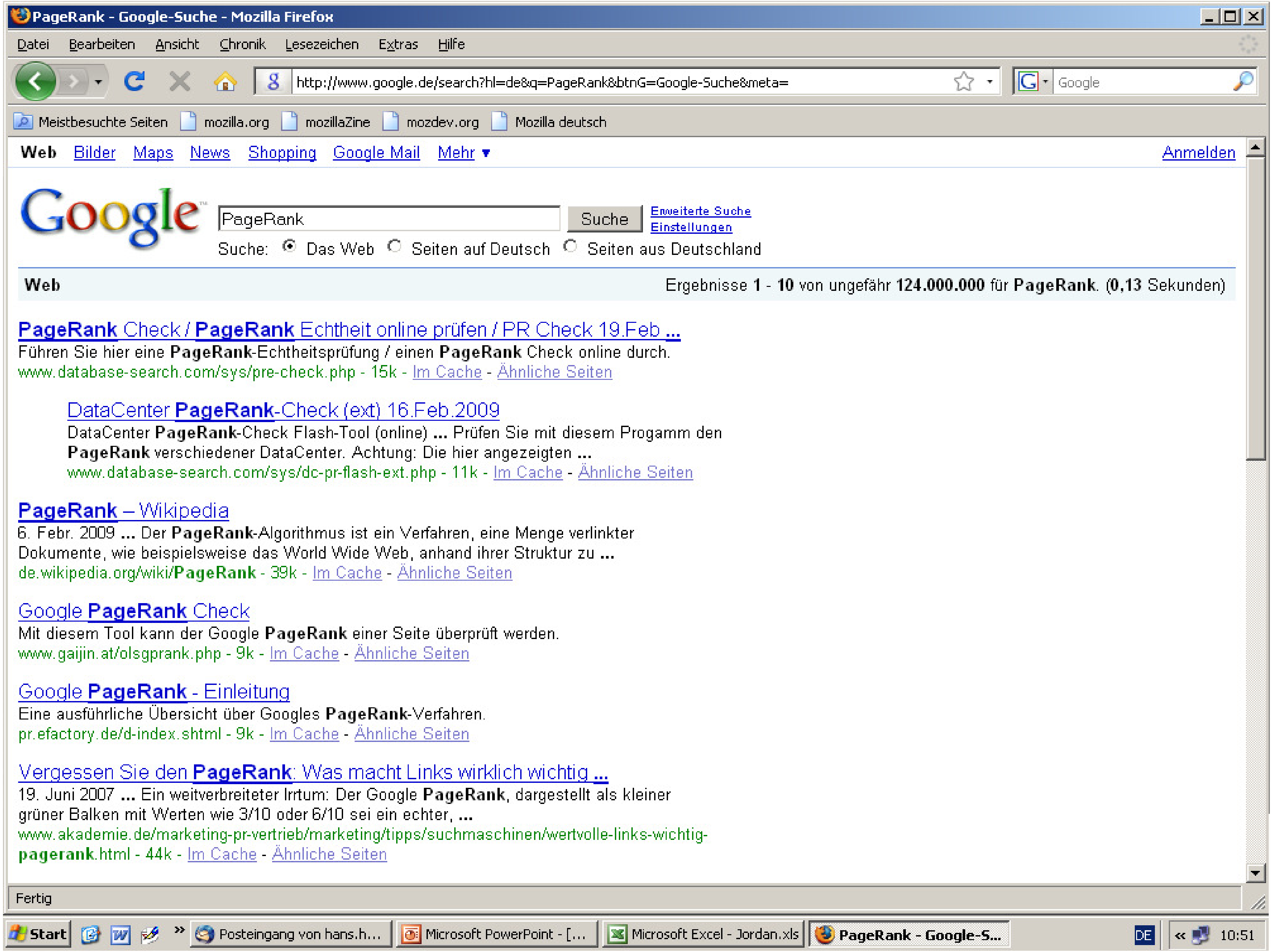
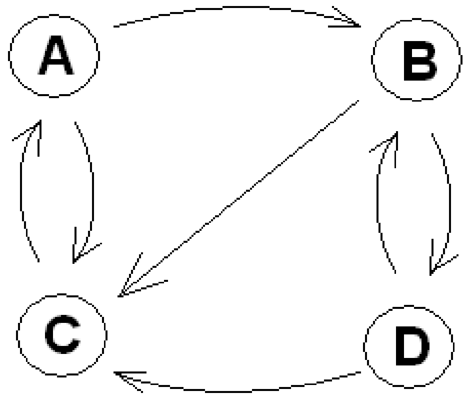
universität wien

Hans Humenberger

Das PageRank-System von Google – eine aktuelle Anwendung im MU


PageRank - Google-Suche - Mozilla Firefox
Datei Bearbeiten Ansicht Chronik Lesezeichen Extras Hilfe
http://www.google.de/search?hl=de&q=PageRank&btnG=Google-Suche&meta=
Google
Meistbesuchte Seiten mozilla.org mozillaZine mozdev.org Mozilla deutsch
Web Bilder Maps News Shopping Google Mail Mehr ▾
Anmelden
Google
PageRank
Suche
Erweiterte Suche
Einstellungen
Suche: Das Web Seiten auf Deutsch Seiten aus Deutschland
Web
Ergebnisse 1 - 10 von ungefähr 124.000.000 für PageRank. (0,13 Sekunden)
PageRank Check / PageRank Echtheit online prüfen / PR Check 19.Feb ...
Führen Sie hier eine PageRank-Echtheitsprüfung / einen PageRank Check online durch.
www.database-search.com/sys/pre-check.php - 15k - Im Cache - Ähnliche Seiten
DataCenter PageRank-Check (ext) 16.Feb.2009
DataCenter PageRank-Check Flash-Tool (online) ... Prüfen Sie mit diesem Progamm den PageRank verschiedener DataCenter. Achtung: Die hier angezeigten ...
www.database-search.com/sys/dc-pr-flash-ext.php - 11k - Im Cache - Ähnliche Seiten
PageRank – Wikipedia
6. Febr. 2009 ... Der PageRank-Algorithmus ist ein Verfahren, eine Menge verlinkter Dokumente, wie beispielsweise das World Wide Web, anhand ihrer Struktur zu ...
de.wikipedia.org/wiki/PageRank - 39k - Im Cache - Ähnliche Seiten
Google PageRank Check
Mit diesem Tool kann der Google PageRank einer Seite überprüft werden.
www.gaijin.at/olsgprank.php - 9k - Im Cache - Ähnliche Seiten
Google PageRank - Einleitung
Eine ausführliche Übersicht über Googles PageRank-Verfahren.
pr.efactory.de/d-index.shtml - 9k - Im Cache - Ähnliche Seiten
Vergessen Sie den PageRank: Was macht Links wirklich wichtig ...
19. Juni 2007 ... Ein weitverbreiteter Irrtum: Der Google PageRank, dargestellt als kleiner grüner Balken mit Werten wie 3/10 oder 6/10 sei ein echter, ...
www.akademie.de/marketing-pr-vertrieb/marketing/tipps/suchmaschinen/wertvolle-links-wichtig-pagerank.html - 44k - Im Cache - Ähnliche Seiten
Fertig
Start
Posteingang von hans.h...
Microsoft PowerPoint - [...
Microsoft Excel - Jordan.xls
PageRank - Google-S...
DE
10:51



Google und seine Gründer

- „Google“ – „etwas Riesengroßes“ nach der unglaublichen Fülle des WWW

- „Googol“ = 10^100
1938 durch E. Kasner (Amer. Mathematiker) etabliert: Neunjähriger Neffe sollte Wort erfinden . . .

- Suchmaschinen untersuchen mit einem „spider“ („webcrawler“) das WWW: Möglichst gute Momentaufnahme der Inhalte und der Vernetzungsstruktur des WWW

- Wie kommt man zu einer Reihung der „Liste“ („wichtige“ Seiten zuerst)?

- Neues Verbum: „googeln“ bzw. „ to google“

Lawrence (Larry) Page
(geb. 1973 in USA):
Master in Informatik, Stanford

Sergej Michailowitsch Brin
(geb. 1973 in Moskau):
Master in Informatik, Stanford

L. Page

S.M. Brin

Programmierten 1996 eine Suchmaschine (keines der großen Portale – heutige Konkurrenten – interessierte sich dafür)

Gründung von Google 1998
mit einer Starthilfe von 100.000 $ von „Sun Microsystems“.
Suchmaschinen heute zweitwichtigste „Internet-Anwendung“ (nach Email)

2009: Unternehmenswert: viele Milliarden $ (Börsegang 2004)
Marktanteil: ca. 62% (Yahoo: 21%), ca. 3 Mrd. Anfragen/Tag
„Internet-penetration-rates“: Europa: 52%, NA: 74%, Welt: 26%

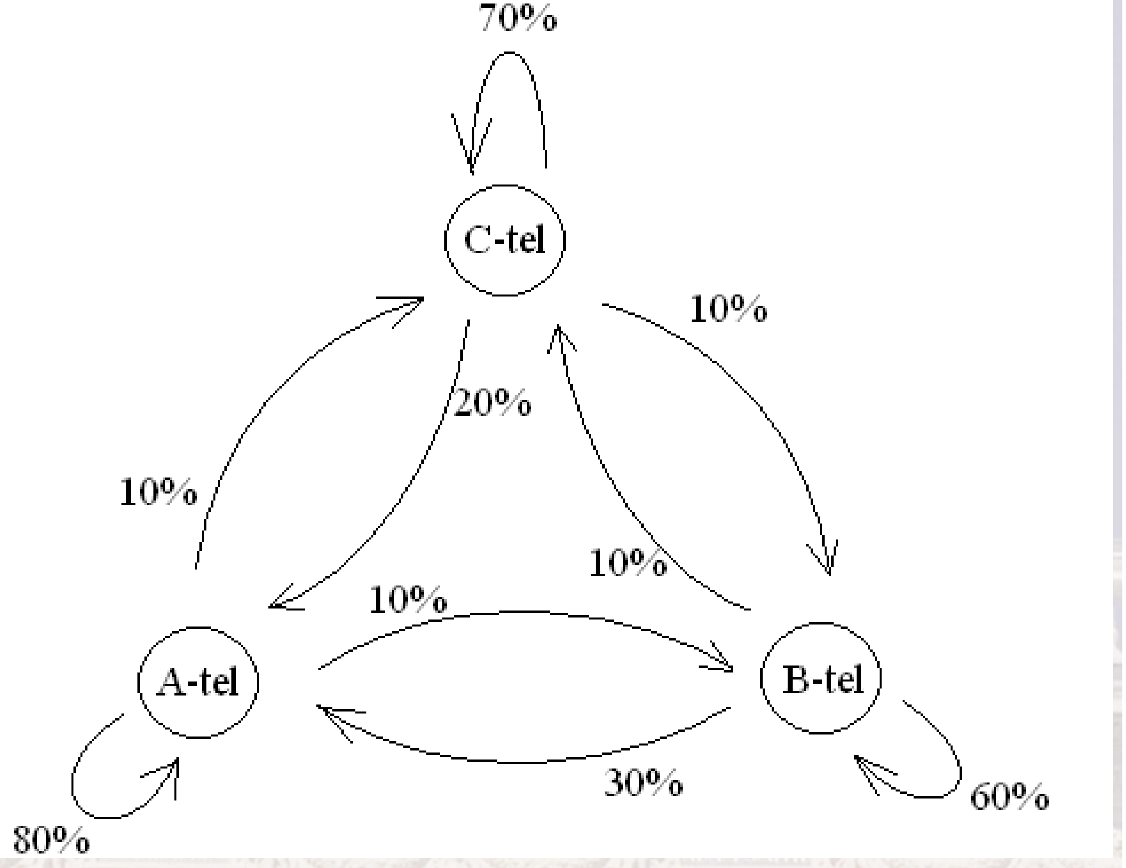
Angefangene Promotionen werden nicht weiterverfolgt, wozu auch?

Einstiegsbeispiel: 3 Telefongesellschaften, Wechsel der Kunden jeweils zu Jahresende nach folgendem Schema („gerichteter Graph“):

Angenommen:
konst. Übergangsrate in den nächsten 5 (10, 20) Jahren

Verteilung der Kunden auf die Firmen, wenn zu Beginn (1/3, 1/3, 1/3)

bzw. (0.3, 0.5, 0.2)?



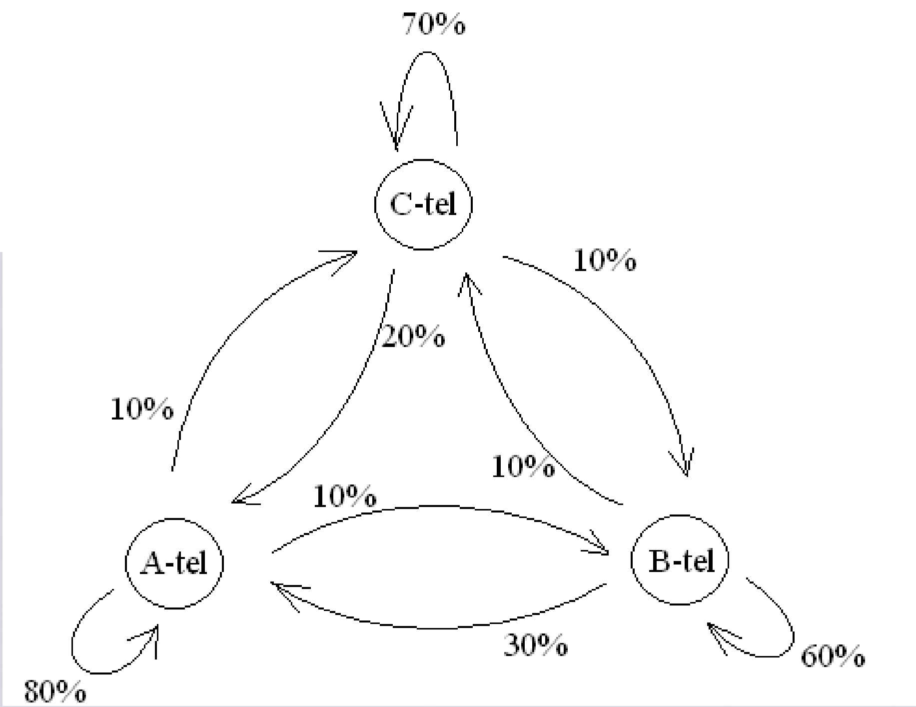
universität wien

Z. B. mit EXCEL:

$$A_{n+1} = 0,8A_n + 0,3B_n + 0,2C_n$$

$$B_{n+1} = 0,1A_n + 0,6B_n + 0,1C_n$$

$$C_{n+1} = 0,1A_n + 0,1B_n + 0,7C_n$$



Iterativ → „Grenzverteilung“

EXCEL-File

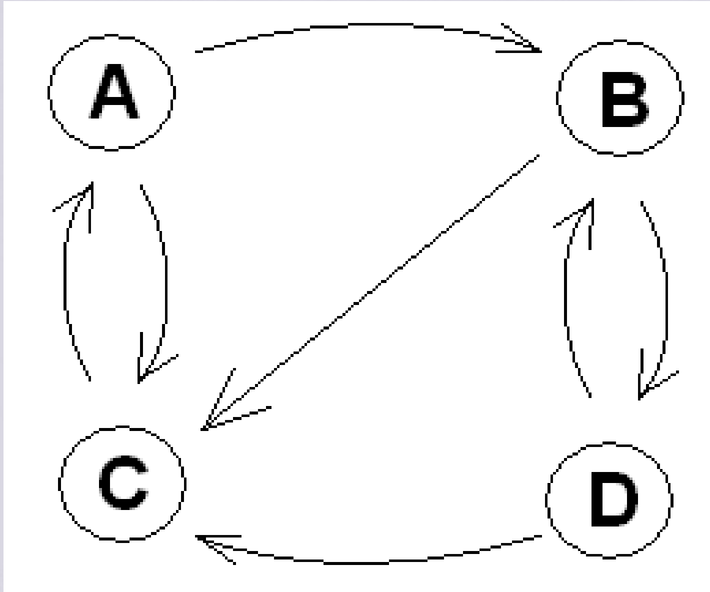
Dies auch ohne Kenntnisse von Markoff-Ketten bzw. Übergangsmatrizen möglich!

Dieses **iterative** Prinzip entspricht sogar der Praxis:

Lösungen von zugehörigen großen LGS nicht geschlossen, sondern näherungsweise, **iterativ**

Einfaches Bsp. mit 4 Webseiten

gerichteter Graph als Ergebnis der Durchforstung des WWW



Modellannahme: Bei allen von einer Seite ausgehenden Pfeilen dasselbe „Gewicht“, d. h. jedem von einer Seite ausgehenden Link wird mit gleicher W‘ gefolgt

- 2 ausgehende Pfeile: jeweils 1/2
- 3 ausgehende Pfeile: jeweils 1/3

Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned}
C_n &= A_{n+1} \\
0{,}5A_n + 0{,}5D_n &= B_{n+1} \\
0{,}5A_n + 0{,}5B_n + 0{,}5D_n &= C_{n+1} \\
0{,}5B_n &= D_{n+1}
\end{aligned}$$

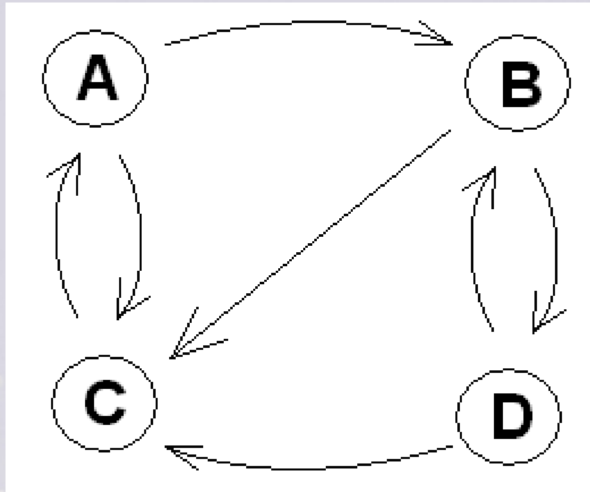
Bei welcher Verteilung auf die 4 Seiten werden sich die User à la longue einpendeln?

→ EXCEL?

Solche Situationen (LGS) auch gut mit Matrizen und Vektoren zu beschreiben:

„Übergangsmatrix“ „Verteilungsvektoren“

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\,U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{n+1}}$$



Alle Übergänge zwischen Verteilungen $\vec{v}_n \longrightarrow \vec{v}_{n+1}$ werden durch dieselbe **Übergangsmatrix** U vermittelt. Die Einträge sind **Übergangswahrscheinlichkeiten:**

In Spalte i stehen die einzelnen ÜbergangsW‘en i → j, Spaltensummen = 1

Übergänge:

$$U \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_1$$

$$\underbrace{U \cdot \overbrace{\left(U \cdot \vec{v}_0\right)}^{\vec{v}_1}}_{U^2 \cdot \vec{v}_0} = \vec{v}_2$$

$$\underbrace{U \cdot \overbrace{\left(U \cdot \underbrace{\left(U \cdot \vec{v}_0\right)}_{\vec{v}_1}\right)}^{\vec{v}_2}}_{U^3 \cdot \vec{v}_0} = \vec{v}_3$$

$$\boxed{U^n \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_n}$$

Explizite Darstellung für $\vec{v}_n$
(geschlossene Formel, nicht nur rekursive Darstellung).

Wichtig: Multiplizieren und Potenzieren von Matrizen,
Assoziativgesetz der Multiplikation

stochastischer Vektor: Einträge aus [0;1]; Summe = 1

stochastische Matrix: quadratisch, Spaltenvektoren *stochastisch*

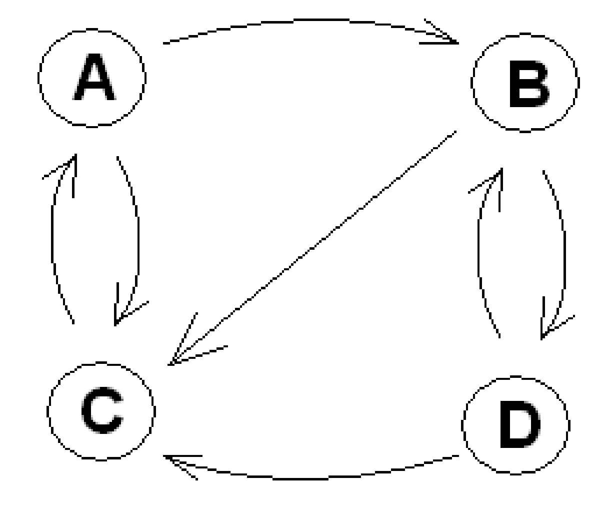
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verteilungsvektoren und Übergangsmatrizen sind stochastisch!

„Wichtigkeit“ einer Seite?

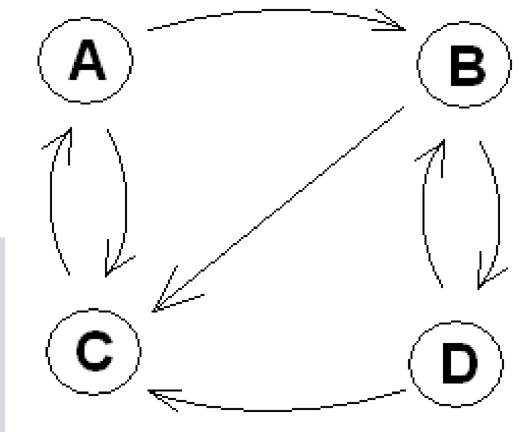
Seite umso wichtiger, je mehr Seiten auf diese verweisen:
Auf dieser Seite dann wohl tragende „Standards“ bezüglich des Suchbegriffes

Welche ist nun die wichtigste Seite in diesem Graph?



Idee: Viele User benutzen diese Netzstruktur; wenn sich langfristig beim Surfen 90% auf Seite X befinden, so ist diese wohl die wichtigste!

D. h.: Suche die **Grenzverteilung**; reihe die Wichtigkeit der Seiten nach den Werten in dieser.



Startverteilung z. B.: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,375 \\ 0,125 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = U^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,1875 \\ 0,3125 \\ 0,125 \end{pmatrix}$$

A und C scheinen im Vorteil zu sein!

Grenzverteilung: $\vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}_0 \xrightarrow{n \to \infty} \vec{v} = \begin{pmatrix} 3/9 \\ 2/9 \\ 3/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$

universität wien

Grenzverteilung bestimmen

1) Mit EXCEL die Iteration so lange durchführen, bis sich die Werte nicht mehr ändern

2) Mit CAS hohe Matrixpotenz U^n **bestimmen:** $\vec{v} \approx U^n \cdot \vec{v}_0$

3) Gesucht ist ein stochastischer Vektor $\vec{v}$ **, der sich bei Multiplikation mit** U **nicht mehr ändert:** $U \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Lineares Gleichungssystem in den Variablen

$$v_i \geq 0, \quad \sum v_i = 1$$

Probleme: 1) Kann es mehrere solche Grenzverteilungen geben (je nach Startverteilung)? Am besten wäre eine eindeutige!

2) Obige Methoden zur Berechnung von $\vec{v}$ funktionieren nur bei relativ kleinem m, aber nicht bei z. B. $m = 1000\,000$ oder mehr (Google); hier **iterative Näherungsverfahren**!

Grenzwertsatz (Markoff, ohne Beweis):

$\boldsymbol{U}$ *ist stochastisch und* U^n *enthält für ein* $n \geq 1$ *nur positive Einträge*

$$\Downarrow$$

Grenzmatrix $G := \lim_{n \to \infty} U^n$ *existiert, ist stochastisch und hat* ***identische Spalten***

Obiges Beispiel:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U^5 = \begin{pmatrix} 5/16 & 5/16 & 3/8 & 5/16 \\ 9/32 & 1/4 & 1/8 & 9/32 \\ 11/32 & 11/32 & 5/16 & 11/32 \\ 1/16 & 3/32 & 3/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

Klar: die (ident.) Spalten dieser Grenzmatrix geben den *eindeutigen*, *vom Startvektor unabhängigen* Grenzvektor an:

$$A_0 + B_0 + C_0 + D_0 = 1$$

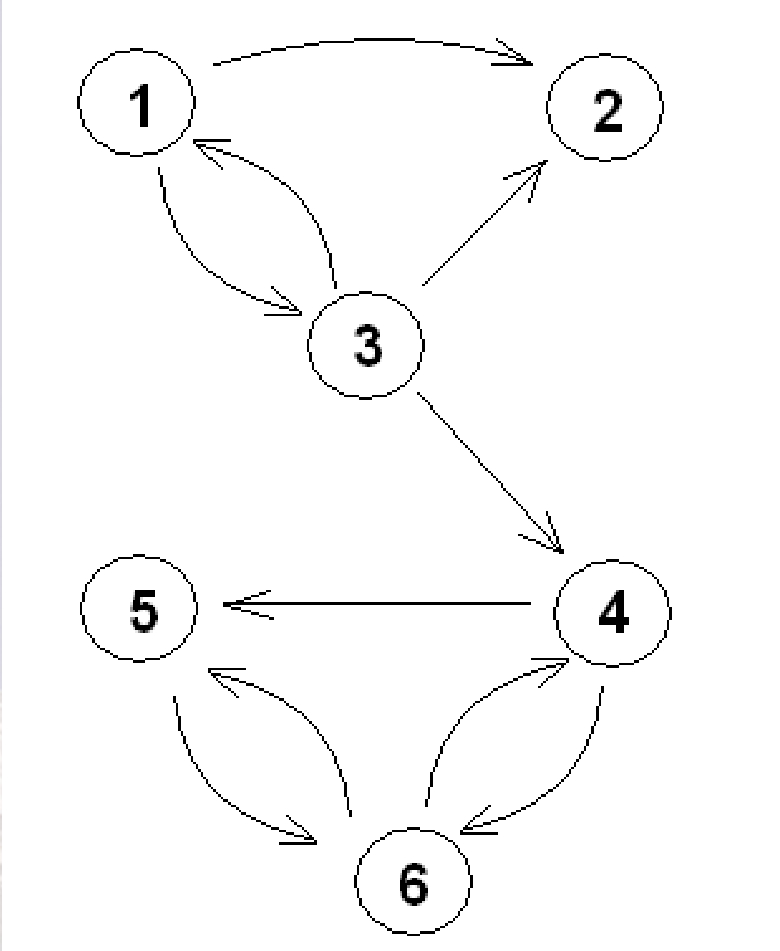
$$\sum u_i = 1$$

$$\vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_1 & u_1 & u_1 \\ u_2 & u_2 & u_2 & u_2 \\ u_3 & u_3 & u_3 & u_3 \\ u_4 & u_4 & u_4 & u_4 \end{pmatrix}}_{G} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

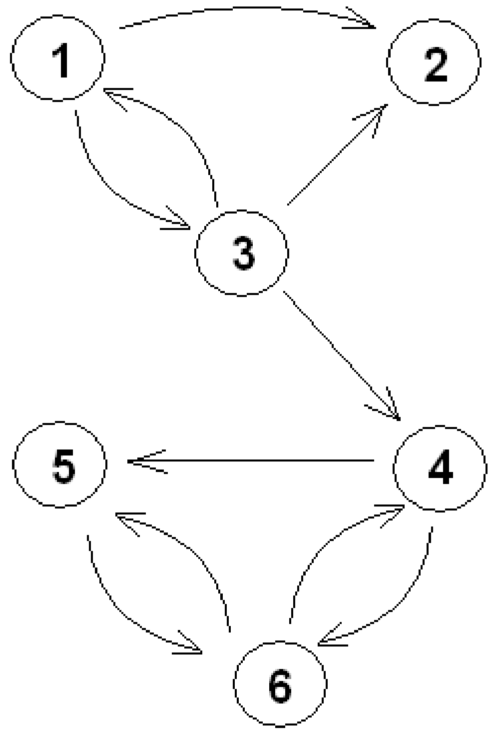
Ein etwas komplizierteres Beispiel und weitere Modellannahmen

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

„Sackgasse“ bzw. „Senke“ bei ②,
nur Nullen in der 2. Spalte,
U nicht mehr stochastisch!



$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Ausweg bei Sackgasse?

Weitere **Modellannahmen**:

1) Rückkehr zur Liste
(nicht: „Seite davor“, Ende)

2) Zufälliges Anklicken einer Seite, alle Seiten beim Neueinstieg gleichwahrscheinlich: 1/6 (1/m)

Obiges Bsp.: Ersetzen der Nullenspalte durch: $\begin{pmatrix} 1/6 \\ \vdots \\ 1/6 \end{pmatrix}$

$$U^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

U^* stochastisch!

Dadurch auf den Plan gerufen – Verbesserung des Modells:
„Rückkehr zur Liste und erneuter zufälliger Einstieg“
ist immer möglich, auch ohne Sackgasse!
Mathematische Beschreibung dieses Szenarios?

Allgemein zwei Fälle möglich:

1) Weitersurfen mit W‘ α: Übergangsmatrix $= U^*$

2) Zufälliger Neueinstieg mit W‘ $1-\alpha$:

nächste Verteilung muss gegeben sein durch: $\begin{pmatrix} 1/m \\ \vdots \\ 1/m \end{pmatrix}$

Übergangsmatrix:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/m & \cdots & 1/m \\ \vdots & & \vdots \\ 1/m & \cdots & 1/m \end{pmatrix}}_{\text{stochastisch}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}}_{\sum v_i = 1} = \begin{pmatrix} 1/m \\ \vdots \\ 1/m \end{pmatrix}$$

Kombination:

Neue Übergangsmatrix T (wieder stochastisch):

$$T = \underbrace{\alpha \cdot U^*}_{\substack{\text{Mit W' } \alpha \text{ den} \\ \text{Links folgen}}} + \underbrace{(1-\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1/m & \cdots & 1/m \\ \vdots & & \vdots \\ 1/m & \cdots & 1/m \end{pmatrix}}_{\text{Mit W' } (1-\alpha) \text{ neu einsteigen}}$$

Entscheidender Vorteil dieser Übergangsmatrix T:

T **hat nur mehr positive Einträge!**

Nach obigem **Grenzwertsatz** gibt es also jedenfalls eine Grenzverteilung, die sogar unabhängig von der Startverteilung ist!

Durch diese Grenzverteilung: Reihung der Seiten möglich („Wichtigkeit“)

universität wien

$$T = \alpha \cdot U^* + (1-\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1/m & \cdots & 1/m \\ \vdots & & \vdots \\ 1/m & \cdots & 1/m \end{pmatrix}$$

Der Wert von α ist hierbei sehr wichtig: Google wählte lange Zeit

$$\alpha = 0,85$$

Unser Beispiel mit

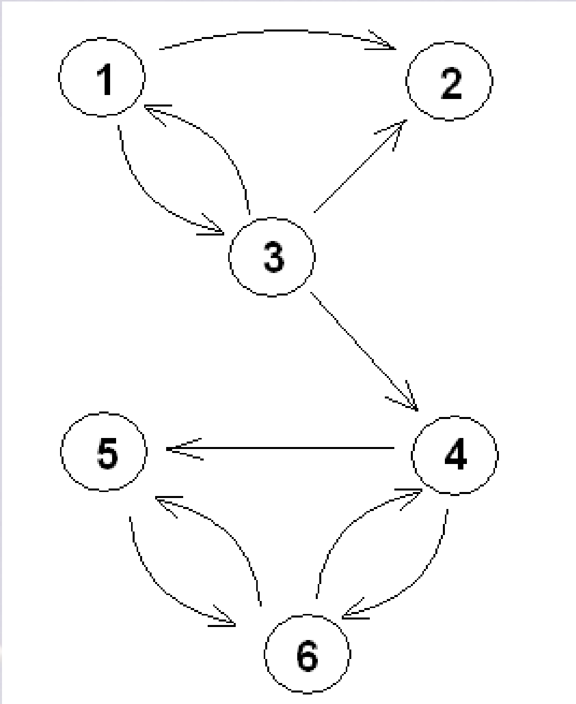
$\alpha = 0,85$:

$$T = \begin{pmatrix} 1/40 & 1/6 & 37/120 & 1/40 & 1/40 & 1/40 \\ 9/20 & 1/6 & 37/120 & 1/40 & 1/40 & 1/40 \\ 9/20 & 1/6 & 1/40 & 1/40 & 1/40 & 1/40 \\ 1/40 & 1/6 & 37/120 & 1/40 & 1/40 & 9/20 \\ 1/40 & 1/6 & 1/40 & 9/20 & 1/40 & 9/20 \\ 1/40 & 1/6 & 1/40 & 9/20 & 7/8 & 1/40 \end{pmatrix}$$

Zu lösendes lineares Gleichungssystem: $T \cdot \vec{v} = \vec{v}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_6 \end{pmatrix}, \quad \sum \underbrace{v_i}_{\geq 0} = 1$$

CAS (4 NK-Stellen): $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}0517 \\ 0{,}0737 \\ 0{,}0574 \\ 0{,}1999 \\ 0{,}2686 \\ 0{,}3487 \end{pmatrix}$



Resultat (Reihung nach Wichtigkeit):
Seite 6 → Seite 5 → Seite 4 → Seite 2 → Seite 3 → Seite 1

In der Realität ($m = 1000\,000$ und mehr) funktioniert dieses Lösen eines LGS nicht mehr geschlossen (Gauß-Algorithmus), sondern nur mehr näherungsweise: *iterativ*

universität wien

Die wichtigen Modellierungen im Kern:

- **Alle Links auf einer Seite haben gleiche W‘**
- **Sackgasse: Rückkehr zur Liste und *zufälliger Neueinstieg*, d. h. ersetze alle Nullen in der Spalte durch 1/m**
- **Allgemein: -) Einen Link auf der Seite benutzen mit W‘ α**
  -) zufälliger Neueinstieg mit W‘ $1-\alpha$

$$T = \underbrace{\alpha \cdot U^*}_{\text{Mit W' } \alpha \text{ den Links folgen}} + \underbrace{(1-\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1/m & \cdots & 1/m \\ \vdots & & \vdots \\ 1/m & \cdots & 1/m \end{pmatrix}}_{\text{Mit W' } (1-\alpha) \text{ neu einsteigen}}$$

einfache Modellierungen (nicht selbständiges Modellieren!), aber beachtliche Tragweite!

universität
wien

Potential im Schulunterricht

- **Spannendes und aktuelles Phänomen**
  Realitätsbezug: Jeder verwendet Google!
  Bestätigung: Grundlegende Ideen sind bedeutungsvoll!

- **Sichtbarmachen, wie Mathematik in der modernen Gesellschaft angewendet wird; Mathematik wird immer weniger wahrgenommen, ist aber gesellschaftlich sicher eine „Schlüsseltechnologie“**

- **Motivation, Verblüffung: Mit welch *elementaren* Ideen ist etwas „Weltbewegendes“ auf die Beine zu stellen und viel Geld zu verdienen**

- **Beitrag zum einfachen Modellbilden (nicht selbständig durch S&S)**

- **Wenige Voraussetzungen: Matrizen und Vektoren**
  In einem deutschen Schulbuch:
  2-stufige Prozesse zur *Einführung* der *Matrizenmultiplikation*
  (auch als zusätzliche sinnvolle Anwendung möglich)

- **Sinnvoller Computereinsatz: EXCEL, CAS**

universität
wien

Potential im Schulunterricht

- Gute Vernetzungsmöglichkeit: Sto

- Möglicher *Einstieg* in das Thema M
  oder eine zusätzliche *aktuelle Anw*

- Theorie der Grenzwertsätze bei Markoff-Ketten nicht nötig, bei Bedarf können auch einfache theoretische Aspekte berücksichtigt werden

- Möglichkeit, elementare *iterative* Methoden für LGS zu behandeln (Jacobi- oder Gauß-Seidel-Verfahren, EXCEL)

- Werbung für Mathematik: Riesenkarriere möglich durch kluge Verarbeitung ebenso einfacher wie genialer Ideen!

Deutschland 2009:

Schnellst wachsende Suchbegriffe	Die häufigsten Suchbegriffe
1. windows7	1. youtube
2. facebook	2. ebay
3. youtube	3. wetter
4. meinVZ	4. google
5. juegos	5. hamburg
6. ebay	6. gmx
7. wer kennt wen	7. facebook
8. wetter.de	8. web.de
9. hotmail	9. wikipedia
10. hi5	10. video

„Google Zeitgeist“

Österreich 2009:

Schnellst wachsende Suchbegriffe

1. windows7
2. facebook
3. youtube
4. kino.to
5. willhaben
6. wetter.at
7. orange
8. gmx.at
9. ebay.at
10. google maps

Die häufigsten Suchbegriffe

1. wien
2. youtube
3. österreich
4. facebook
5. wetter
6. salzburg
7. google
8. gmx
9. orf
10. netlog

universität wien

Weltweit 2009

Fastest Rising

1. michael jackson
2. facebook
3. tuenti
4. twitter
5. sanalika
6. new moon
7. lady gaga
8. windows 7
9. dantri.com.vn
10. torpedo gratis

Fastest Falling

1. beijing 2008
2. euro 2008
3. heath ledger
4. barack obama
5. amy winehouse
6. kraloyun
7. dailymotion
8. bebo
9. wii
10. emule

USA 2009

Google.com - Fastest Rising

1. twitter
2. michael jackson
3. facebook
4. hulu
5. hi5
6. glee
7. paranormal activity
8. natasha richardson
9. farrah fawcett
10. lady gaga

Google.com - Fastest Falling

1. john mccain
2. olympics
3. heath ledger
4. barack obama
5. sarah palin
6. circuit city
7. ron paul
8. iron man
9. spore
10. wii fit

Literatur

H. H. (2009): Das Google-PageRank-System – Mit Markoff-Ketten und linearen Gleichungssystemen Ranglisten erstellen. In: mathematiklehren 154 (Juni 2009), 58–63.

H. H. (2009): Das PageRank-System von Google – eine aktuelle Anwendung im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, 663–666. WTM-Verlag, Münster. Auch online unter: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/HUMENBERGER_Hans_2009_google.pdf

H. H.: Homepage

H. H. (2012): nächstes ÖMG-Didaktik-Heft

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

universität wien

Jacobi-Verfahren

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

LGS sei eindeutig lösbar,
Diagonalelemente $a_{ii} \neq 0$
(sonst Zeilen- bzw. Spaltentausch)

Auflösen von Zeile i nach x_i :

$$\begin{aligned} x_1 &= (\quad -a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3 + b_1) / a_{11} \\ x_2 &= (-a_{21}\, x_1 \quad - a_{23}\, x_3 + b_2) / a_{22} \\ x_3 &= (-a_{31}\, x_1 - a_{32}\, x_2 \quad + b_3) / a_{33} \end{aligned}$$

EXCEL-File

Startwerte

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \left(\quad -a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13}\, x_3^{(k)} + b_1 \right) / a_{11} \\ x_2^{(k+1)} &= \left(-a_{21}\, x_1^{(k)} \quad - a_{23}\, x_3^{(k)} + b_2 \right) / a_{22} \\ x_3^{(k+1)} &= \left(-a_{31}\, x_1^{(k)} - a_{32}\, x_2^{(k)} \quad + b_3 \right) / a_{33} \end{aligned}$$