnote 11), (2) weil der Satellit praktisch genau in östlicher Richtung steht, andernfalls wäre es nicht so leicht, die Gerade g einzuzeichnen und den Bodenpunkt des Flugzeuges zu finden.

Wenn man der Meinung ist, dass wegen dieser „Miserere“ vieles vergebens war (vergeudete Zeit), sollte man ein anderes solches Bild suchen, das diesen „Fehler“ nicht aufweist. Z. B. findet man auf dem Flughafen von Moskau (29. 12. 2019) gleich zwei Flugzeuge in der Luft, eines unmittelbar nach dem Start in westsüdwestlicher Richtung ($\varphi = 55,9671242^\circ$, $\lambda = 37,3815286^\circ$), dort passen die notwendigen Parallelitäten, d. h. diese Aufnahmen sind vermutlich zum selben Zeitpunkt geschehen und man hat dort auch unmittelbar ein Flugzeug am Rollfeld, dessen Flughöhe (man wird vermutlich die hinteren Tragflächen nehmen) gut zu schätzen ist, siehe Abb. 9.

Ein zweites ist im Landeanflug ostnordöstlich des Flughafens, aber dieses Gebiet wurde nicht zum selben Zeitpunkt aufgenommen wie jenes unmittelbar am Flughafen, das erkennt man an der deutlich anderen Schattenrichtung (Abb. 10a, leicht nach links geneigt im Gegensatz zur leicht nach rechts geneigten Schattenrichtung in Abb. 9a,b) und an der anderen Farbtonung der Umgebung, in Abb. 10b ist die Grenze der beiden Bereiche deutlich zu erkennen. D. h. für die Abschätzung der Höhe dieses Flugzeuges kann man das Flugzeug am Rollfeld oder ein Gebäude am Flughafen nicht verwenden, man muss ein Objekt (Baum, Haus) im Umfeld des Flugzeuges im Landeanflug nehmen (man darf nicht zu weit südlich in den anders getönten Bereich gehen), aber dort passen dann die Parallelitäten.

Auch bei Chick 2016 taucht das Problem der nicht parallelen Schattenrichtungen nicht auf. In solchen Situationen liefert vermutlich Methode 3 die genauesten Ergebnisse.

Man kann aber auch der Meinung sein, dass dieser „Fehler“ die Fragestellung sogar noch reizvoller macht. Leider ist aber, wie schon erwähnt, „unser“ Flugzeug auf Google Maps ohnehin nicht mehr zu finden, sodass man gezwungen ist, andere zu suchen. Jene Flugzeuge in Moskau sind aber eine gute Alternative, auch hier muss man beim landenden Flugzeug aufpassen!

4 Resume und Ausblicke

Die erwähnte notwendige Parallelität (der Verbindungslinien zwischen Objektspitze und zugehöriger Schattenspitze im Bild) ist eine wesentliche Erkenntnis aus der Auseinandersetzung mit diesem Thema. Wenn man über diese schon a priori Bescheid weiß, dann kann man in so einer Situation schon bedeutend früher die Diagnose stellen: Hier müssen



Abb. 9 Ein Flugzeug nach dem Start, eines am Rollfeld, Flughafen Moskau. (Quelle: Google-Maps)



Abb. 10 Ein Flugzeug im Landeanflug, Flughafen Moskau. (Quelle: Google-Maps), im rechten Bild ist die Grenze zwischen den verschiedenen getönten Bereichen weiß hervorgehoben (insbesondere für den schwarz-weiß-Druck im Buch)

verschiedene Aufnahmezeitpunkte bei einzelnen Teilen am Werk gewesen sein!

Aber um diese Parallelität einzusehen, bedarf es eben einer ausführlicheren Situationsskizze, sodass man die zugehörigen zueinander ähnlichen Tetraeder erkennt, auch dem Autor ist das erst auf den zweiten Blick klargeworden. Diese Ähnlichkeit der Tetraeder ist insgesamt ein interessantes Phänomen, und zwar aus mehreren Gründen:

1. Man vermutet es i. A. nicht a priori, es liegt nicht ganz klar auf der Hand, man braucht dafür eine entsprechend analysierende Situationsskizze.
2. Man hat dadurch eine Rechtfertigung, mit in der Karte leichter zugänglichen Distanzen zu arbeiten (man

braucht weder „Bodenpunkte“ noch die genaue Position des Satelliten), aber eben nur, wenn die Aufnahme zeitlich homogen ist.

3. Durch die Parallelität von d_1 und d_2 ergibt sich eine schnelle Überprüfbarkeit, ob eine Aufnahme „zeitlich homogen“ sein kann. Dabei müssen nicht unbedingt Flugzeuge beteiligt sein, es können auch beliebige andere schattenwerfende Objekte sein.

Eine anfängliche Vermutung ist vielleicht auch, dass man für eine Abschätzung der Flugzeughöhe notwendig die Satellitenposition (Azimut und Höhenwinkel) kennen muss, was aber gar nicht der Fall ist. Bei Methode 2 braucht man nur das Azimut des Satelliten. Das alles sind sicher lehrrei-

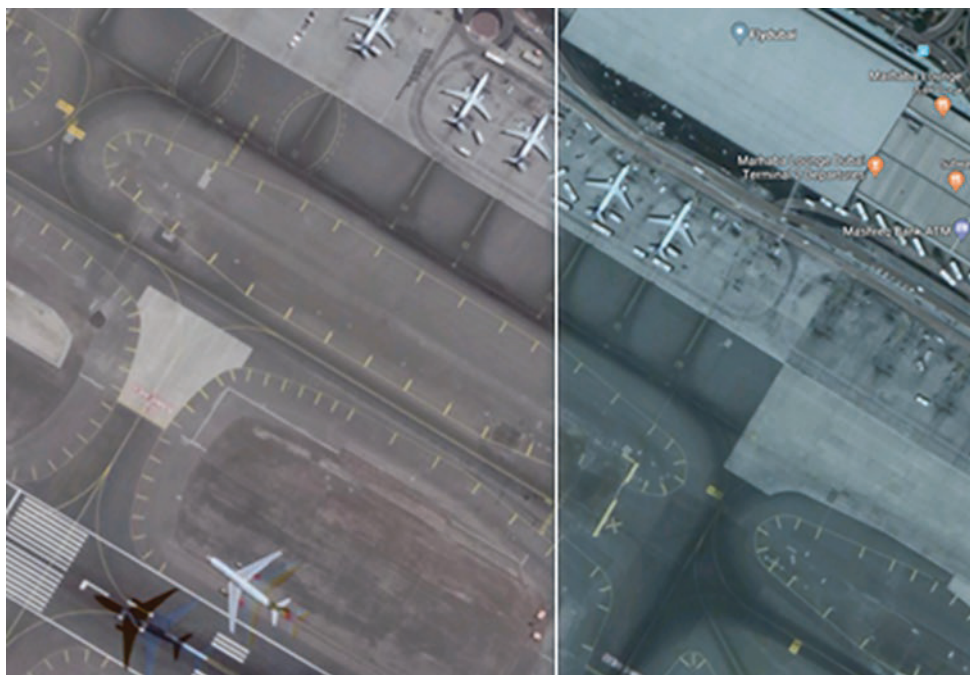


Abb. 11 Flughafen Dubai. (Quelle: Google Maps), ein Flugzeug unmittelbar nach dem Abheben (mit Schatten), einige Flugzeuge am Boden stehend; Sommer 2018. Grenze zwischen den verschiedenen getönten Bereichen weiß hervorgehoben (insbesondere für den schwarz-weiß-Druck im Buch), leider gibt es dieses Bild auch mittlerweile nicht mehr.

che Aspekte dieses Themas und sprechen für eine Behandlung in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht.

Des Weiteren spricht für dieses Thema, dass es verschiedene Behandlungsmöglichkeiten gibt (Methoden 1–3) und dass man hier mit sehr bekannter und weit verbreiteter Technologie (Google-Maps) arbeiten und experimentieren kann. Wenn man nicht vorher das Thema von Abschn. 1 behandelt, sondern gleich das Problem mit der Flughöhe, dann ist man vielleicht auch nicht so sehr auf „Bodenpunkte“ fixiert, sodass Methode 1 dann doch relativ naheliegt. Vielleicht betrachtet man (d. h. misst aus der Karte) dann intuitiv auch die „richtigen“ und leicht zugänglichen Abstände $d_{1,2}$ und setzt sie ins Verhältnis zu den jeweiligen Höhen (Methode 3). Wenn man aber dann sein Vorgehen erklären bzw. rechtfertigen soll, wird man es nicht leicht haben, man muss eine Skizze wie in Abb. 8 machen, um die Hintergründe zu erkennen.

Es ist insgesamt leider relativ mühsam solche Bilder zu finden, auf denen ein Flugzeug in der Nähe eines Flughafens zu sehen ist. Eine mögliche Strategie beim Suchen solcher Bilder ist: In Google-Maps ausgehend von den Landebahnen der Flughäfen diese Landbahnen auf der Karte „im Geiste zu verlängern“ und in diesen beiden Richtungen zu suchen, ob man ein Flugzeug erkennt. Dabei sollte man die Auflösung nicht zu hoch haben (sonst muss man u. U. sehr lange die Karte verschieben in Landebahnrichtung, und das sollte sehr stabil in eine feste Richtung erfolgen!), aber auch nicht zu niedrig, sonst erkennt man das Flugzeug nicht

mehr; hier das richtige Maß zu finden ist anfangs ein wenig mühsam. Außerdem ist der Schatten des Flugzeuges selbst bei ungetrübtem Sonnenschein nicht immer leicht zu finden, geschweige denn bei Bewölkung. Aber die Bemühungen lohnen sich wirklich...

Ein interessantes Bild fand man im Sommer 2018 auch auf dem Flughafen von Dubai, ein Flugzeug knapp nach dem Abheben (Abb. 11), leider gibt es auch dieses Bild nicht mehr auf Google Maps, diese Aufnahmen scheinen relativ rasch zu wechseln¹². „Interessant“ ist hier in zweifacher Hinsicht gemeint: Erstens sieht bzw. sah man bei genauerem Hineinzoomen auch die Schatten der stehenden Flugzeuge, mit deren Hilfe man auch die Höhe des fliegenden Flugzeugs gut abschätzen kann (Methode 3; man kann ja leicht abschätzen bzw. recherchieren, wie hoch bei einem Flugzeug die Tragflächen sind), ohne weitere Gebäude (Bäume, Masten) und deren Höhe zu benötigen. Zweitens sieht bzw. sah man im Bild deutlich einen Unterschied zwischen der linken und der rechten Seite, es gibt dort jeweils eine ganz andere Farbgebung (Lichtverhältnisse, Wetter, Tageszeit etc.). Diese beiden Teile wurden also sicher nicht zur selben Zeit aufgenommen, das lässt sich sogar an den Schatten leicht feststellen: Die stehenden Flugzeuge in der

¹²D. h. es hat auch nur wenig Sinn, genaue Koordinaten solcher Bilder anzugeben. Aber immerhin scheint es immer wieder solche Aufnahmen irgendwo zu geben.

linken Bildhälfte haben einen ganz anderen Schatten als in der rechten. Man sieht hier sogar kleinere Verwerfungen an der Trennlinie. Hier geht also so eine „Stückelungslinie“, wie sie auch in den obigen Bildern nahe Heathrow vorkommen muss, mitten durch den Flughafen.

Ein ähnliches Bild findet man (März 2019) auf dem Flughafen von Mumbai, nur dass das Flugzeug dort unmittelbar vor der Landung ist ($\varphi = 19,0896671^\circ$, $\lambda = 72,880152^\circ$).

Wir haben mit elementaren mathematischen Mitteln interessante Fragen zum Thema Schatten beantworten können, wobei wir in Abschn. 2 mehrere Methoden vorgestellt haben. Wenn Lernende teilweise selbstständig arbeiten sollen, ist es immer gut, wenn es mehr als einen einzigen Ansatz zur Lösung des Problems gibt. Die in Abschn. 1 vor-

kommenden aber wenig bekannten **Nautischen Formeln** brauchen im Unterricht nicht begründet zu werden, man kann sie auch einfach benutzen, wichtiger ist hier vielmehr das Bewusstsein, dass es das Horizont- und das Äquatorsystem gibt. Die Entdeckung von „Fehlern im Bild“ wie in Abschn. 3 beschrieben kann das Thema sogar noch reizvoller machen.

Literatur

- Chick, H.: Look down from the sky: Is it a bird? Is it Superman? No, it's a plane. *The Australian Mathematics Teacher* **72**(4), 21–29 (2016)
- Schuppar, B.: *Geometrie auf der Kugel*. Springer-Spektrum, Berlin (2017)