Exaktifizieren im Mathematikunterricht – am Beispiel des Begriffes „besser“

von Hans Humenberger

1. Einleitung

Schüler haben häufig große Schwierigkeiten mit der mathematischen Fachsprache, und zwar in zweifacher Hinsicht. Einerseits verstehen sie oft präzise formulierte Sachverhalte nicht (*Verständnis*), andererseits sind sie oft nicht fähig, verstandene und intuitiv richtig erfaßte Sachverhalte richtig und genau wiederzugeben, zu beschreiben bzw. zu formulieren (*Ausdruck*). Zwischen der „mathematischen Sprache“ und dem Verständnis der Schüler tut sich – bildlich gesprochen – eine tiefe Kluft auf, die manchmal so groß zu werden droht, daß den Schülern (weitere) Einblicke in die Mathematik verborgen bleiben (müssen). Daß es diesen Umstand zu ändern gilt, ist wohl keine Frage, nur *wie* kann das geschehen?

Ein Grund für die angesprochene Misere scheint uns zu sein, daß in der Mathematik oft Wörter verwendet werden, die aufgrund ihrer umgangssprachlichen Bedeutung schon durch „etwas anderes“ besetzt sind, oder bei denen es mehrere Möglichkeiten der mathematischen Präzisierung (Exaktifizierung) gibt. Wir muten uns nicht zu, allgemeine Patentrezepte angeben zu können, wie dieses Defizit bei Schülern oder Studenten zu beheben wäre, aber wir glauben, daß durch explizites Hinweisen auf bzw. Erarbeiten der jeweiligen Unterschiede (zwischen der umgangssprachlichen und der mathematischen Bedeutung oder zwischen den einzelnen mathematischen Bedeutungen) zumindest eine gewisse Verbesserung in dieser Hinsicht erreicht werden könnte. Nur relativ gute Schüler sind in der Lage, diese „Feinheiten“ zu erkennen, wenn dieses Thema nur *en passant* behandelt wird und sie quasi von allein im Laufe des Unterrichts die jeweiligen Unterschiede erkennen sollen; wir plädieren daher dafür, diese bisweilen explizit zum Unterrichtsgegenstand zu machen!

Vielfach kann ein umgangssprachlicher Begriff auf verschiedene Arten in der Mathematik exaktifiziert werden, wobei dann je nach (Anwendungs-)Situation zu entscheiden ist, *welche* (mathematische) Bedeutung des jeweiligen Begriffes hier zugrundezulegen ist – eine Fähigkeit, deren Ausbildung u. E. bisweilen zu wenig Beachtung findet. Die Mathematik legt hier (gezwungenermaßen) oft mehr Sorgfalt an den Tag als die Umgangssprache, sie trifft feinere Unterscheidungen – dies ist bei einer sogenannten „exakten“ Wissenschaft wie der Mathematik notwendig. Ein Großteil der Mathematik und ihrer Begriffe ist ja aus dem Bestreben entstanden, Probleme aus unserer Umwelt zu beschreiben bzw. zu lösen – Exaktifizieren gehört daher sicher zu den sogenannten *Fundamentalen Ideen* der (Angewandten) Mathematik (vgl. [02]).

Die folgenden Ausführungen zeigen nun einige Möglichkeiten, was das Wort „besser“ in verschiedenen Zusammenhängen bedeuten kann, wie „besser“ exaktifiziert werden kann; sie erheben aber keineswegs den Anspruch auf Vollständigkeit und sind nur als persönliche Anregungen des Autors gedacht.

2. Beispiele

2.1 Mittelwerte

Beispiel 2.1.1

Der sehr schwankende Wert eines Golddukaten sei in einem Jahr von 1 000 DM auf 1 400 DM gestiegen und im darauffolgenden Jahr wiederum auf 980 DM gefallen. Der Wert eines Silbertalers sei hingegen im ersten Jahr um 25 Prozent gefallen und dann um 35 Prozent gestiegen. Der Wert welcher Münze hat sich „besser" entwickelt?

Das Wachstum des Golddukaten betrug – wie man leicht erkennen kann – im ersten Jahr +40 % und im zweiten Jahr –30 % (Verlust). Das arithmetische Mittel von +40 % und –30% beträgt

$$\frac{40\,\% - 30\,\%}{2} = 5\,\%.$$

Es kann aber ein Wert von 1000 DM nach zwei Jahren eines durchschnittlichen Wachstums von +5 % nicht weniger geworden sein und nur mehr 980 DM betragen! Bei Wachstumsraten hat das arithmetische Mittel überhaupt keinen Sinn! Die einzig korrekte *mittlere* Wachstumsrate, die zum Vergleich herangezogen werden kann, ist jene, die den Ausgangswert von 1000 DM tatsächlich in 980 DM überführt, aber +5 % können dies auf keinen Fall sein! Durch den „Zinseszinseffekt" (Änderung des Grundwertes) ist eben ein zweimaliges Wachstum um +5 % nicht dasselbe wie zuerst um +40 % und dann um –30 %.

Da ein Wachstum um 40 % einer Multiplikation mit 1,4 und eine Wertminderung um 30 % einer Multiplikation mit 0,7 entspricht, so muß die „mittlere" Wachstumsrate einer Zahl entsprechen, die mit sich selbst multipliziert (i. e. zweimal gleiche Wachstumsrate) dem Produkt $1{,}4 \cdot 0{,}7$ entspricht! Die korrekte mittlere Wachstumsrate ist hier also das geometrische Mittel aus 1,4 und 0,7 nämlich $\sqrt{1{,}4 \cdot 0{,}7} = \sqrt{0{,}98} \approx 0{,}99$, d. h. das durchschnittliche „Wachstum", das hier zum Vergleich herangezogen werden kann, betrug beim Golddukaten –1 %.

Beim Silbertaler würde das arithmetische Mittel von –25 % und +35 % ebenfalls +5 % betragen. Wenn dies zum Vergleich der Wertentwicklung herangezogen würde, so ergäbe sich offenbar „gleiches" durchschnittliches Wachstum wie beim Golddukaten. Der Wert des Silbertalers muß jedoch – im Gegensatz zum Wert des Golddukaten – gestiegen sein, denn $\sqrt{0{,}75 \cdot 1{,}35} \approx 1{,}006$, und das bedeutet doch wohl, daß die Wertentwicklung des Silbertalers als *besser* einzustufen ist als die des Golddukaten!

Bemerkung: Das geometrische Mittel ist nur für positive Zahlen definiert und dann nie größer als das arithmetische; wer Wachstumsraten arithmetisch mittelt, muß also notwendigerweise ein erhöhtes Durchschnittswachstum erhalten (außer die einzelnen Wachstumsraten sind gleich groß; nur in diesem Fall ist das arithmetische Mittel gleich dem geometrischen).

Zum Thema arithmetisches bzw. geometrisches Mittel nun ein weiteres Beispiel, das u. E. sehr illustrativ ist.

Beispiel 2.1.2

Ein Laborant benutzt eine (alte) Balkenwaage mit abnehmbaren Waagschalen. Keine Balkenwaage der Welt besitzt jedoch exakt gleich lange Balken; unsere Waage habe ein Verhältnis der beiden Balkenlängen von $a : b$ ($a, b > 0$, $a \neq b$). Der Laborant

ist sich dessen bewußt und bedient sich folgenden Tricks: Er wägt alle Gegenstände ein zweites Mal mit vertauschten Waagschalen, d. h. bei der zweiten Wägung befinden sich die Gegenstände und die Normgewichte auf der jeweils anderen Seite. Er erhält dadurch für jeden Gegenstand zwei Gewichtswerte, von denen er „zum Ausgleich" das arithmetische Mittel nimmt. Ist der so erhaltene Wert nun

1. *immer zu klein?*
2. *immer zu groß?*
3. *immer exakt?*
4. *manchmal zu klein, manchmal zu groß, manchmal exakt?*

Könnte dem Laboranten zu einer „besseren" Methode geraten werden?

Vielleicht würden die meisten Schüler (und auch Erwachsenen) intuitiv (ohne vorher Überlegungen oder gar Kalkulationen anzustellen) zur Antwort 4 neigen und sich damit jedoch verschätzen?

Ein Gegenstand mit dem wirklichen Gewicht G werde mit der beschriebenen Methode einmal zu g_1 und einmal zu g_2 gewogen. Dann gelten bekanntlich die Gleichungen

$$G \cdot a = b \cdot g_1 \quad \text{und} \quad G \cdot b = a \cdot g_2$$

Aus diesen erhalten wir

$$g_1 = G \cdot \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad g_2 = G \cdot \frac{b}{a}$$

Für das arithmetische Mittel von g_1 und g_2 ergibt sich dann

$$\frac{g_1 + g_2}{2} = \frac{G}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq G,$$

da die Summe zweier (positiver) Kehrwerte stets größer oder gleich 2 ist.

Beweis: Aus $(a - b)^2 \geq 0$ ergibt sich zunächst $a^2 + b^2 \geq 2ab$ und daraus (Division durch ab) erhalten wir die gewünschte Aussage $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Der Laborant erhält also ständig einen zu großen Wert für das Gewicht, d. h. Antwort 2 ist die richtige.

Eine bei weitem „bessere" Vorgangsweise zum Ausgleich der Balkenungenauigkeit wäre hier abermals, das geometrische Mittel von g_1 und g_2 zu bilden. Man würde (theoretisch!) dadurch immer den exakten Wert erhalten:

$$\sqrt{g_1 \cdot g_2} = \sqrt{G\frac{a}{b} \cdot G\frac{b}{a}} = \sqrt{G^2} = G$$

2.2 Bestimmen und Vergleichen von Schulnoten

„Welcher Schüler ist bei jeweils gegebener Notenreihe als *besser* einzustufen?" – eine Frage, die insbesondere Lehrer immer wieder bei der Vergabe von Zeugnisnoten beantworten müssen. Bei der Berechnung einer „mittleren Notenleistung", also jener Leistung, die den Schüler dann im Zeugnis charakterisieren soll, kann das arithmetische Mittel ebenfalls nicht unbedingt als gerechter Wert angesehen werden, sondern viel eher der *Median*,

- weil erstens der Mittelwert i. a. keine wirkliche Note (1, 2, 3, 4, 5) ist, sondern eine Dezimalzahl (z. B. 2,71),
- weil Noten zweitens nur eine „Rangskala“ darstellen, weshalb sich das „Rechnen“ mit ihnen (z. B. Mittelwertbildung, Runden) an sich verbietet,
- und weil drittens das arithmetische Mittel sehr empfindlich gegenüber sogenannten „Ausreißern“ (extremen Werten) ist, was bei einer den Schüler charakterisierenden Note ja eigentlich nicht der Fall sein soll (eine *einzelne* Leistung sollte auf die *Semester-* bzw. *Jahresnote* wohl keinen so großen Einfluß haben)! Wenn ein Schüler während eines Semesters z. B. die Noten (1, 4, 1, 1) hat, so würde das gerundete arithmetische Mittel (1,75 ≈ 2) diesem Schüler die Note 2 zuordnen (die Ausnahmeleistung „4“ hätte sich stark ausgewirkt); dieselbe Note bekäme ein Schüler mit der Serie (2, 2, 2, 3), wenn das arithmetische Mittel 2,25 ≈ 2 zugrundegelegt würde. Wir meinen jedoch, daß es eigentlich (abgesehen von anderen Leistungen wie *Mitarbeit, Engagement* etc.) ungerecht wäre, diesen beiden Schülern dieselbe Note zu geben. Der Median als Kriterium würde dem ersten Schüler die Note 1 und dem zweiten Schüler die Note 2 zuordnen, eine – wie uns scheint – gerechtere Version.

Beispiel 2.2.1
In zwei Parallelklassen (A und B) wurde eine Klassenarbeit gegeben, wobei die Noten (1, 2, 3, 4, 5) in der Klasse A mit den Häufigkeiten (4, 5, 5, 2, 1) und in Klasse B entsprechend mit (5, 2, 8, 3, 0) aufgetreten sind. In welcher Klasse ist die Arbeit „besser“ ausgefallen?

Das arithmetische Mittel der Noten wäre bei beiden Klassen fast gleich (2,47 und 2,50), der Median von Klasse A ist jedoch 2, während jener von Klasse B den Wert 3 hat. Im Sinne des Medians war Klasse A also *besser*.

2.3 Wann sind Näherungslösungen „besser“ als andere?

Das folgende Beispiel soll u. a. zeigen, daß es zur Entscheidung von „besser“ bzw. „schlechter“ oft durchaus gleichberechtigte Konkurrenzmodelle gibt, wobei es nicht selbstverständlich ist, daß verschiedene Kriterien, die für die gleiche Angelegenheit zuständig sind, auch die gleiche Entscheidung bzgl. „besser“ liefern.

Beispiel 2.3.1
Ist der Punkt (3| –1) oder der Punkt $(-1|\frac{3}{2})$ *eine „bessere“ Näherungslösung für das Gleichungssystem*
$6x + 7y = 4$
$7x + 8y = 5$?

Es liegt hier z. B. nahe, durch Einsetzen rechnerisch zu prüfen, welche Lösung die kleineren „Residuen“ (= Abweichungen vom jeweiligen Sollwert – i. e. Abweichungen von 4 bzw. 5) liefert.

Dabei findet man für (3| –1) die Residuen 7 bzw. 8, und für $(-1|\frac{3}{2})$ die Werte 0,5 bzw. 0. Danach wäre also $(-1|\frac{3}{2})$ die bei weitem *bessere* Näherungslösung.

Vergleicht man jedoch die Näherungswerte mit der hier ganz leicht zu bestimmenden exakten Lösung (3| –2), so merkt man, daß der Punkt (3| –1) viel „näher“ an der exakten Lösung liegt als der Punkt $(-1|\frac{3}{2})$ bezüglich des Euklidischen Abstandes. Verdeutlicht man sich die Gleichungssituation graphisch (siehe Abbildung 1 oben auf der folgenden Seite), so ist der besonders „schleifende“ Schnitt der beiden zugehörigen Geraden zu erkennen.

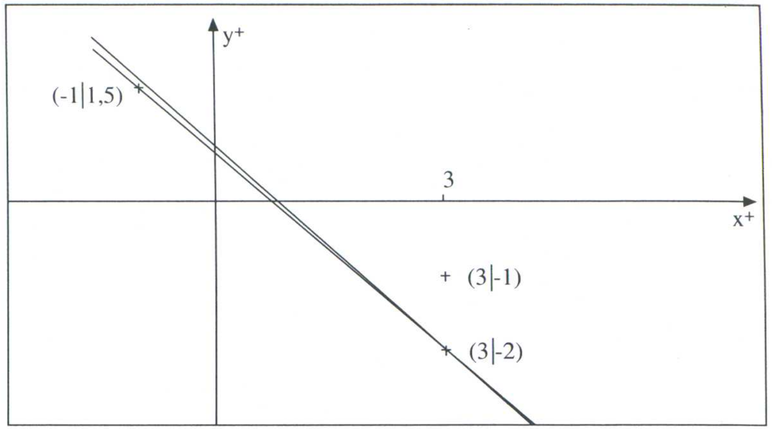

Abb. 1: Schleifender Schnitt

Man überlegt sich anhand der Darstellung leicht, daß und wie die beiden Kriterien – Residuen und Abstand – zu völlig konträren Ergebnissen (Entscheidungen bzgl. „besser“) führen können. Es handelt sich hierbei um ein ganz einfaches Beispiel eines sogenannten „schlecht konditionierten“ linearen Gleichungssystems.

2.4 Näherungswerte – absoluter und relativer Fehler

Beispiel 2.4.1
Wann ist ein Schätzwert (bzw. Meß- oder Näherungswert) „besser“ als ein anderer?

Bei Zahlenangaben, die Ergebnisse von Messungen sind („Meßwerte“), bei Schätzungen oder gerundeten Werten können wichtige Begriffe der Näherungsrechnung verdeutlicht werden (z. B. „absoluter Fehler“, „relativer Fehler“). Hierzu einige Beispiele:
1. Die Breite b eines Flusses wurde auf 35 m geschätzt.
2. Die Laufzeit eines Schülers bei einem 60 m Lauf betrug t = 9,4 Sekunden.
3. Ein gebräuchlicher Näherungswert für π ist $\overline{\pi} = 3{,}142$.
4. Eine Kleinstadt hat ungefähr E = 25 000 Einwohner.

Zur Beschreibung der Güte eines Näherungswertes x für einen (meistens unbekannten) exakten Wert a gehört eine Angabe über die Größe des Fehlers $\varepsilon = x - a$. Dieser *wahre Fehler* (positiv oder negativ) kann aber i. a. leider nicht angegeben werden, da der exakte Wert a fast immer unbekannt ist. Daher wird die Genauigkeit eines Näherungswertes meist durch die Angabe gekennzeichnet, um wieviel er *höchstens* vom exakten Wert abweichen kann. Diese „Fehler*schranke*“ Δx ist bei Messungen z. B. aus der Erfahrung bekannt, sie wird üblicherweise *absoluter Fehler* genannt:

$$a = x \pm \Delta x \Leftrightarrow x - \Delta x \le a \le x + \Delta x \Leftrightarrow a \in [x - \Delta x, x + \Delta x] .$$

Bei den obigen Beispielen fehlen jegliche Angaben über den absoluten Fehler Δx, die Güte der Näherungswerte kann daher ohne weitere Information gar nicht verglichen werden. Der Schätzwert (b = 35 m) für die Flußbreite müßte durch die Angabe einer Fehlerschranke Δb (z. B. Δb = 5 m) aussagekräftiger gemacht werden (b = 35 m ± 5 m).

Bei der Laufzeit t = 9,4 s deutet die Angabe darauf hin, daß sie „auf Zehntel genau“ ist. Dafür gibt es jedoch zwei (bzw. drei) unterschiedliche Interpretationen[1]: Einerseits kann

„auf Zehntel genau" heißen, daß der Fehler höchstens ein Zehntel beträgt ($\Delta t = 0{,}1$ s, das heißt $9{,}3 \text{ s} \le t \le 9{,}5$ s), andererseits ist es natürlich auch möglich, die Angabe als „auf Zehntel gerundet" zu verstehen, was $\Delta t = 0{,}05$ s bzw. $9{,}35 \text{ s} \le t \le 9{,}45$ s bedeutete. Schließlich wird $t = 9{,}4$ s von Schülern oft auch so aufgefaßt, daß „4" die wahre Zehntelstelle ist, daß also die Dezimalzahl nach der Zehntelstelle nur „abgeschnitten" wurde, d. h. $t = 9{,}4 \ldots$ s – eine dritte mögliche Interpretation! Alle drei Bedeutungen sind auf ihre Weise sinnvoll, aber es sollte zwischen „auf Zehntel genau", „auf Zehntel gerundet" und „nach der Zehntelstelle abgeschnitten" sprachlich strenger unterschieden werden. (Wir nehmen für den absoluten Fehler hier $\Delta t = 0{,}1$ Sekunden an.)

Soll nun – wie hier – die Güte mehrerer Näherungsangaben verglichen werden, so genügt der Vergleich der absoluten Fehler wohl nicht. Stammen die beiden zu vergleichenden Näherungswerte aus verschiedenen Größenbereichen (z. B. Entfernung und Zeit), so sind die Abweichungen in z. B.

$$b = 35 \text{ m} \pm 5 \text{ m} \qquad \text{und} \qquad t = 9{,}4 \text{ s} \pm 0{,}1 \text{ s}$$

eo ipso nicht vergleichbar. Aber selbst in

$$s_1 = 35 \text{ m} \pm 5 \text{ m} \qquad \text{und} \qquad s_2 = 2500 \text{ m} \pm 10 \text{ m},$$

wobei es sich offensichtlich um zwei Näherungswerte aus dem selben Größenbereich (Entfernungen) handelt, ist der alleinige Vergleich der beiden absoluten Fehler nicht ausreichend. Obwohl bei s_2 der absolute Fehler doppelt so groß ist wie bei s_1, wird man nicht abstreiten, daß ein Fehler von 5 m bei einer zu messenden Entfernung von ungefähr 35 m eine größere Ungenauigkeit bedeutet als ein Fehler von 10 m bei einer zu messenden Entfernung von ungefähr 2500 m.

Zum Vergleich der Genauigkeit von Näherungswerten betrachtet man besser den sogenannten *relativen Fehler* r_x, den Quotient aus absolutem Fehler und Näherungswert:

$$r_x := \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Der „relative Fehler" gibt die Abweichung in bezug auf die Größe des Näherungswertes an (nur dadurch kann ein Vergleich der Genauigkeit objektiv sein), er wird auch manchmal in Prozent (des Näherungswertes x) angegeben. Für die oben genannten Beispiele (b, t, π, E, s_1, s_2) ergibt sich, wenn zusätzlich $\Delta b \approx 5$, $\Delta E \approx 1000$ und $\Delta t \approx 0{,}1$ angenommen wird:

$$r_{s1} = r_b = \frac{\Delta b}{|b|} = \frac{5}{35} \approx 0{,}15,$$

$$r_t = \frac{\Delta t}{|t|} = \frac{0{,}1}{9{,}4} \approx 0{,}0106 \approx 0{,}011, \qquad r_{s2} = \frac{\Delta s_2}{|s_2|} = \frac{10}{2500} \approx 0{,}004,$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1000}{25000} = 0{,}04, \qquad \frac{\Delta \overline{\pi}}{\overline{\pi}} \approx \frac{0{,}0005}{3{,}142} \approx 0{,}00016.$$

Im Sinne des *relativen Fehlers* ist demnach die Angabe von π durch $\overline{\pi}$ am genauesten („besten")!

Beispiel 2.5.1

Zwei Maschinen M_1 und M_2 produzieren Werkstücke mit einer Länge von 10 cm bzw. 10 m. Die Standardabweichung bei den Stücken von M_1 beträgt $s_1 = 1$ mm, bei denen von M_2 ergibt sich $s_2 = 2$ mm. Betrachtet man nur die beiden Streuungen – also ohne Bezug zum Sollwert –, so wäre ja M_2 doppelt so „schlecht" wie M_1. Es leuchtet aber jedem ein, daß eine Streuung von 2 mm bei einem Sollwert von 10 m bei weitem „besser" ist als eine von 1 mm bei einem Sollwert von 10 cm!

Man kann Streuungen also erst dann gerecht vergleichen, wenn man sie im Verhältnis zum Sollwert (Mittelwert) sieht[2]. „Im Verhältnis" soll hier wirklich heißen, daß der Quotient zu bilden ist.

Der *Variationskoeffizient* v mit $v := \frac{s}{\bar{x}}$

ist eine viel entscheidendere Größe, wenn es um Vergleiche von Streuungen geht! Er wird auch oft in % (des Mittelwertes) angegeben. Bei obigem Beispiel erhält man:

$$v_1 = \frac{0{,}1 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0{,}01 = 1\,\%, \qquad \text{bzw.} \qquad v_2 = \frac{0{,}002 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 0{,}0002 = 0{,}02\,\%$$

Durch den Vergleich der beiden erhaltenen Werte für v wird nun die *bessere* Qualität der zweiten Maschine auch „rechnerisch" evident!

Beispiel 2.5.2

Bernhard machte in letzter Zeit bei zwei verschiedenen Tests (I, II) mit. Bei Test I erreicht er 130 Punkte, wobei bei diesem Test der Erwartungswert der erreichten Punkte bei $\mu_1 = 100$ Punkte und die Streuung bei $\sigma_1 = 30$ Punkte lag. Beim Test II erreichte er 100 Punkte, wobei die entsprechenden Werte hier $\mu_2 = 80$ und $\sigma_2 = 7$ betrugen. Von beiden Tests darf für die erreichten Punkte ungefähr Normalverteilung angenommen werden. Bei welchem Test schnitt Bernhard „besser" ab?

Man könnte hier meinen, daß er beim Test I besser abgeschnitten habe, weil er dabei um 30 Punkte über dem Durchschnitt lag, während dies beim Test II nur 20 Punkte waren. Eine schon etwas genauere Argumentation wäre die folgende: Bei Test I lag Bernhard 30 % über der Durchschnittsleistung, während er beim Test II nur 25 % darüber lag. Beide Argumentationen sind u. E. jedoch falsch! Die Abweichung muß doch in bezug auf die Streuung gesehen werden, weil diese ja angibt, wie viele Leute bei diesem Test eine noch bessere Leistung (= Punkteanzahl) erreicht haben. Oberhalb einer Leistung von $\mu + 1 \cdot \sigma$ liegen bei einer annähernden Normalverteilung ungefähr 16 % der Testpersonen, oberhalb von $\mu + 2 \cdot \sigma$ ungefähr 2,5 % und oberhalb von $\mu + 3 \cdot \sigma$ gar nur mehr 0,4 % der Testpersonen.

Da er bei Test I nur um $1 \cdot \sigma_1$ Punkte über dem Erwartungswert liegt, hingegen bei Test II ungefähr $3 \cdot \sigma_2$ Punkte, so kann behauptet werden, daß er bei Test II bei weitem besser abgeschnitten habe. Bei Test I haben noch ungefähr 16 % mindestens so gut wie Bernhard abgeschnitten, während er bei Test II sozusagen zur wirklichen Elite (0,4 % der Testpersonen) gehört!

Bemerkung: Bei Beispielen, in denen es nur darauf ankommt, daß ein bestimmter „Grenzwert" nicht über- oder unterschritten wird, ist generell kein „Lageparameter" ein gutes Entscheidungskriterium für die Güte, hier spielt bekanntlich die Streuung auch eine sehr große Rolle. Trotz kleinerem (größerem) Mittelwert, aber beträchtlich größerer Streuung, kann nämlich eine bestimmte Toleranzgrenze bei weitem häufiger über- bzw. unterschritten werden (vgl. das folgende Beispiel)!

Beispiel 2.5.3

Bei der maschinellen Bearbeitung von Glasplatten (z. B. beim Abschleifen) kommt es insbesondere auf deren Bruchfestigkeit[3] *an. Wenn nun die mittlere Bruchfestigkeit μ_A eines Glases A geringer als die mittlere Bruchfestigkeit μ_B eines Glases B ist, so könnte vermutet werden, daß das Glas B auf alle Fälle „besser" sei, und daher zu bevorzugen wäre.*

(Diese mittleren Bruchfestigkeiten könnten sich z. B. aus je 100 Belastungsversuchen ergeben haben.)

Die folgende Überlegung zeigt jedoch, daß hier nicht die mittlere Bruchfestigkeit das alleinige Auswahlkriterium sein kann (siehe Abb. 2)!

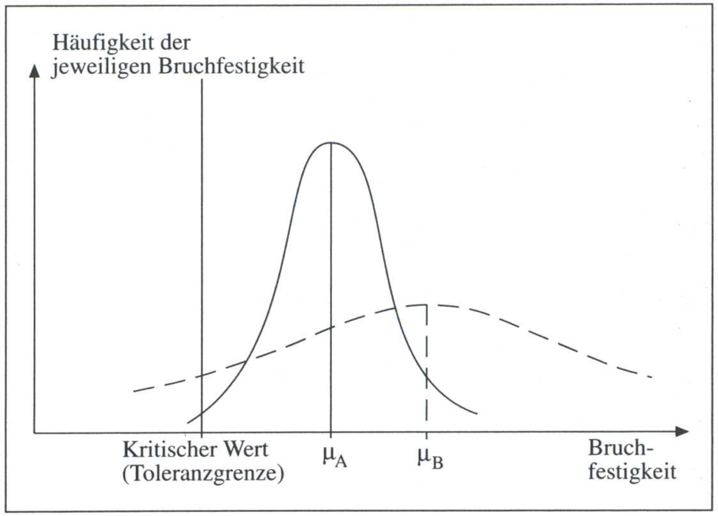

Abb. 2: Bruchfestigkeit von Glas A und B

Das Glas bricht ja immer dann, wenn seine Bruchfestigkeit kleiner als die durch die Maschine verursachte Belastung ist. (Die konstante Maschinenbelastung kann daher als „kritischer Wert" bzw. „Toleranzgrenze" bezeichnet werden.) Die Maschine muß dann gestoppt und von den Glassplittern gereinigt werden. Offenbar kommt es also nur darauf an, *wie oft* dieser *kritische Wert* von einer Glassorte *unterschritten* wird! Dies kann aber bei Glas A trotz geringerer mittlerer Bruchfestigkeit bedeutend seltener der Fall sein, wenn die Streuung der Bruchfestigkeit des Glases A wesentlich kleiner ist! Der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion der Bruchfestigkeiten, der „links" (unterhalb) der kritischen Grenze liegt, gibt ja die relative Häufigkeit an, mit der die Bruchfestigkeit des jeweiligen Glases die Toleranzgrenze unterschreitet (siehe Abbildung 2), und dieser ist bei Glas A (kleinere Streuung, i. e. schmälerer Kurvenverlauf der Dichte) doch wesentlich kleiner!

Ein analoges Beispiel, bei dem es um die Reißfestigkeit von Garnen bei der Bearbeitung durch Webstühle geht, findet sich z. B. in ([04], S. 44).

Beispiel 2.5.4 ([03], S. 159)

Eine Bank verwendet ein Buchungssystem für die Bearbeitung von Belegen. Die Bearbeitungszeit pro Beleg sei eine Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu = 20$ s und der Streuung $\sigma = 4$ s. Eine EDV-Firma bietet ein neues System an, die Bank erprobt es an $n = 30$ Belegen. Es zeigt sich hiebei, daß die mittlere Bearbeitungszeit pro Beleg $\bar{x} = 15$ s und die empirische Streuung $s = 6{,}5$ s beträgt. Welches System ist „besser"?

Es fällt auf, daß beim neuen System die mittlere Bearbeitungszeit zwar kleiner, die Streuung jedoch größer ist. Wenn die EDV-Firma nun z. B. behauptet, daß die wirkliche Streuung des neuen Systems ebenfalls bei $\sigma = 4$ s liege und daß die größere empirische Streuung sich hier nur rein zufällig ergeben habe („Hypothese"), so könnte diese Hypothese getestet werden[4] (dies soll hier jedoch nicht das Thema sein).

Unabhängig davon müssen jedoch Überlegungen angestellt werden, was hier „besser" überhaupt heißen muß (kann). Diese Überlegungen sind natürlich banktechnischer Natur und wohl kaum mathematischer! Zum Beispiel wird es in der Praxis sehr darauf ankommen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Beleg (Überweisungen etc.) erst nach einer gewissen „kritischen" Zeit behandelt wird. Hier ist nicht nur die elektronische Bearbeitungszeit des jeweiligen Belegs relevant, sondern vor allem, wann dieser Beleg an die Reihe kommt. Dies hängt zwar auch von der Bearbeitungszeit der vorher behandelten Belege ab, aber auch von vielen anderen Faktoren, die Verzögerungen hervorrufen können (Störfälle, Fehlbuchungen etc.). Unangenehme Reklamationen werden ja erst dann in der Bank eintreffen, wenn Aufträge nach einer gewissen Zeit (einige Tage; dies genauer festzulegen, muß aus den Erfahrungen der Bank resultieren) noch immer unerledigt in einem Fach liegen. Ob jedoch ein Beleg nach einer Stunde oder nach einem Tag bearbeitet wird, ist für den Kunden i. a. unerheblich. Die Güte eines Systems kann sicher nicht allein durch die mittlere Bearbeitungszeit pro Beleg beurteilt werden. Auch die Miteinbeziehung der Streuung kann in der Praxis wohl nicht das alleinige Kriterium für oder gegen ein gewisses Buchungssystem darstellen. Faktoren wie Bedienungsfreundlichkeit, Sicherheit (eingebaute Kontrollen), Übersichtlichkeit, Fehleranfälligkeit etc. müssen hier natürlich auch Beachtung finden.

Anmerkungen

1 Es wäre u. E. hier an der Zeit, für eine Vereinheitlichung in der Literatur und in den Schulbüchern zu sorgen.

2 Analog zum absoluten und relativen Fehler.

3 Diese könnte z. B. in $\frac{N}{cm^2}$ angegeben werden.

4 Zum Beispiel mittels des χ^2-Streuungstests.

Literatur

[01] Humenberger, H., G. Hanisch u. H.-C. Reichel: Fachbereichsarbeiten und Projekte im Mathematikunterricht. Hölder-Pichler-Tempsky (HPT), Wien 1991.

[02] Humenberger, H. u. H.-C. Reichel: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich 1995.

[03] Reichel, H.-C.: Sprachschulung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht. Aus: Postel, H., A. Kirsch u. W. Blum (Hrsg.): Mathematik Lehren und Lernen. Schrödel, Hannover 1991, S. 156–170.

[04] Reichel, H.-C., G. Hanisch u. R. Müller: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1992[3].

[05] Winter, H. (Hrsg.): Mittelwerte – eine grundlegende mathematische Idee. Themenheft: mathematik lehren (8); Friedrich Verlag, Seelze 1985.