BERTHOLD SCHUPPAR – HANS HUMENBERGER

Drachenvierecke mit einer besonderen Eigenschaft

»Der Inkreismittelpunkt eines Drachenvierecks wird konstruiert als Schnittpunkt der Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten.« – Diese Schülerlösung ist zwar im Allgemeinen falsch, führt aber manchmal tatsächlich zum Ziel, nicht nur bei Rauten. Es werden diejenigen Drachen charakterisiert, bei denen die obige Konstruktion zutrifft, und zwar auf zwei verschiedene Arten (konstruktiv und rechnerisch).

1 Das Problem

Eine Episode aus einer Übung zur Elementargeometrie: Die Aufgabe war, alle Viereckstypen zu bestimmen, die einen Inkreis besitzen. Eine Studierende ging folgendermaßen vor:

1.1 Systematisches zum Einstieg

– Jedes Quadrat hat einen Inkreis, und man kann seinen Mittelpunkt konstruieren, indem man gegenüberliegende Seitenmitten miteinander verbindet; deren Schnittpunkt ist das Zentrum, und die Seitenmitten sind die Berührpunkte (Abbildung 1).

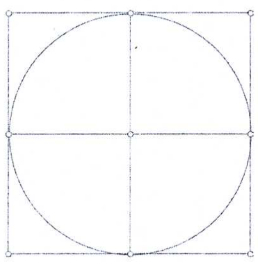

Abb. 1. Quadrat mit Inkreis

– Bei Rauten kann man ebenso vorgehen, nur sind die Seitenmitten nicht mehr die Berührpunkte; man muss erst das Lot auf eine Seite fällen, um den Radius zu bestimmen (Abbildung 2).

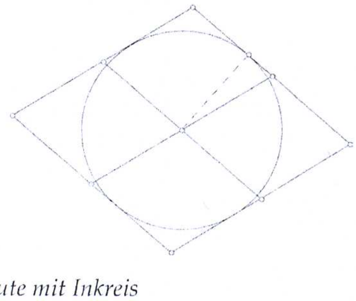

Abb. 2. Raute mit Inkreis

Nun übertrug sie diese Konstruktion auch auf Drachenvierecke. Zwar hat jeder Drachen auch einen Inkreis, aber sein Zentrum kann im Allgemeinen nicht so konstruiert werden. Die richtige Lösung wäre, die Winkelhalbierenden zum Schnitt zu bringen; wegen der Symmetrie des Drachens funktioniert das immer (Abbildung 3).

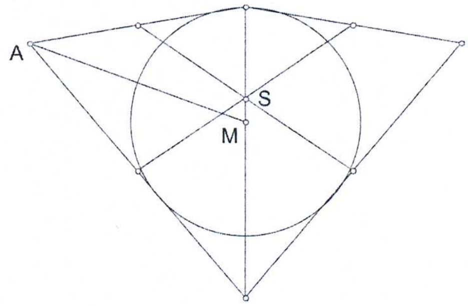

Abb 3. Schnitt der Winkelhalbierenden am Drachenviereck

Anschließend hat der Autor die Situation noch einmal mit Sketchpad durchgespielt und dabei mit Erstaunen festgestellt: Es gibt tatsächlich Drachen, die keine Rauten sind, bei denen die f a l s c h e Konstruktion funktioniert (Abbildung 4)!

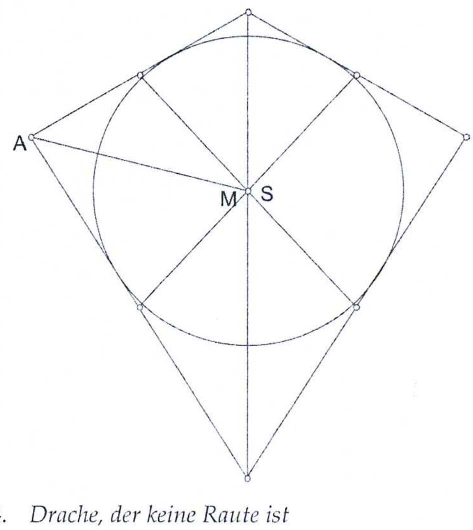

Abb. 4. Drache, der keine Raute ist

Dieses Beispiel hat im Grunde die Form eines a l l g e m e i n e n D r a c h e n s. Das soll heißen: Wenn man ein beliebiges Drachenviereck zeichnen will, so hat es häufig diese Gestalt; führt man jetzt die obige Konstruktion aus, so kann man durchaus an diesem Beispiel die geforderte Eigenschaft bestätigt finden (bei kleinen Abweichungen schiebt man die Schuld auf die unvermeidliche Ungenauigkeit beim Zeichnen), so dass eine unreflektierte Verallgemeinerung

 MNU 60/3 (15. 4. 2007) Seiten 140–145 ISSN 0025-5866

zum falschen Resultat führt. (Die DGS hat natürlich den unschätzbaren Vorteil, dass solche Figuren niemals singulär bleiben: Sie sind »allgemein« im Sinne von »beliebig veränderbar«.)

1.2 Formulierung des Problems

Jedenfalls ergab sich daraus das Problem dieses Aufsatzes, welches in Kasten 1 formuliert wird.

Was sind das für Drachen, bei denen diese Inkreis-Konstruktion funktioniert? Kann man sie irgendwie charakterisieren, z. B. durch Eigenschaften von Seiten oder Winkeln?

Kasten 1. Problemformulierung

2 Die Konstruktion

Gesucht sind also die Drachenvierecke, in denen der Schnittpunkt S der Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten gleichzeitig der Mittelpunkt des Inkreises ist.

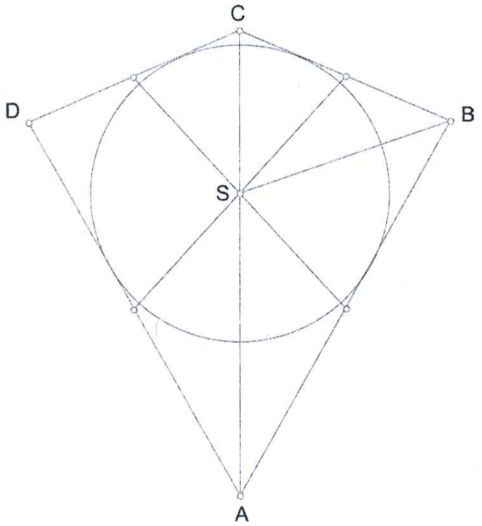

Abb. 5. Beispiel für einen Vertreter der gesuchten Drachenvierecke

Die folgende Konstruktion geht aus von der Diagonalen AC und einem Punkt S auf AC, der die obigen Bedingungen erfüllen soll.

2.1 Formulierung der Bedingungen

1. Bedingung: S ist der Inkreismittelpunkt.
Dann müssen die Winkelhalbierenden der Winkel bei B und D durch S verlaufen, also müssen die Punkte B und D auf dem Apolloniuskreis der Strecke AC zum Teilverhältnis $|AS| : |SC|$ liegen.

Ausgehend von S als innerem Teilpunkt der Strecke AC konstruiert man daher den zugehörigen äußeren Teilpunkt T; der Thaleskreis über ST ist der genannte Apolloniuskreis, somit die erste Ortslinie für B und D (Abbildung 6).

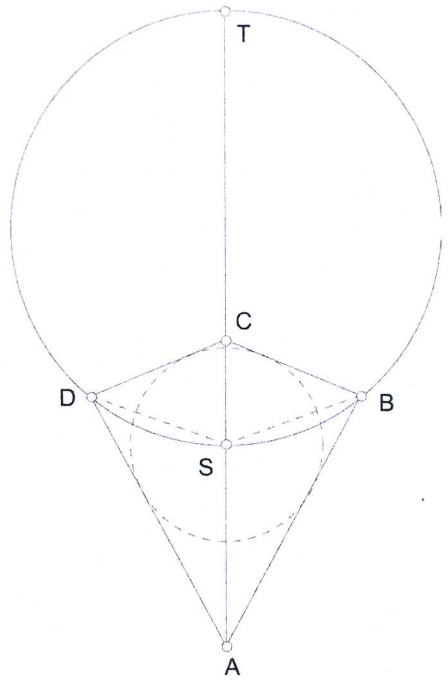

Abb. 6. Zur Konstruktion des Apolloniuskreises

2. Bedingung: S ist der Schnittpunkt der Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmitten.

Die zugehörige Ortslinie ist nicht so leicht zu finden, deswegen soll erst einmal der Drachen genauer analysiert werden.

Die Verbindungsstrecken der Seitenmitten sind die Diagonalen im Mittenviereck des Drachens. Das Mittenviereck ist in diesem Fall ein Rechteck, d. h. die Diagonalen sind gleich lang. S liegt also auf der Mittelsenkrechten von EF (Abbildung 7).

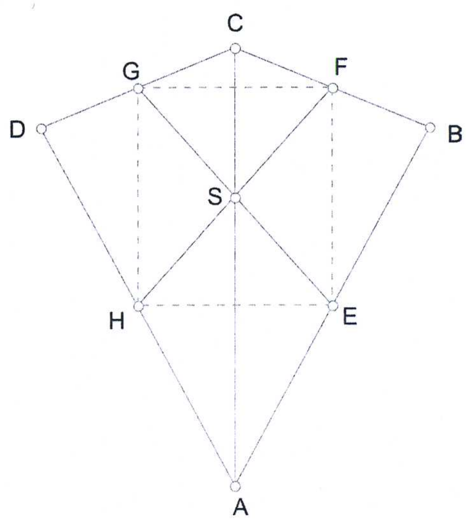

Abb. 7. S liegt auf der Mittelsenkrechten von EF

M sei nun der Mittelpunkt von AC. Das Viereck $EBFM$ ist ein Parallelogramm; dessen Diagonalen schneiden sich im Mittelpunkt N von EF, und das Parallelogramm ist punktsymmetrisch zu N. Die Punktspiegelung an N bildet die Mittelsenkrechte m von AC auf das Lot g von B auf AC ab. EF ist parallel zu AC, daher sind m und g auch senkrecht zu EF.

Weil S auf der Mittelsenkrechten von EF liegt, ist die Gerade SN die Mittellinie von m und g, und man kann g ebenso gut erzeugen durch Punktspiegelung an S (Abbildung 8).

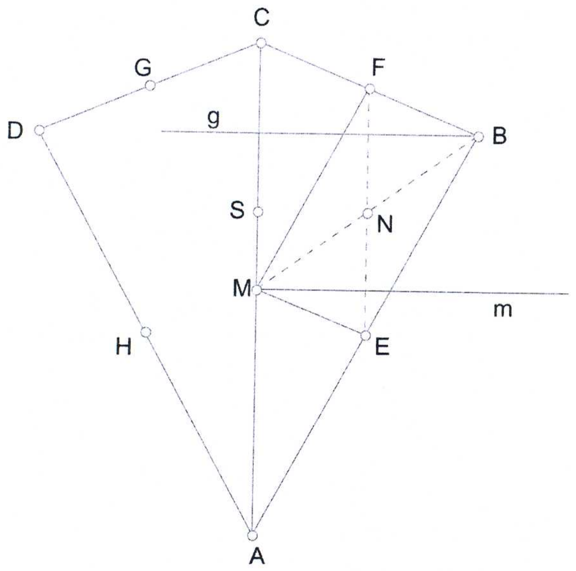

Abb. 8. Erzeugen von g durch Punktspiegelung an S

2.2 Zur Konstruktion

Sind die Diagonale AC und der Punkt S auf AC gegeben, so spiegelt man die Mittelsenkrechte m von AC am Punkt S und erhält somit die zweite Ortslinie für B und D.

Die gesuchten Eckpunkte des Drachens sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Apolloniuskreis aus der ersten Bedingung (Abbildung 9).

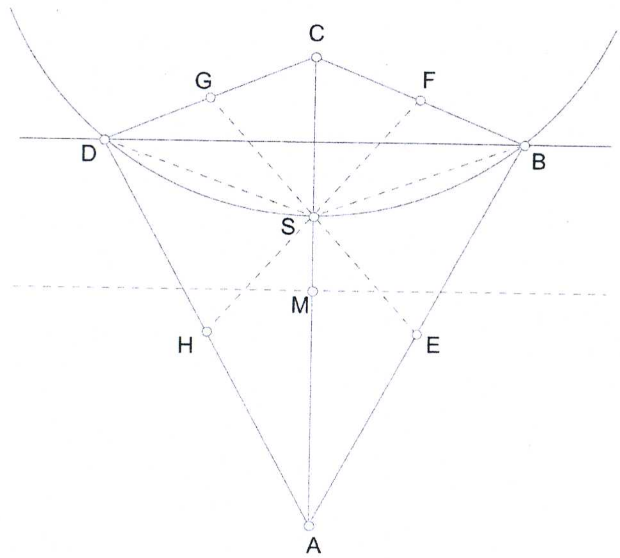

Abb. 9. Konstruktion der Eckpunkte des Drachenvierecks

2.3 Einschränkungen

Nicht für alle Lagen von S ist die Konstruktion durchführbar: Falls S zu nah an C (bzw. A) heranrückt, schneidet g den Kreis nicht mehr (Abbildung 10 zeigt eine Situation kurz vor der Extremlage, dass der Drachen zu einer Strecke entartet). Wenn S noch weiter zu C hin bewegt wird, so wird der Kreis noch kleiner, und g rückt noch weiter nach außen.

Anmerkung: Bei nichtkonvexen Drachen, wie z. B. mit einem überstumpfen Winkel BCD, berührt der Inkreis nicht mehr die Strecken BC und CD, sondern die Geraden BC und CD (die Berührpunkte liegen außerhalb der Strecken).

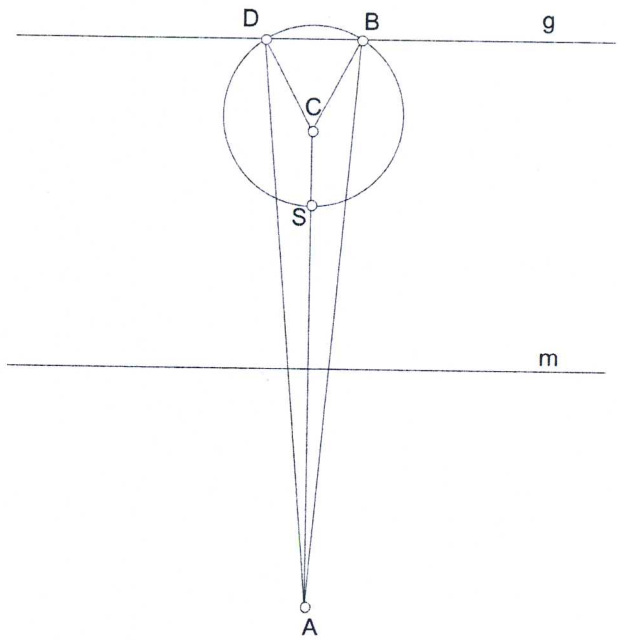

Abb. 10. Kurz vor der Extremlage

In der Extremlage berührt g den Apolloniuskreis im äußeren Teilpunkt T, und es ist $|SM| = |ST|$ (Abbildung 11).

Allgemein beträgt der Durchmesser $|ST|$ des Apolloniuskreises $\frac{2k}{k^2-1} \cdot |AC|$, wenn $k = |AS| : |SC| = |AT| : |TC|$ das zugehörige Teilverhältnis ist, denn es gilt:

$$\frac{|AC|}{|SC|} = \frac{|AS| + |SC|}{|SC|} = k + 1 \Rightarrow |SC| = \frac{1}{k+1} \cdot |AC|$$

$$\frac{|AC|}{|TC|} = \frac{|AT| - |TC|}{|TC|} = k - 1 \Rightarrow |TC| = \frac{1}{k-1} \cdot |AC|$$

$$|ST| = |SC| + |TC| = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1}\right) \cdot |AC| = \frac{2k}{k^2-1} \cdot |AC|$$

Damit ergibt sich aus der obigen Bedingung für die Extremlage folgendes:

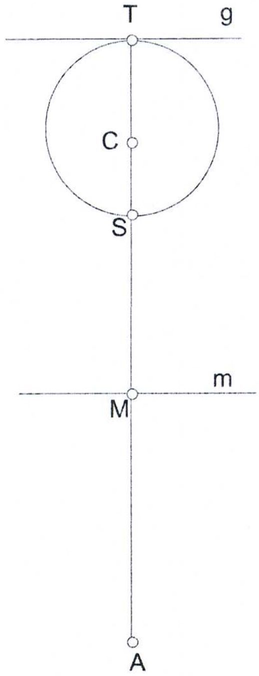

Abb. 11. Extremlage: der Drachen entartet zu einer Strecke

$$|SM| = |ST| \Leftrightarrow |MC| - |SC| = |ST| \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}\right) \cdot |AC| = \frac{2k}{k^2 - 1} \cdot |AC|$$

Nach kurzer Rechnung erhält man die quadratische Gleichung $k^2 - 6k + 1 = 0$ mit den (reziproken) Lösungen $k_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ und $k_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Somit beträgt die maximale Entfernung des Punktes S von M:

$$|SM|_{\max} = \frac{2k_1}{k_1^2 - 1} \cdot |AC| = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |AC|$$

2.4 Die Ortslinie aller Lösungspunkte

Die Ortslinie der Ecken B und D für alle möglichen Lagen von S (in Abbildung 11 mit DGS konstruiert) stellt offenbar eine Ellipse dar, wobei A und C vermutlich die Brennpunkte sind und die kleine Halbachse gleich der Exzentrizität ist.
Bezeichnen wir die große und die kleine Halbachse mit r und s sowie die Exzentrizität mit e, so ergibt sich daraus wegen $r^2 = e^2 + s^2$ und $e = s$:

$$r = \sqrt{2}\, e$$

Das stimmt mit der obigen Berechnung der extremen Lage von S überein, denn in dieser Lage ist T der zugehörige Ellipsenpunkt, somit ist MT die große Halbachse (vgl. Abbildung 11), und aus dem oben berechneten Maximalwert für $|SM|_{\max}$ folgt:

$$|MT|_{\max} = |SM|_{\max} + |ST|_{\max} =$$

$$2 \cdot |SM|_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |AC| = \sqrt{2} \cdot \frac{|AC|}{2}$$

2.5 Warum ist die Ortslinie eine Ellipse?

Wir gehen zurück zu den anfänglichen Bedingungen für den Punkt S, die lauteten:

1. S ist der Inkreismittelpunkt des Drachens, also ist BS die Winkelhalbierende von $\beta = \angle ABC$;
2. S ist der Mittelpunkt des Mittenrechtecks des Drachens; wegen $|ES| = |FS|$ und $EF \parallel AC$ konnten wir daraus schließen, dass die Senkrechte zu AC in S gleich der Mittelsenkrechten von EF ist.

Wir betrachten nun das Dreieck EBF. Es gilt der folgende Satz:
Die Mittelsenkrechte einer Seite (hier: Seite EF) und die Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Winkels (hier: β) schneiden sich auf dem Umkreis des Dreiecks. S ist der Schnittpunkt der beiden Geraden, also liegt S auf dem Umkreis, d. h. das Viereck $EBFS$ ist ein Sehnenviereck (Abbildung 13).

Daher ist $\angle ESF = 180° - \beta$, und wegen $\angle CSF = \angle ASE$ folgt daraus:

$$\angle CSF = \angle ASE = \frac{\beta}{2}$$

Die Dreiecke ASE und ASB haben den Winkel SAB gemeinsam; wie soeben gezeigt, ist $\angle ASE = \frac{\beta}{2}$, außerdem ist auch $\angle ABS = \frac{\beta}{2}$, damit sind die beiden Dreiecke ähnlich zueinander (Abbildung 14). Somit gilt mit der Festlegung $a = |AB|$:

$$\frac{a}{|AS|} = \frac{|AS|}{|AE|} = \frac{|AS|}{a/2} \Rightarrow a^2 = 2 \cdot |AS|^2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \cdot |AS|$$

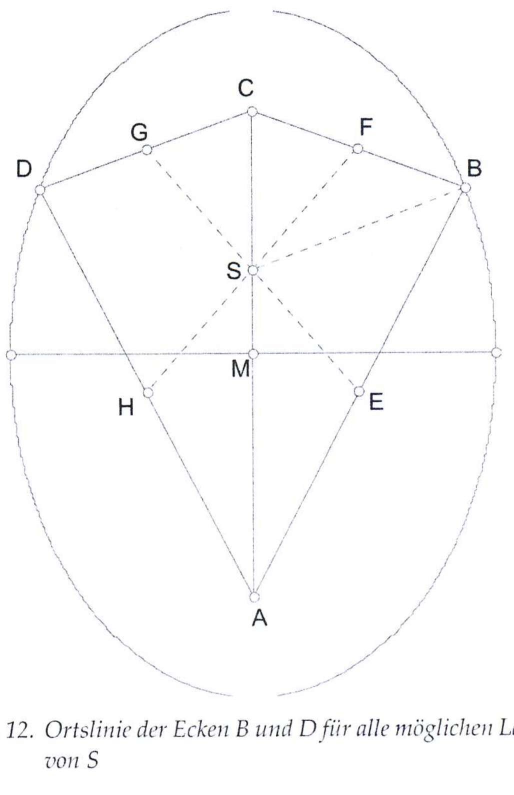

Abb. 12. Ortslinie der Ecken B und D für alle möglichen Lagen von S

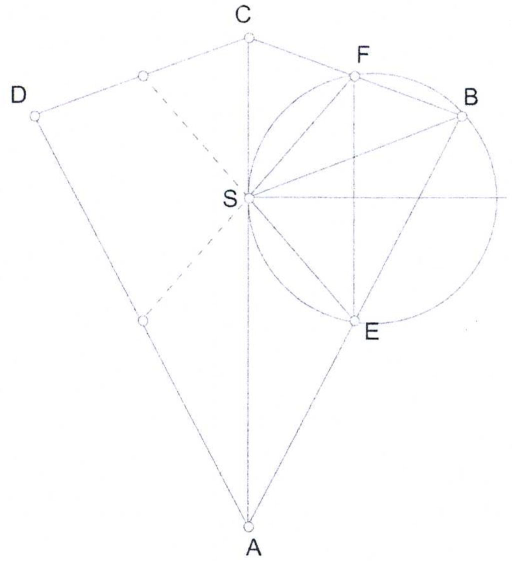

Abb. 13. Sehnenviereck Viereck EBFS

Ebenso erhält man mit $b := |BC|$ den Zusammenhang $b = \sqrt{2} \cdot |CS|$

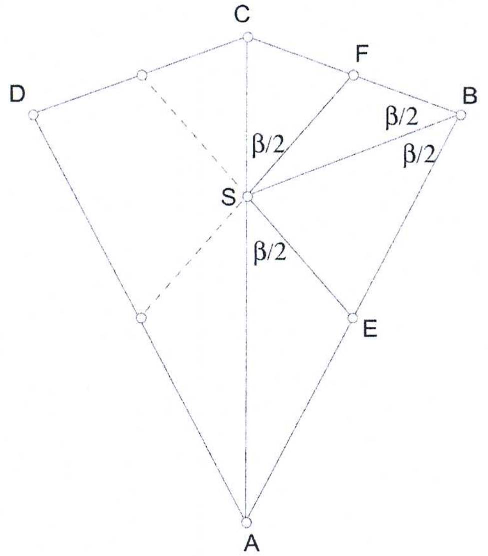

Abb. 14. Zur Ähnlichkeit der Dreiecke ASE und ASB

Beides zusammen ergibt:

$$a + b = \sqrt{2} \cdot (|AS| + |CS|) = \sqrt{2} \cdot |AC|$$

Damit ist bewiesen: Die Summe der Entfernungen von B zu den Punkten A und C ist konstant, also liegt B auf der Ellipse mit den Brennpunkten A und C, und die numerische Exzentrizität beträgt $\frac{|AC|}{a+b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 Die Berechnung

Da S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bei B mit AC ist, muss S die Strecke AC im Verhältnis der bei B anliegenden Seiten teilen, also $|AS| : |SC| = a : b$ bzw.:

$$|AS| : |AC| = a : (a + b)$$

Wir setzen o.B.d.A. $|AC| = 1$ und können schreiben:

$$|AS| = a : (a + b).$$

Mit $|AG| = \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha$ und $|GS| = \frac{1}{4}$ erhalten wir daraus

$$\frac{a}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{1}{4} = \frac{a}{a+b}$$

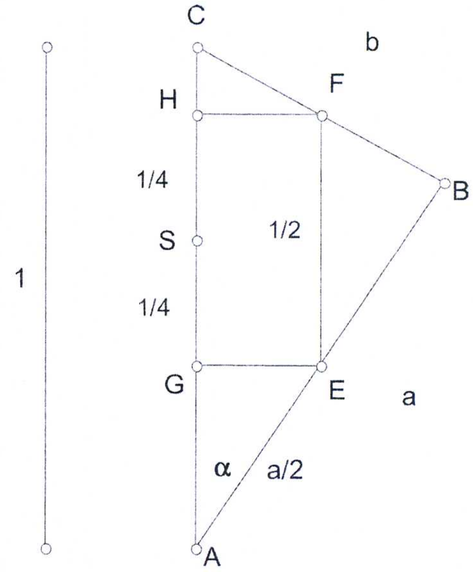

Abb. 15.

Aus dem Kosinussatz im Dreieck ABC ergibt sich $\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2a}$; dies eingesetzt in die obige Gleichung ergibt

$$\frac{a^2 - b^2 + 2}{4} = \frac{a}{a+b}.$$

Nach kurzer Rechnung (Multiplikation mit $4(a + b)$, anschließendes Ausklammern) erhält man daraus

$$(a - b) \cdot [(a + b)^2 - 2] = 0$$

woraus man sofort

Fall 1: $a = b$ oder
Fall 2: $a + b = \sqrt{2}$ (die negative Lösung hat keine Bedeutung) erhält.

Im Fall 1 muss es sich beim Drachen um eine Raute handeln und im Fall 2 ist klar, dass $|AB| + |BC| = \sqrt{2} \cdot |AC|$ gelten muss: B muss also auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und C liegen (man denke an die Gärtnerkonstruktion mit Seillänge $\sqrt{2} \cdot |AC|$).

Mit diesen Kenntnissen lassen sich jetzt die gesuchten Drachen viel einfacher konstruieren: Zu gegebener Diagonale AC konstruiert man eine Strecke der Länge $\sqrt{2} \cdot |AC|$ (hier CF), teilt diese durch einen Punkt P an fast beliebiger Stelle (der Unterschied zwischen $|CP|$ und $|FP|$ darf nicht größer als $|AC|$ sein!) und schlägt Kreise um A mit Radius $|FP|$ sowie um C mit Radius

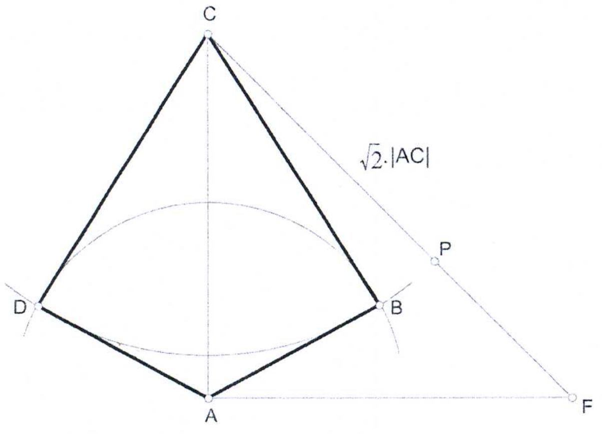

Abb. 16. zur einfachen Konstruktion der gesuchten Drachenvierecke

$|CP|$; diese Kreise schneiden sich in den fehlenden Ecken B und D des Drachens (Abbildung 16). Zum Abschluss noch eine anschauliche Deutung: Man kann sich auch die Strecke CF als »Stange« vorstellen: Sie wird bei P geknickt, anschließend wird der Punkt F zu A geführt (P geht dabei in B über).

Dr. Berthold Schuppar, Universität Dortmund, Fachbereich Mathematik, IEEM, D-44221 Dortmund, berthold.schuppar@math.uni-dortmund.de; ist Studienrat im Hochschuldienst mit den Hauptinteressen Elementarmathematik und Computereinsatz. Dr. Hans Humenberger, Fakultät für Mathematik, Nordbergstraße 15 (UZA 4) A-1090 Wien, hans.humenberger@univie.ac.at ist Professor für Didaktik der Mathematik.

Rolf Rose

Zusammenfügen von Funktionen

Dieser Beitrag befasst sich mit einfachen Überlegungen zum Zusammenfügen von einzelnen abschnittsweise definierten Funktionen zu einer einheitlichen Funktion auf der Menge der reellen Zahlen.

1 Die Funktion

$$f(x) = |x| + x + 8 + (|x| - x - 24)sign(x + 12),\ x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

setzt sich aus folgenden Funktionen

$f_1(x) = 2x + 32$ für $x \le -12$,
$f_2(x) = -2x - 16$ für $-12 \le x \le 0$ und
$f_3(x) = 2x - 16$ für $x \ge 0$.

Wie ist aber vorzugehen, um aus den einzelnen Funktionen eine Gesamtfunktion aufzustellen?

2 Zunächst werden zwei Funktionen zu einer einzigen zusammengefügt: Wenn

$f(x) = f_1(x)$ für $x < x_1$ und $f(x) = f_2(x)$ für $x > x_1$, so gilt

$$f(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} + \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \cdot \frac{|x - x_1|}{x - x_1}. \qquad (2)$$

Sind beide Funktionen f_1 und f_2 algebraisch und soll

$$f(x_1) = f_1(x_1) = f_2(x_1) \qquad (3)$$

gelten, so kann in der Gleichung (2) die Unbestimmtheit bei $x = x_1$ durch Kürzen behoben werden. Der Term

$$\frac{|x - x_1|}{x - x_1} \qquad (4)$$

kann durch $sign(x - x_1)$ ersetzt werden. Ist zumindest eine der beiden Funktionen nicht algebraisch und soll Gleichung (3) oder

$$f(x_1) = \frac{f_1(x_1) + f_2(x_1)}{2}$$

gelten, so muss der Term (4) durch $sign(x - x_1)$ ersetzt werden.

3 Wir fügen nun mehr als zwei Funktionen zu einer einzigen zusammen. Wenn

$f(x) = f_1(x)$ für $x < x_1$,
$f(x) = f_2(x)$ für $x_1 < x < x_2$,
$f(x) = f_3(x)$ für $x_2 < x < x_3$ usw.,

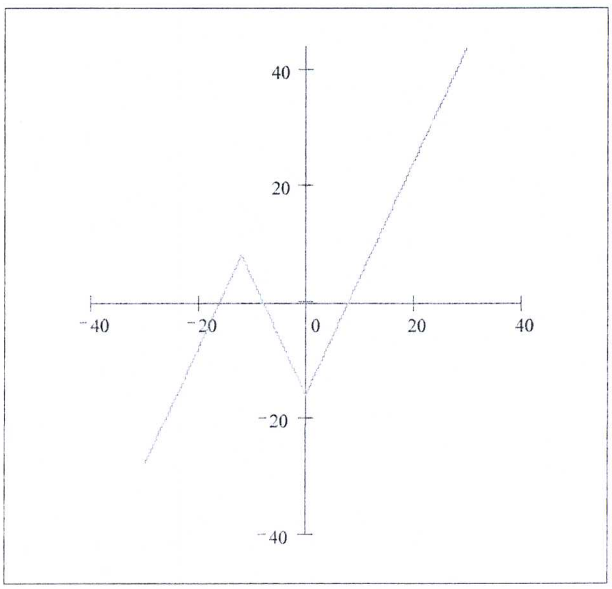

Abb. 1. Graph zur Funktion mit der Gleichung (1)

MNU 60/3 (15. 4. 2007) Seiten 145–146 ISSN 0025-5866