HANS HUMENBERGER

Experimente an gefüllten Prismen – was haben Schwerpunkte damit zu tun?

1 Einleitung

Das Thema „Schwerpunkte" gibt es sowohl in der Physik als auch in der Mathematik (Geometrie). Es ist nicht leicht zu unterrichten, weil die zugehörigen Grundlagen nicht immer von elementarer Natur sind. Noch dazu gibt es in Österreich (aus meiner Sicht) eine unglückliche Bezeichnung in der Dreiecksgeometrie, die „Schwerlinie eines Dreiecks" (gemeint ist das *geometrische* Objekt: Die Verbindungslinie einer Ecke zum Mittelpunkt der Gegenseite). Dieser physikalische Name eines geometrischen Objektes bringt zwar vielleicht den „Vorteil" mit sich, dass allein aufgrund der Namensgebung scheinbar „klar" ist: Wenn man ein Dreiweck entlang dieser Linie unterstützt, bleibt es im Gleichgewicht (denn diese Linie heißt ja in der Geometrie schon „Schwerlinie"). Aber es wird hier – genau genommen – eigentlich eine etwas unglückliche Verquickung von *Geometrie* und *Physik* vorgenommen. Der in Deutschland übliche Begriff der *Seitenhalbierenden* ist ein rein geometrischer[1] (er beschreibt, wie diese Linie geometrisch entsteht) und „leidet" nicht unter dieser Verquickung. In Deutschland kann man besser die [eigentlich sehr wichtige, aber gar nicht so leicht zu beantwortende, vgl. z. B. EMBACHER 2008] Frage *Warum ist die Seitenhalbierende eines Dreiecks eine Schwerlinie?* stellen als in Österreich: *Warum ist die Schwerlinie eines Dreiecks eine Schwerlinie?* (das erste Mal ist hier *Schwerlinie* als *geometrisches* Objekt gemeint, das zweite Mal *physikalisch*). Es gibt viele interessante geometrische und physikalische Phänomene, die mit der Unterscheidung verschiedener Typen von Schwerpunkten zu tun haben [Eckenschwerpunkt, Flächenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt; vgl. SEEBACH 1983].

In diesem Beitrag wird der Unterschied zwischen Flächen- und Eckenschwerpunkt wichtig. Aber in der ursprünglichen Fragestellung bzw. Beobachtung eines Phänomens ist dies vielleicht noch gar nicht leicht zu erahnen. Konkrete Experimente („hands-on-Mathematik") stehen zu Beginn als Einstieg in das Thema, dadurch kann die Motivation sich mit zugrunde liegenden Fragen genauer zu beschäftigen oft erhöht werden. Der Fokus liegt dabei auf *elementaren* Betrachtungen, die nicht z. B. von Integralrechnung geprägt sind. In einer gewissen Weise ist zwar die Integralrechnung die allgemeine und eigentliche „Heimat" des Themas Schwerpunkte, trotzdem sind viele Aspekte davon schon mit elementarmathematischen Mitteln zugänglich, und um genau diese Aspekte soll es im Folgenden primär gehen.

[1] Es gibt in Deutschland und Österreich auch unterschiedliche Bezeichnungen für zwei andere wichtige Typen von Transversalen in Dreiecken: Winkelsymmetrale (Ö) – Winkelhalbierende (D), Streckensymmetrale (Ö) – Mittelsenkrechte (D); hier bleiben aber „beide Sprachen" im Bereich der Geometrie.

2 Ein erstes Experiment

Ein erstes Experiment startet bei dreieckigen (geraden) Prismen, es gibt im Lehrmittelhandel z. B. eigene „Füllkörper", die dazu gedacht sind, durch Umschütten von Flüssigkeiten Volumina zu bestimmen (**Abb. 1**). Diese eignen sich auch für den folgenden Zweck gut.

Das Prisma ist bis ca. zur halben Höhe mit Wasser gefüllt. Dann wird es gekippt, sodass die „Wasserhöhen" an den Seitenkanten nicht mehr alle gleich sind (in der nicht gekippten Lage sind diese drei Längen natürlich alle gleich). Für verschiedenste Lagen (sodass die Grundfläche immer vollständig mit Wasser bedeckt bleibt) können nun die Schülerinnen und Schüler (S&S) die Längen der „Wasserhöhen" an den Seitenkanten messen („enaktiv"), vgl. **Abb. 2**.

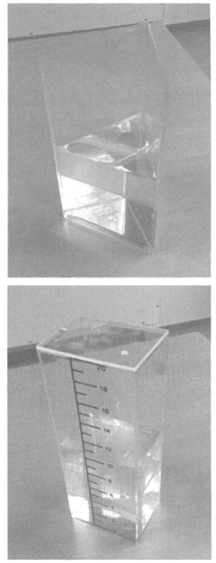

Abb. 1: Dreieckiges und rechteckiges Prisma teilweise mit Wasser gefüllt

Mögliche Fragen:

1. Was beobachtet ihr bzgl. dieser Längen?
2. Etwas zielgerichteter (weniger offen): Was beobachtet ihr bzgl. der *Summe* der „Wasserhöhen" an den Seitenkanten?

Wenn man hier misst, wird man feststellen, dass die in 2. angesprochene Summe konstant bleibt. Dabei stellen sich in natürlicher Weise einige Fragen:

- Ist das wirklich exakt so, oder nur ungefähr?
- Wäre das auch bei anderen Prismen mit dreieckiger Grundfläche so?
- Wenn es so ist, kann man das auch begründen?
- Gibt es einen Punkt der Grundfläche, über dem sich die Wasserhöhe dabei nie ändert?
- Wie wird das wohl bei anderen Vielecken als Grundfläche sein?

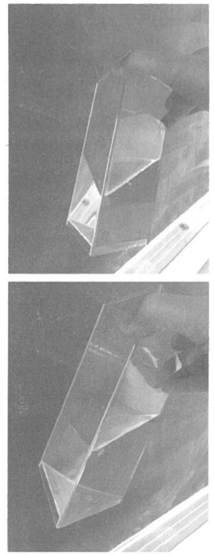

Abb. 2: Dreieckiges Prisma teilweise mit Wasser gefüllt – schief gehalten[2]

Bevor wir zu weiteren Betrachtungen kommen, sei kurz erwähnt, wie der Autor zu diesem Thema überhaupt gekommen ist. Anlass war eine Seminararbeit einer Studentin zum Thema „Experimente im Mathematikunterricht", ein diesbezüglicher Vortrag wurde an der Universität Wien von Prof. Dr. R. OLDENBURG (Universität Augsburg) gehalten. Beim Vortrag und bei der Seminararbeit kam ein Bild aus HASHIMOTO [1997] vor, vgl. **Abb. 3**.

Dieses Bild stammt von Arbeitsblättern für S&S der 10. Schulstufe zum „water-flask problem". Wie HASHIMOTO schreibt, waren die zu sehenden Mittelpunkte M, N auf den Arbeitsblättern nicht eingezeichnet. Die S&S machten laut HASHIMOTO einige Entdeckungen (vgl. a. a. O, S. 21), und dann

[2] Ich danke Herrn StD JAN-HENDRIK MÜLLER (Gymnasium Attendorn, NRW) für die Fotos in **Abb. 1** und **2**.

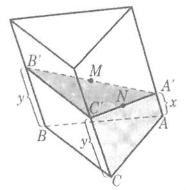

Abb. 3: Bild aus HASHIMOTO [1997], S. 21

steht zu lesen: „In addition to those above, other findings were made (e. g., the length of MN is constant *and the segment MN is fixed*), though these were not discussed in the lesson.“ Es wird nicht erörtert, ob diese „findings“ stimmen. Sie stimmen nicht, wie sich herausstellen wird. Nicht die Mittelpunkte der Strecken $A'B'$ und $A'C'$, sondern die zugehörigen (2:1)-Teilungspunkte (näher bei B' und C') haben die beschriebene Eigenschaft. Für die Mittelpunkte stimmt zwar „the length of MN is constant“, aber der oben kursiv geschriebene Teil (Hervorhebung durch den Autor) „and the segment MN is fixed“ stimmt nicht, die Strecke MN hebt und senkt sich. Die zugehörigen Überlegungen im Zuge des genaueren Lesens der erwähnten Seminararbeit waren jedenfalls der unmittelbare Anlass für den Autor, sich mit diesem Thema etwas genauer auseinanderzusetzen.

3 Erkundungen mit GeoGebra

Bevor man zu einer genaueren mathematischen Analyse kommt, wird man vermutlich zunächst einmal weitere Bestätigungen einholen, vermutlich mit einer 3D-Geometrie-Software, z. B. GeoGebra. Zu diesem Zweck muss man zunächst das Kippen des Prismas ein wenig umdeuten.

Dass die Summe der „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten konstant ist, kann auch so ausgedrückt werden: Wenn ein gerades dreieckiges Prisma schräg abgeschnitten wird, dann kann man sein Volumen V berechnen durch: $V = G \cdot \frac{h_1+h_2+h_3}{3}$ (in der nicht gekippten Lage ist $\frac{h_1+h_2+h_3}{3} = h$, die „Wasserhöhe“). Das arithmetische Mittel der drei Höhen an den Kanten wäre dann offenbar jene Höhe, mit der man den Grundflächeninhalt G multiplizieren muss, um das Volumen V zu erhalten.

Die 3D-Version von GeoGebra kann Volumina von Prismen und Pyramiden bestimmen (DGS als Messinstrument), schon die 2D-Version Flächeninhalte von Vielecken.

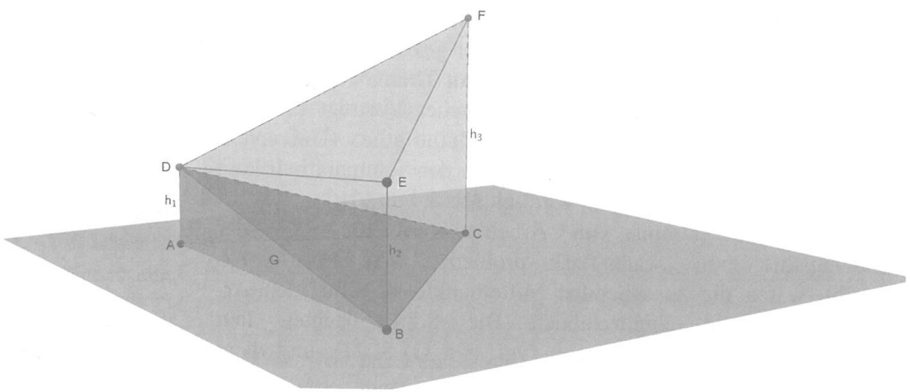

Abb. 4: Teilpyramiden im schräg abgeschnittenen dreieckigen Prisma (GeoGebra/www.geogebra.org)

Damit ist es leicht, eine Überprüfung mit GeoGebra zu realisieren: Man misst den Grundflächeninhalt G (des Dreiecks ABC) und die drei Höhen $h_{1,2,3}$ an den Kanten (siehe **Abb. 4**), womit man $G \cdot \frac{h_1+h_2+h_3}{3}$ berechnen kann. Andererseits kann GeoGebra das Volumen des gesamten schräg abgeschnittenen Prismas durch die Teilvolumina von Pyramiden ($ABCD$: dunkler, dreiseitig; $BCFED$: heller, vierseitig) bestimmen. Man wird feststellen, dass die Differenz der angesprochenen beiden Werte immer Null ist, das bedeutet: GeoGebra hat eindrucksvoll bestätigt, dass das Volumen so eines schräg abgeschnittenen dreiseitigen Prismas immer $V = G \cdot \frac{h_1+h_2+h_3}{3}$ zu sein scheint. Übertragen auf das Ausgangsproblem mit dem Wasser und dem Schräghalten: Die Summe der Längen der „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten scheint wirklich konstant zu sein. Diese Bearbeitungsebene (nicht mehr enaktiv, noch nicht symbolisch; die Bezeichnung *ikonisch* passt hier allerdings auch nicht ganz) wird möglich durch ein 3D-Konstruktionsprogramm wie GeoGebra, primär eingesetzt als Messinstrument.

4 Eine Begründung für Dreiecke

Nun ist so eine Bestätigung mit GeoGebra natürlich noch kein Beweis (obwohl man an der Tatsache, *dass* es so ist, kaum mehr zweifeln wird), geschweige denn weiß man dadurch, *warum* das so sein soll.

Durch die dunklere Pyramide $ABCD$ mit Volumen $V = G \cdot \frac{h_1}{3}$ in **Abb. 4** ist aber schon ein Hinweis gegeben, dass man vielleicht eine Zerlegung in Teilpyramiden finden kann, die jeweils den Grundflächeninhalt G haben und als Höhen $h_{1,2,3}$. In der Tat, wenn man in der helleren Pyramide ($BCFED$, vierseitig, **Abb. 4**) den Punkt D hinunter zum Punkt A zieht, so ändert sich dabei ihr Volumen nicht, denn ihre Grundfläche und ihre Höhe bleiben dabei ja unverändert (die Pyramide $ABCD$ wird dabei „platt“ bzw. „verschwindet“). Nun kann man noch die Verbindung EC einzeichnen und man erhält eine weitere Teilpyramide mit Grundflächeninhalt G, diesmal aber mit Höhe h_2 (vgl. **Abb. 5**).

Zieht man nun noch den Punkt „E hinunter auf B“, so erhält man die noch fehlende Teilpyramide mit Grundflächeninhalt G und Höhe h_3 (vgl. **Abb. 5**; das Volumen der Pyramide $ACFE$ ändert sich dabei nicht; die Pyramide $ABCE$ wird dabei „platt“, d. h. sie „verschwindet“). Damit ist also das Phänomen bei Prismen mit dreieckiger Grundfläche geklärt und begründet.

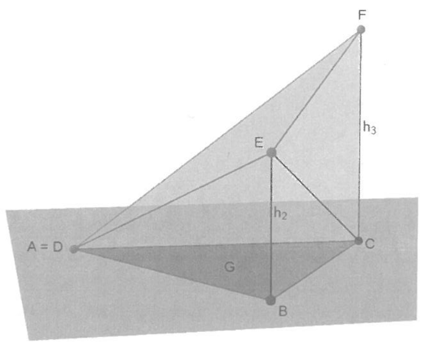

Abb. 5: D auf A „hinuntergezogen“, Teilpyramiden (GeoGebra/www.geogebra.org)

Eine Alternative wäre dadurch gegeben, dass man zuerst ein Prisma mit Höhe $\min\{h_1,h_2,h_3\}$ zeichnet (bei uns ist das h_1; Volumen = $G \cdot h_1$) und dazu noch Pyramiden mit Grundflächeninhalt G und den Höhen $h_2 - h_1$ bzw. $h_3 - h_1$ (dabei können wieder analog zu oben „im Geiste Punkte runtergezogen“ werden) – mit einem Gesamtvolumen von $V = G \cdot h_1 + \frac{G \cdot (h_2 - h_1)}{3} + \frac{G \cdot (h_3 - h_1)}{3} = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$.

Bis hierher treten bei diesem Thema noch gar keine Schwerpunkte auf. Man kann dies einstweilen auch so belassen, und mit Abschnitt 6 fortfahren (siehe unten) oder bereits an dieser Stelle erste Überlegungen zu Schwerpunkten anstellen.

5 Die Rolle des Schwerpunktes bei Dreiecken

Man sieht schnell ein, dass die Höhe über dem *Schwerpunkt* des Grunddreiecks den (wie wir jetzt wissen: konstanten!) Wert $\frac{h_1+h_2+h_3}{3}$ hat. Im Mittelpunkt M_{BC} der Strecke BC beträgt die Höhe $\frac{h_2+h_3}{2}$ (Wasserhöhe bzw. Höhe des schief abgeschnittenen Prismas). Da der Schwerpunkt S der Grundfläche bekanntlich im (2:1)-Teilungspunkt der Strecke AM_{BC} liegt[3], ist die Höhe im Schwerpunkt daher das mit 2:1 gewichtete Mittel der beiden Werte $\frac{h_2+h_3}{2}$ und h_1, also genau $\frac{h_1+h_2+h_3}{3}$ (man kann dies ggf. auch mit einer entsprechenden Strahlensatzfigur begründen), vgl. **Abb. 6**.

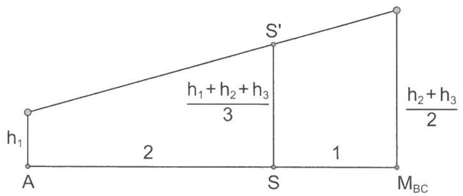

Abb. 6: Teilung 2:1 und gewichtetes Mittel (GeoGebra/www.geogebra.org)

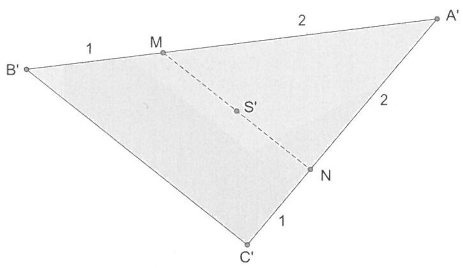

Abb. 7: (2:1)-Teilung durch die Punkte M, N (GeoGebra/www.geogebra.org)

Fazit (in den beiden Kontexten):

1. Wasserexperiment: Die Wasserhöhe über dem Schwerpunkt des Grunddreiecks ändert sich bei Neigung des Prismas nicht.
2. Schräg abgeschnittenes Prisma: Jene Höhe, mit der man den Grundflächeninhalt G multiplizieren muss, um das Volumen zu erhalten, befindet sich genau über dem Schwerpunkt. Es ist auch klar, dass *nur* der Schwerpunkt diese Eigenschaft hat (warum genau?).

Dadurch hat man auch eine Begründung, dass die in **Abb. 3** eingezeichneten Punkte M, N nicht die Mittelpunkte, sondern die (2:1)-Teilungspunkte sein müssten, denn eine Parallele zu einer Seite durch den Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die anderen beiden Seiten immer im Verhältnis 2:1 (vgl. **Abb. 7**; dabei ist vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt S' des Dreiecks $A'B'C'$ „genau über“ dem Schwerpunkt S des Dreiecks ABC liegt; ggf. könnte auch das noch genauer begründet werden).

[3] Dafür gibt es verschiedene elementare Begründungen, auch in den meisten Schulbüchern.

6 Vierecke als Grundfläche

Durch die Ergebnisse von oben bestärkt, könnte man zunächst durchaus vermuten, dass das für dreieckige Prismen beobachtete Phänomen auch für andere Vielecke als Grundfläche gilt: Die Summe der Längen der „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten ist konstant. Dazu kann man erstens wieder mit wirklichen Hohlkörpern (z. B. rechteckige Grundfläche, vgl. **Abb. 1**) arbeiten und zweitens mit GeoGebra experimentieren (Prismen mit einer schiefen Ebene abschneiden; hier sind auch Parallelogramme als Grundfläche leicht realisierbar; nur sind die vier Höhen $h_{1,2,3,4}$ bei Vierecken nicht mehr unabhängig voneinander wählbar, sondern mit drei von ihnen steht auch die vierte fest, denn die vier Eckpunkte der Deckfläche müssen ja in einer Ebene liegen).

Der Beginn eines entsprechenden Begründungsprozesses ist in **Abb. 8** angedeutet, eine Pyramide mit dem Teilvolumen $G \cdot \frac{h_1}{3}$. Mit analogen Überlegungen wie oben (man muss wieder „im Geiste manche Punkte hinunterziehen“, sodass der Grundflächeninhalt G bzw. $G/2$ ins Spiel kommt – ohne dass sich dabei entsprechende Teilvolumina ändern) kommt man zum Ergebnis, dass das bei dreieckigen Prismen beobachtete und begründete Phänomen auch für Prismen mit einem *Parallelogramm* als Grundfläche gilt: $V = G \cdot \frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{4}$.

Dadurch wird vielleicht die Vermutung genährt, dass das auch bei allgemeinen Vierecken und vielleicht sogar bei allgemeinen n-Ecken als Prismengrundfläche so sein wird. Doch schon bei Vierecken, die keine Parallelogramme sind, wird man enttäuscht (reale

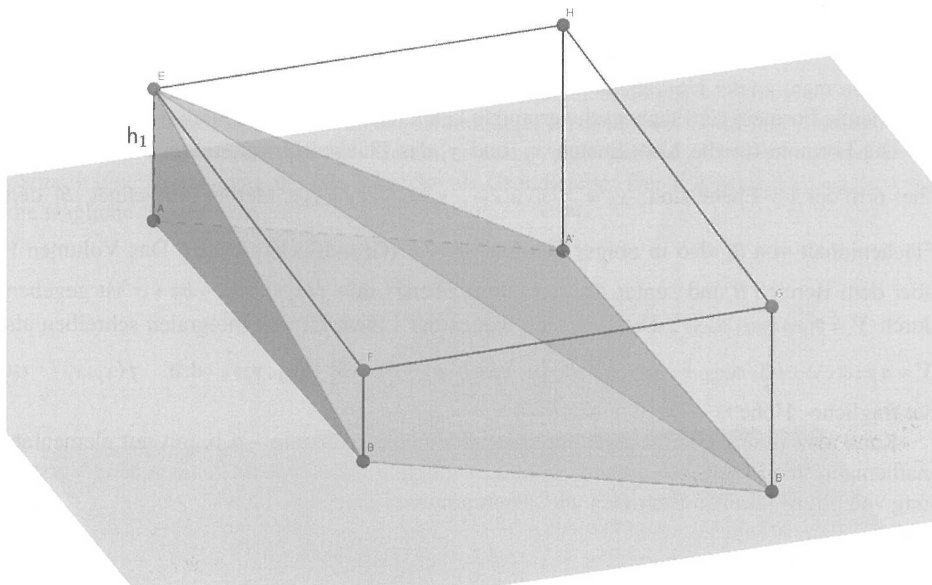

Abb. 8: Teilpyramide bei einem Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche (GeoGebra/www.geogebra.org)

Experimente oder GeoGebra), erst recht bei allgemeinen n-Ecken. Vielleicht ein lehrreiches Beispiel dafür, dass bei Verallgemeinerungen immer Vorsicht geboten ist!

Nun könnte man es einfach bei dieser Erkenntnis belassen („es“ funktioniert bei Dreiecken und Parallelogrammen, bei allgemeineren Vielecken nicht), man kann aber auch weiter denken und fragen, woran es liegt, dass es bei allgemeineren Vielecken nicht mehr funktioniert. Was ist bei Parallelogrammen so anders als bei Trapezen oder Drachen?

Die Klärung dieser Frage kann nicht mehr in selbständiger Arbeit durch Lernende erwartet werden. Die obigen Experimente bei Dreiecken und Parallelogrammen (Gefäße, GeoGebra) sind durchaus in selbständiger Arbeit durch Lernende möglich, bei den zugehörigen *Begründungen* wird die Lehrkraft wohl in den meisten Fällen unterstützend wirken müssen.

7 Schwerpunkte

Zur Klärung muss man *Schwerpunkte* miteinbeziehen, nämlich *Flächen-* und *Eckenschwerpunkte*. Bei Dreiecken und Parallelogrammen ist das dasselbe[4], d. h. dort fällt dieser Unterschied gar nicht weiter auf, im Allgemeinen aber sehr wohl.

Zu Beginn kann man fragen: Welcher Punkt der Grundfläche (allgemein, Polygone) hat folgende Eigenschaft?

1. Kontext Wasserexperiment: Die „Wasserhöhe“ über diesem Punkt ändert sich nie beim Kippen.
2. Kontext Prisma schief abschneiden (GeoGebra): Über welchem Punkt der Grundfläche hat das schief abgeschnittene Prisma genau jene Höhe, die mit G multipliziert werden muss, um das Volumen zu erhalten?

Es handelt sich in beiden Fällen um den Schwerpunkt, und zwar um den *Flächenschwerpunkt*. Bei dreieckigen Prismen haben wir das schon begründet, aber warum gilt das allgemein?

Wenn man (an der Universität) schon zweidimensionale Integralrechnung kann und entsprechende Formeln für Flächenschwerpunkte kennt, fällt die Argumentation leicht:

Die Formeln für die Koordinaten x_F und y_F des Flächenschwerpunktes F eines Bereiches B in der x-y-Ebene sind: $x_F = \frac{1}{|B|} \cdot \iint_B x \, d(x,y)$, $y_F = \frac{1}{|B|} \cdot \iint_B y \, d(x,y)$, hierbei bezeichnet $|B|$ den Flächeninhalt von B, also in obiger Diktion $|B| = G$ (Grundflächeninhalt). Das Volumen V über dem Bereich B und „unter der (schiefen) Ebene“ mit $f(x,y) = ax + by + c$ ist gegeben durch $V = \iint_B (ax+by+c) \, d(x,y)$; dies lässt sich wegen der Linearität von Integralen schreiben als $V = a\iint_B x \, d(x,y) + b\iint_B y \, d(x,y) + c\iint_B d(x,y) = |B| \cdot (a \cdot x_F + b \cdot y_F + c) = |B| \cdot f(x_F, y_F)$, d. h. $f(x_F, y_F)$ ist die fragliche „Höhe“.

Kann man das auch ohne zweidimensionale Integralrechnung – d. h. mit nur elementarmathematischen Mitteln – einsehen? Ja, das ist möglich! Man braucht keine genaue Vorstellung von physikalischen Begriffen wie „Drehmoment“ etc.

[4] Bei Vierecken gilt dies sogar *genau* für Parallelogramme. Dass es für Parallelogramme gilt, ist leicht einzusehen, dass es im Bereich der Vierecke NUR für Parallelogramme gilt, ist etwas schwieriger [vgl. KIRSCH 1987].

Man braucht dazu nur die folgenden beiden (schulüblichen) Einsichten:

- Der Flächenschwerpunkt ist jener Punkt, in den man sich für mechanische Zwecke die Masse der Fläche vereinigt denken kann (z. B. für die Frage der Unterstützung in einem Punkt, Hebelgesetzbetrachtungen etc.).

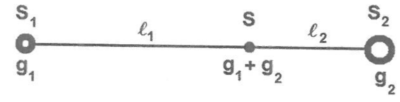

Abb. 9: Hebelgesetz

- Aus dem Hebelgesetz $g_1 \cdot \ell_1 = g_2 \cdot \ell_2$ ergibt sich unmittelbar $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{g_2}{g_1}$, d. h. der Gesamtschwerpunkt S eines Systems aus zwei Massen (mit den Gewichten $g_{1,2}$) in den Punkten $S_{1,2}$ teilt die Strecke S_1S_2 im Verhältnis $g_2 : g_1$ (Elementargeometrie).

Ausgedrückt in der Sprache der analytischen Geometrie (Koordinatengeometrie): Der Schwerpunkt S ist das mit den Gewichten $g_{1,2}$ gewichtete Mittel der beiden Punkte $S_{1,2}$:

$S = \frac{g_1}{g_1+g_2} \cdot S_1 + \frac{g_2}{g_1+g_2} \cdot S_2$.

Wir beschränken uns zunächst auf *Vier*ecke. Wir teilen das Viereck (Grundflächeninhalt G) durch eine Diagonale in zwei Teildreiecke mit den Inhalten $G_{1,2}$, die beiden zugehörigen Teilschwerpunkte bezeichnen wir mit $S_{1,2}$.

Dann ist einerseits der Flächenschwerpunkt F des Grundflächenvierecks gegeben durch das mit den Gewichten $G_{1,2}$ gewichtete Mittel der beiden Punkte $S_{1,2}$. Andererseits ist die Höhe h über diesem Punkt das mit den Gewichten $G_{1,2}$ gewichtete Mittel der beiden Höhen $h_{1,2}$: $h = \frac{G_1}{G_1+G_2} \cdot h_1 + \frac{G_2}{G_1+G_2} \cdot h_2 = \frac{G_1 \cdot h_1 + G_2 \cdot h_2}{G} = \frac{V}{G}$.

Bei Vierecken ist der fragliche Punkt (vgl. oben 1. und 2.) also immer der Flächenschwerpunkt. Auch bei Fünfecken ist das so. Die Begründung funktioniert ganz analog wie bei Vierecken, nur dass die Aufteilung der Grundfläche nicht in zwei Dreiecke, sondern in ein Viereck und ein Dreieck erfolgt. Genau so kann man (induktiv) fortfahren und erhält dadurch eine Bestätigung für alle Vielecke als Grundfläche: Der *Flächenschwerpunkt* F hat die fragliche Eigenschaft!

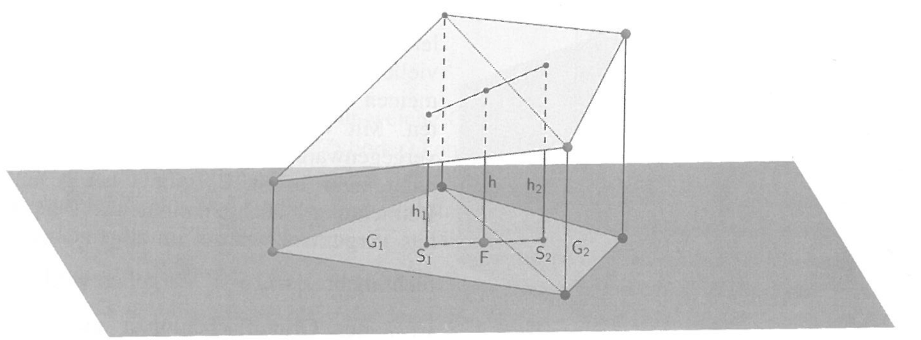

Abb. 10: Teilfiguren, Teilschwerpunkte (GeoGebra/www.geogebra.org)

Andererseits kann man auch leicht einsehen, in welchem Punkt der Grundfläche die Höhe immer $\frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{4}$ beträgt (dabei bezeichnen $h_{1,2,3,4}$ die Höhen in den Ecken $A_{1,2,3,4}$). Das ist der Eckenschwerpunkt $E=\frac{A_1+A_2+A_3+A_4}{4}$. Denn im Mittelpunkt der Strecke A_1A_2 beträgt die Höhe klarerweise $\frac{h_1+h_2}{2}$, im Mittelpunkt der Strecke A_3A_4 beträgt die Höhe klarerweise $\frac{h_3+h_4}{2}$; im Mittelpunkt dieser beiden Mittelpunkte (das ist der Eckenschwerpunkt E) daher $\frac{h_1+h_2+h_3+h_4}{4}$. Analog verliefe die Begründung bei mehr als vier Ecken: Die Höhe im Eckenschwerpunkt $E=\frac{A_1+\ldots+A_n}{n}$ beträgt $\frac{h_1+\ldots+h_n}{n}$.

Das heißt man kann die allgemeine Aussage treffen: Genau für Grundflächenpolygone mit der Eigenschaft, dass der *Flächen*schwerpunkt gleich dem *Ecken*schwerpunkt ist ($F=E$), gilt:

1. Wasserexperiment: Die Summe der „Wasserhöhen" an den Seitenkanten ändert sich nicht.
2. Schräg abgeschnittenes Prisma: Jene Höhe, mit der man den Grundflächeninhalt G multiplizieren muss, um das Volumen zu erhalten, ist das arithmetische Mittel der Höhen an den Eckpunkten.

Ein bekannter Satz besagt, dass $F=E$ bei Vierecken genau für *Parallelogramme* erfüllt ist [vgl. KIRSCH 1987]. Daher ist es auch klar, dass die anfangs beschriebenen GeoGebra-Experimente im Bereich der Vierecke nur bei Parallelogrammen funktionieren können.

8 Fachdidaktische Analyse und ein Plausibilitätsargument

Hier soll noch einmal hervorgehoben werden, dass es für dieses Thema verschiedenste Herangehensweisen gibt. Einerseits die enaktive Ebene mit den Behältern, andererseits die Ebene mit Technologie (z. B. GeoGebra 3D als Messinstrument) und drittens die Ebene mit Begründungen. Diese Vielfalt an Möglichkeiten erhöht das fachdidaktische Potenzial dieses Themas durchaus. Es ist auch ein lehrreiches Beispiel dafür, dass man nicht so ohne Weiteres Phänomene übertragen kann: Zum Beispiel läge es ja doch in einer gewissen Weise nahe, die „Summenkonstanz der Wasserhöhen" (bei Dreiecken, Rechtecken, Parallelogrammen als Grundfläche bestätigt und vielleicht sogar begründet) auch bei allgemeinen Vielecken als Grundfläche zu vermuten. Mit GeoGebra kann man sich leicht vergegenwärtigen, dass das im Allgemeinen nicht mehr so ist. Es gibt – bei genauerer Betrachtung – auch ein einfaches (Plausibilitäts-)Argument, warum im allgemeinen Fall nicht mehr $V=G\cdot\frac{h_1+\ldots+h_n}{n}$ gelten wird (dabei ist G der Grundflächeninhalt und h_i die „Wasserhöhen" an den Seitenkanten): Wenn man aus einer Kante h_k durch Wegschneiden eines sehr kleinen Dreiecks der Grundfläche zwei Kanten mit den Höhen h_{k_1} und h_{k_2} (praktisch gleich wie h_k) macht – dies wurde in **Abb. 11** angedeutet –, so wird sich dadurch zwar der Wert von V praktisch nicht ändern, aber der Mittelwert der h_i schon (der Wert h_k bekäme dadurch ja „doppeltes" Gewicht). Auch solche Plausibilitätsüberlegungen haben einen hohen Wert in Erkenntnisprozessen (auch im Unterricht), weil sie das „Warum von Phänomenen" gut erklären, also das Verständnis durchaus erhöhen.

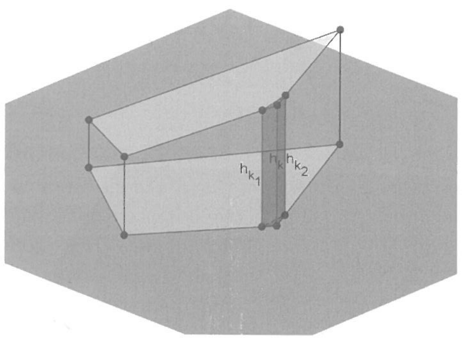

Abb. 11: Plausibilitätsargument (GeoGebra/www.geogebra.org)

Für Dreiecke und Rechtecke als Grundfläche kann man mit realen Füllkörpern (Prismen) experimentieren. Experimente („hands on") im Mathematikunterricht stellen – bei geeigneter Planung und Durchführung – eine Bereicherung des Unterrichts dar, nicht nur was die Lernmotivation betrifft. Darüber ist in der Literatur schon einiges geschrieben worden und es soll hier nicht noch einmal wiederholt werden, wir verweisen stellvertretend z. B. auf BECKER [1997] und LUDWIG/OLDENBURG [2007].

Dieses Thema eignet sich auch für differenzierenden Unterricht.

- **Stufe 1:** S&S kommen in selbstständiger Arbeit zur „dringenden Vermutung", dass die Summe der „Wasserhöhen" an den Seitenkanten konstant zu sein scheint in den betrachteten Fällen. Diese Stufe sollte praktisch allen S&S zumutbar sein.
- **Stufe 2:** Wenn sie diese Experimente z. B. mit GeoGebra nachkonstruieren und dabei das 3D-Programm primär als Messinstrument einsetzen können, sind sie schon eine Stufe weiter und haben insgesamt schon gute Arbeit geleistet. Diese Stufe wird nicht mehr von allen S&S erreicht werden, aber vom Großteil. Die dazu nötige Uminterpretation (vgl. Anfang von Abschnitt 3) kann dabei Schwierigkeiten bereiten (→ Lehrerhilfe?).
- **Stufe 3:** Wenn Lernende dies für Dreiecke und Parallelogramme selbstständig *begründen* können, ist dies schon eine schöne Steigerung. Vielleicht ist bei der Begründung auch einiges an Lehrerhilfe nötig, aber auch dann gibt es einen deutlichen Zugewinn an Erkenntnissen (Lernen) durch *Betreiben von Elementarmathematik* (*Mathematik als Prozess*).
- **Stufe 4:** Die Betrachtungen der verschiedenen Schwerpunkttypen und die zugehörigen Überlegungen, dass das in Rede stehende Phänomen genau für Grundflächenvielecke mit Eckenschwerpunkt = Flächenschwerpunkt gilt, kann in der Schule auch unterbleiben, ist aber vielleicht ein lohnendes Thema in der Lehrerausbildung (Elementargeometrie, Koordinatengeometrie, Physik, Analysis).

9 Anhang

Eine interessante Frage[5] ist auch, für welche Grundflächen der Inhalt der benetzten Randfläche beim Kippen der Prismen (Zylinder) konstant bleibt (dabei sei vorausgesetzt, dass die Grundfläche immer vollständig benetzt ist). Oben hatten wir als Ergebnis: Die Summe der Wasserkantenlängen bleibt genau dann konstant, wenn der *Eckenschwerpunkt* der Grundfläche gleich ihrem *Flächenschwerpunkt* ist. Hier werden wir erhalten:

[5] Ich danke meinem Kollegen F. EMBACHER für die Anregung zu dieser Frage.

> Der Inhalt der benetzten Randfläche beim Kippen der Prismen (Zylinder) bleibt genau dann konstant, wenn der *Kantenschwerpunkt* der Grundfläche gleich ihrem *Flächenschwerpunkt* ist. (*)

Im Bereich der Dreiecke ist dies klarerweise für *gleichseitige Dreiecke* erfüllt (analog für alle regelmäßigen n-Ecke und punktsymmetrischen Kurven wie z. B. Ellipsen), andere Dreiecke mit dieser Eigenschaft kann es nicht geben. Denn der Kantenschwerpunkt eines Dreiecks ist bekanntlich der Inkreismittelpunkt seines Seitenmittendreiecks [vgl. z. B. SEEBACH 1983]; wenn also in einem Dreieck *Kantenschwerpunkt = Flächenschwerpunkt* gilt, so müssen die Seitenhalbierenden des Seitenmittendreiecks und seine Winkelhalbierenden zusammenfallen, d. h. das Seitenmittendreieck muss gleichseitig sein und damit auch das Ausgangsdreieck.

Im Reich der Vierecke sieht man rasch: Bei Parallelogrammen ist das der Fall. Es gibt aber auch manche Drachen mit dieser Eigenschaft [vgl. FRITSCH/PICKERT 2014], ob es andere Vierecke mit dieser Eigenschaft gibt, ist offenbar ein offenes Problem [vgl. FRITSCH/PICKERT 2014, in der Online-Version auf S. 14].

Eine Begründung von (*) gelingt wieder mit Integralrechnung:

Die Formeln für die Koordinaten x_K und y_K des „Kantenschwerpunktes" K eines Bereiches B (d. h. der Schwerpunkt der Berandung ∂B) in der x-y-Ebene sind: $x_K = \frac{1}{|\partial B|} \cdot \int_{\partial B} x \, ds$, $y_K = \frac{1}{|\partial B|} \cdot \int_{\partial B} y \, ds$, wobei $|\partial B|$ die Länge und ds ein „Längenelement" von ∂B sind. Der Inhalt F_{benetzt} der „benetzten Randfläche", d. h. „unter der (schiefen) Ebene" mit $f(x,y) = ax + by + c$, ist gegeben durch $F_{\text{benetzt}} = \int_{\partial B} (ax+by+c) \, ds$; dies lässt sich wegen der Linearität von Integralen schreiben als $F_{\text{benetzt}} = a \int_{\partial B} x \, ds + b \int_{\partial B} y \, ds + c \int_{\partial B} ds = |\partial B| \cdot (a \cdot x_K + b \cdot y_K + c) = |\partial B| \cdot f(x_K, y_K)$.

Nun wissen wir von oben, dass bei konstantem Volumen V der „Funktionswert" bzw. die „Höhe" $f(x_F, y_F)$ konstant ist (und nur der Flächenschwerpunkt (x_F, y_F) hat diese Eigenschaft!). Im Kontext der teilweise mit Wasser gefüllten Prismen, deren Lage im Raum sich ändert, bedeutet dies: genau bei $(x_K, y_K) = (x_F, y_F)$ ist F_{benetzt} konstant!

Literatur

[1] BECKER, J.P., SHIMADA, S. (Hrsg., 1997): *The Open-Ended Approach – A New Proposal for Teaching Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, McGraw-Hill, Columbus.
[2] EMBACHER, F. (2008): Die Schwerpunkte des Dreiecks. In: *Mathematische Semesterberichte* **55**, 2, 131–148
[3] FRITSCH, R. & PICKERT, G. (2014): Schwerpunkte von Vierecken. In: *Die Wurzel* **48**, Teil 1: Heft 2, 35–41; Teil 2: Heft 3/4, 74–81; Teil 3: Heft 5, 90–95, Online: http://www.math.lmu.de/~fritsch/Viereckschwerpunkt.pdf
[4] HASHIMOTO, Y. (1997): An Example of Lesson Development – The Water-Flask Problem. In: BECKER, J.P., SHIMADA, S. (Hrsg., 1997), 10–22
[5] KIRSCH, A. (1987): Bemerkung zum Vierecksschwerpunkt. In: *Didaktik der Mathematik* **15**, 1, 34–36
[6] LUDWIG, M. & OLDENBURG, R. (2007): Lernen durch Experimentieren – Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. Basisartikel in *mathematik lehren* 141, 4–11
[7] SEEBACH, K. (1983): Über Schwerpunkte von Dreiecken, Vierecken und Tetraedern. In: *Didaktik der Mathematik* **11**, 4, 270–282

REINHARD OLDENBURG

Experimente zu den Grundvorstellungen der Ableitung

Experimente können helfen, solide Grundvorstellungen der zentralen Begriffe der Differentialrechnung aufzubauen. Im Beitrag werden einige Experimente vorgestellt und ihre Bedeutung für den Vorstellungsaufbau erläutert.

1 Experimente

Mathematik ist eine Geisteswissenschaft, keine Naturwissenschaft. Mathematische Aussagen können nicht durch Experimente in der physikalischen Welt bewiesen oder widerlegt werden. Und trotzdem sind Experimente auch für die Mathematik von Bedeutung, weil sie dazu herausfordern können, beobachtete Phänomene mathematisch zu modellieren und weil sie Zusammenhänge gut illustrieren können. Auch wenn ein Experiment eine mathematische Aussage nicht beweisen kann, so kann man doch erfahren, dass es Mathematik gibt, die gut oder weniger gut auf die Welt anwendbar ist. Letztlich ist ein Experiment mit konkretem Material in der Mathematik also ein Test auf ihre Anwendbarkeit. Die Evolution hat das menschliche Gehirn in der Welt geformt, die Strukturen des Denkens sind so, dass sie es ermöglichen, die Welt zu verstehen und darin erfolgreich zu handeln. Und eben die gleichen Strukturen haben die Welt der Mathematik entstehen lassen. Deswegen ruht auch abstrakte Mathematik auf konkreten Erfahrungen und Handlungen, wie LAKOFF und NUNEZ [2001] eindrucksvoll beschrieben haben. Für die Didaktik ergibt sich daraus die einfache Konsequenz, auch in abstrakten Teilen der Mathematik die Verankerung in der Welt zu suchen.

2 Mit Experimenten zu den Grundvorstellungen der Differentialrechnung

In OLDENBURG [2007] habe ich einige Experimente zur Differentialrechnung vorgestellt. Nun, zehn Jahre später, liegen einige weitere positive Unterrichtserfahrungen vor und die technische Entwicklung stellt neue Möglichkeiten zur Verfügung, die die Durchführung der Experimente erleichtern. Außerdem wurde mittlerweile [in GREEFRATH et al. 2016] eine Diskussion der Grundvorstellungen der Analysis gegeben, die eine verbesserte didaktische Einordnung der Experimente erlaubt. Der vorliegende Beitrag will damit die Experimente zur Ableitung auf die Höhe der Zeit bringen.

Zur Differentialrechnung unterscheiden GREEFRATH et al. [2016] vier Grundvorstellungen. Wir gehen diese jetzt der Reihe nach durch und beschreiben passende Experimente. Dabei ist interessant – und ein wichtiger Pluspunkt der Experimente –, dass viele davon mehr als nur eine Grundvorstellung vermitteln.